

## 3차 B-spline 함수를 이용한 열전도 및 유체문제의 해석

김 은 필<sup>\*1</sup>

Analysis for computing heat conduction and fluid problems using cubic B-spline function

E. Kim

We make use of cubic B-spline interpolation function in two cases: heat conduction and fluid flow problems. Cubic B-spline test function is employed because it is superior to approximation of linear and non-linear problems. We investigated the accuracy of the numerical formulation and focused on the position of the breakpoints within the computational domain. When the domain is divided by partitions of equal space, the results show poor accuracy. For the case of a heat conduction problem this partition can not reflect the temperature gradient which is rapidly changed near the wall. To correct the problem, we have more grid points near the wall or the region which has a rapid change of variables. When we applied the unequally spaced breakpoints, the results show high accuracy. Based on the comparison of the linear problem, we extended to the highly non-linear fluid flow problems.

**Key Words** : 근사 이론(Approximation Theory), 3차 B-Spline(Cubic B-Spline), 열전도(Heat Conduction), 비선형 유체 유동(Non-Linear Fluid Flow)

### 1. 서론

선형 또는 비선형 문제의 해를 구하는 데 있어서 보간 함수를 적절히 선택하는 것은 매우 중요하다. 본 논문에서는 스플라인 함수를 사용하였으며 이에 대한 수학적 연구는 근사 이론으로 분류된다.[1] Pantan등[2]은 세 가지 유형의 스플라인을 비교 분석했는데 이를 선형 문제에 적용하여 3차 스플라인으로 가장 우수한 결과를 얻었다. 스플라인 함수를 미분방정식에 적용하여 근사적인 해를 구하고

자 Russel등[3]은 Collocation 방법을 사용하고, Birkhoff[4]는 Galerkin 방법을 사용하여 선형 미분 방정식의 해를 구하는 데 스플라인을 사용하였으며 Kim[5]은 비선형 문제까지 확장하였다. 스플라인 함수를 사용했을 때의 장점의 하나는 작은 컴퓨터 용량으로도 문제에 접근할 수 있다는 것이다. 예로, Patankar 등[6]은  $10 \times 10 \times 10$ 의 결과로 발표하였다. 그러나 앞에서 언급한 논문에서 알 수 있듯이 스플라인 함수를 사용할 때 수학적 정의에 많은 주의가 필요하다. 이는 문제의 이산화를 쉽게 하고 수치상의 안정성에 중요한 역할을 하기 때문이다.

\*1 정회원, 부산대학교 기계공학부

본 논문에서는 지배방정식에 Galerkin 방법

과 혼합 공식을 사용하였다.[7] 혼합 공식의 이산화 방정식에서 대각선 원소가 영이 되어 시스템이 특이계가 된다. 대각선 원소에 영의 작은 수를 대입하면 시스템의 안정성을 떨어뜨리며, 또한 Babuska-Brezzi 조건을 만족하지 못하면서 시스템이 불안정해진다.[8] 이러한 문제를 피하기 위해 연속방정식에 인공적인 압축 형식을 적용하였다.[9] Galerkin 방법을 적용하는데 있어서 고차인 지배방정식에 부분 적분을 사용해 차수를 낮추고 있으나 정확도에 있어서는 영향이 없으므로 적용하지 않았다. 반면 정확도는 격자점의 크기와 보간 함수의 최고 차수가 중요하므로 이에 대해 고찰하였다. 먼저 선형문제에 적용한 후 이를 바탕으로 재순환이 일어나는 비선형 문제에 적용하였다.

## 2. 수학적 모델

스플라인 함수는 일정 영역을 분할한 각 구간에서 다항식의 형태를 가지고 있다. 또한 각 구간 사이의 마디점에서 연속성을 가지고 있는 함수이다. 본 연구에서 사용한 3차 B-spline 함수는 각 마디점에서 1차 및 2차 미분이 연속이다. 3차 B-spline 함수를 어떻게 구성할 것인가를 자세히 살펴보자.

주어진 구간  $[0,1]$ 을 다음과 같이 분할한다.[10]

$$\pi : 0 = z_1 < z_2 < \dots < z_l < z_{l+1} = 1$$

여기서  $z_i$  는 중단점이다.

조각적 다항식 함수(piecewise polynomial function)  $f(z)$ 의 집합  $P_{k,\pi}$  는 다음과 같다.

$$P_{k,\pi} = \{f(z) : f(z) = p_i(z) \text{ if } z \in [z_i, z_{i+1}], \\ 1 \leq i \leq l\}$$

여기서  $p_1(z), \dots, p_l(z)$ 는  $k$ 의 차수를 가진  $l$  다항식의 수열이다.

$P_{k,\pi}$ 는 부분 간격  $[z_i, z_{i+1}]$ 에 대해서 최대  $k$ 의 차수를 가지며  $k-1$ 만큼 미분 가능하다.  $l$ 의 부분 간격이 있으므로  $P_{k,\pi}$ 의 차원은  $kl$ 이다. 내부 중단점  $z_i$  ( $2 \leq i \leq l$ )에서  $P_{k,\pi}$

의 부분 공간  $S_{k,\pi,\nu}$ 를 생각해 보자.

$\nu = \{\nu_i\}_{i=2}^l$ 는 음수가 아닌 정수의 수열인데  $\nu_i$ 는 중단점  $z_i$ 에서 다항식  $S_{k,\pi,\nu}$  공간을 제한 조건을 나타내는 지표로  $\nu_i \leq k$ 이며  $f^{(j)}(z_i^+) = f^{(j)}(z_i^-)$ ,  $0 \leq j \leq \nu_i - 1$ 의 관계식을 만족한다. 위의 제약 조건을 고려한 각 중단점  $z_i$ 에서 부분 공간  $S_{k,\pi,\nu}$ 의 차원은 다음과 같다.

$$\dim S_{k,\pi,\nu} = k + \sum_{i=2}^l (k - \nu_i)$$

선형 스플라인 보간법은 스플라인 함수의 계수를 양함수해의 형태로 표현할 수 있으나 B-spline 함수를 직접적으로 구하려고 하면 정확도가 크게 떨어지므로 다음과 같은 점화 관계식을 사용하였다.[11]

$$B_{i,k}(z) = \frac{z - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-2}(z) + \frac{t_{i+k} - z}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(z) \quad (1)$$

$$B_{i,1}(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

식 (1)에서  $t = \{t\}_1^{n+k}$ 는 다음과 같은 수열이다.

(i)  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq z_1$ , 와  $z_{l+1} \leq t_{N+1} \leq \dots \leq t_{N+k}$

(ii)  $z_i$  ( $2 \leq i \leq l$ )는  $t$ 에서  $(k - \nu_i)$ 번 일어난다.

이렇게 정의된 B-spline 함수는 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$B_i(z) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N \\ \sum_{i=1}^N B_i(z) = 1 \quad (3)$$

여기서  $z \in [z_1, z_{l+1}]$ 이다.

그 외 B-spline 함수의 관계식은 다음과 같다.

$$B_1(z_1) = B_N(z_{l+1}) = 1, \quad B_j(z_1) = 0 \quad (j > 1), \\ B_j(z_{l+1}) = 0 \quad (j < N), \quad B_j(z) = 0 \quad (z \notin [t_j, t_{j+k}]), \\ B_1'(z_1) = -B_2'(z_1) \neq 0, \quad B_j'(z_1) = 0 \quad (j > 2), \quad (4) \\ B_N'(z_{l+1}) = -B_{N-1}'(z_{l+1}) \neq 0,$$

$$B_j(z_{l+1}) = 0, \quad (j < N-1).$$

본 계산에서 3차 B-spline 함수에 대한 매듭 수열은 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$\begin{aligned} z_1 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 \\ z_2 = t_5 \\ \dots \\ z_l = t_N \\ z_{l+1} = t_{N+1} = t_{N+2} = t_{N+3} = t_{N+4} \end{aligned} \quad (5)$$

Fig. 1은 위에서 설명한 3차 B-spline 함수를 도식화한 것으로 식 (3)-(4)를 만족시킨다. 예로  $x$ 가 0과 1에서 함수값이 1인 것을 알 수 있으며 각각의 점에서 미분의 기울기는 같은 절대값에 부호만 다른 것을 알 수 있다.

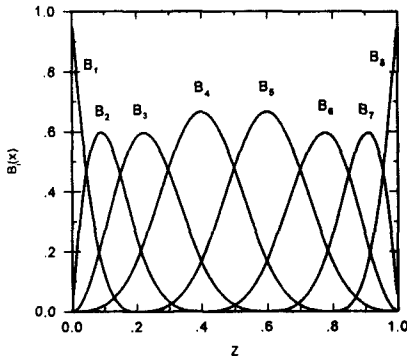


Fig. 1 Regular cubic B-spline basis functions

### 3. 전도 열전달 문제

본 절에서 선형 방정식의 예로 전도 열전달 문제에 스플라인 함수를 적용하여 이산화하였다. 전도 열전달 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{혹은} \quad \nabla^2 T = 0 \quad (6)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$T(x, 0) = T(x, W) = 0, \quad T(0, y) = 0, \quad T(L, y) = 100 \quad (7)$$

식 (6)의 해석해를 Fourier시리즈로 표현하면 다음과 같다.[12]

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x, y) \quad (8)$$

여기서  $C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \sinh(n\pi W/L)}$ ,  $\varphi_n(x, y) = \sin(n\pi x/L) \sinh(n\pi y/L)$  이  $W=10$ 이고  $L=20$ 이다.

지배방정식 (6)과 경계조건 (7)을 무차원화한 지배방정식도 같은 형태를 가지므로 앞으로 무차원화한 식은 기술하지 않기로 한다. 식 (6)의 온도분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} A_i(x) B_j(y) T_{ij} \quad (9)$$

여기서  $A_i$ 와  $B_j$ 는 스플라인 함수이고  $T_{ij}$ 는 각 격자점에서의 미지수이다. 식 (9)를 식 (6)에 대입한 후 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 T] W_i d\Omega = 0 \quad (10)$$

여기서  $W_i$ 는 하중 함수로 3차 B-spline을 사용하였으며 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$T_{ij} (\bar{a}_n^{(2)} \bar{b}_s^{(0)} + \bar{a}_n^{(0)} \bar{b}_s^{(2)}) = 0 \quad (11)$$

여기서

$$\bar{a}_n^{(0)} = \int_0^1 \int_0^1 A_r(x) A_i(y) dx dy$$

$$\bar{a}_n^{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 A_r''(x) A_i(y) dx dy$$

$$\bar{b}_s^{(0)} = \int_0^1 \int_0^1 B_s(x) B_j(y) dx dy$$

$$\bar{b}_s^{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 B_s(x) B_j''(y) dx dy \quad \text{이다.}$$

$r$ 과  $s$ 의 범위는 전체 방정식의 주어진 계산영역의 미지수에서 경계조건에 해당하는 방정식의 수를 제한 미지수의 개수로 범위는 다음과 같다.

$$2 \leq r \leq N_x - 1, \quad 2 \leq s \leq N_y - 1$$

#### 4. 비선형 유동문제

비선형 문제는 두 실린더 사이의 유체 유동 현상에 대해서 생각해 보자. 무차원 운동량방정식과 연속방정식은 다음과 같다.

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (13)$$

여기서  $u_i$  는 속도,  $\tau_{ij}$  는 점성 응력텐서,  $p$  는 압력이다.

식 (12)와 식 (13)을 이산화한 방정식은 특이계가 되므로 이를 위해 Kim등[9]은 인위적인 압축형식을 사용하였다. 본 논문에서는 자세한 내용은 생략하고 결과는 다음과 같다.

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \delta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (15)$$

여기서  $\delta$ 는 아주 작은 수이다.  $\delta \rightarrow 0$ 으로 접근할 때 위의 연속방정식은 정상상태로 된다.

$\delta$ 의 값에 대한 해의 의존도는  $\delta$ 가  $O(10^{-9})$ 의 값에 대하여 연속방정식에서  $O(10^{-8})$ 의 정확도가 있다. 이에 대한 상세한 이론적인 증명은 Zienkiewicz등[6]을 참고한다.

변수  $u_i$  와  $p$  에 대한 보간 함수  $N_u, N_p$ 와  $N_p$ 는 다음과 같다.

$$u \approx N_u, i u_i \quad (16)$$

$$v \approx N_v, i v_i \quad (17)$$

$$p \approx N_p, i p_i \quad (18)$$

식 (16), 식 (17), 식 (18)에서 3차 B-spline 함수를 하중 함수로 사용하였으며 이산화는 앞 절에서와 같은 방법을 사용하였다.

#### 5. 결과 및 토의

본 논문에서 3차 B-spline 함수를 사용한 이산화 방정식의 수렴성과 정확도를 앞에서 설명한 예제에 대해서 고찰하였다. 해의 정확성은 직사각형 전도 열전달 문제에서 온도분포를 식 (6)의 해석해와 비교 분석하였다.

Table 1은 중단점이 등간격인 경우 스플라인 수를 달리하였을 때의 해석해와 계산결과를 나타내었다.  $x=0.5$ 인 경우, 스플라인 수가 10, 14, 20, 30으로 변할 때 오차는 3.769%, 1.295%, 0.508%, 0.182%로 줄어들고 있다. 그러나 스플라인 수가 증가하더라도 해석해에 접근하지 못하고 있다. Table 2는 중단점의 위치를 온도 구배가 크다고 예상되는 경계조건 주위로 중단점의 간격을 조밀하게 한 결과를 나타내었다. 스플라인 수가 10, 14, 20, 30일 때 각각의 경우에 대하여 오차는 2.192%, 0.417%, 0.054%, 0.000%로 소수점 4자리까지 잘 일치하고 있다. Fig. 2는 중단점을 등간격으로 했을 때의 B-spline 함수의 분포를 나타낸 것이고 Fig. 3은 온도 구배가 크다고 생각되는 부분에서 중단점의 크기를 작게 했을 때의 3차 B-spline 함수의 분포를 전체 계산영역 중 일부만 나타내었다. 선형 전도 열전달 문제를 고찰하는 데 있어서 중단점의 위치 변화는 수치해석의 결과에 중요한 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 이는 본 논문에서 사용한

Table 1 Comparison of the numerical solution with equally spaced breakpoints

Number of splines	Position along the center line		
	x=0.25	x=0.5	x=0.75
10	0.01144	0.05704	0.26595
14	0.01109	0.05561	0.26404
20	0.01100	0.05517	0.26212
30	0.01096	0.05499	0.26140
Exact Solution	0.01094	0.05489	0.26094

Table 2 Comparison of the numerical solution with unequally spaced breakpoints

Number of splines	Position along the center line		
	x=0.25	x=0.5	x=0.75
10	0.01123	0.05612	0.26562
14	0.01099	0.05512	0.26190
20	0.01095	0.05492	0.26107
30	0.01094	0.05489	0.26095
Exact Solution	0.01094	0.05489	0.26094

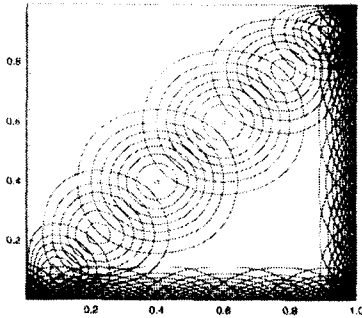


Fig. 2 Equally spaced B-spline functions

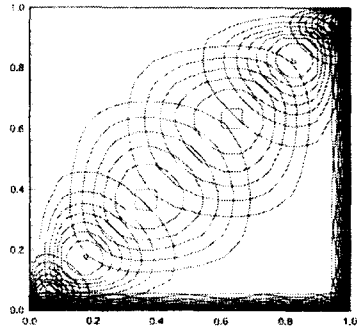


Fig. 3 Unequally spaced B-spline function

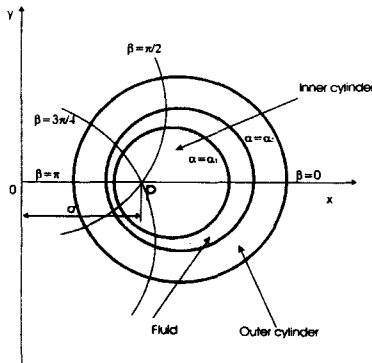
방법은 전체적 기술(global technique)로 격자점 상호간에 많은 영향을 미치기 때문이다. Table 3은 유한체적법과 본 연구 결과를 비교한 것으로 유한체적법은 Stone의 SIP (Strongly Implicit Procedure)을 사용하였다. 행렬 방정식의 해를 구하는 방법으로 Gauss-Seidel 방법이나 ADI (Alternating Direction Implicit) 방법을 시도하였으나 계산하는데 시간이 많이 걸리고 정확도가 떨어져 Table 3에서는 SIP을 사용한 결과만을 기술하

였다. Table 3에서 두 방법을 비교할 때 스플라인의 수와 격자점의 수가 일치하지 않는데 예로 스플라인 수가  $10 \times 10$ 인 경우 실제 격자점의 수는  $7 \times 7$ 로 3차 B-spline을 하중 함수로 사용한 경우는 격자점의 수가 스플라인의 수보다 항상 작게 된다. 스플라인의 수와 격자점의 수가 같다는 가정 하에 격자점이  $10 \times 10$ 인 경우에 3차 B-spline과 유한체적법은 대략 2%정도의 오차를 가지고 있는 것을 알 수 있다. 그러나 3차 B-spline을 사용한 방법은 격자점의 수가  $30 \times 30$ 일 때 해석해에 도달한 반면 유한체적법은 격자점이  $90 \times 90$ 이 되어야 해석해에 도달했다. 즉 본 논문에서 제시한 방법이 유한체적법에 비하여 매우 빠르게 해석해에 수렴하는 것을 알 수 있다. 해의 정확도에 있어서 3차 B-spline 함수를 사용한 방법이 SIP solver를 사용한 유한체적법에 비하여 격자점의 수  $n$ 에 대하여 약  $n^2$ 배 이상 작게 필요한 것을 알 수 있다.

다음으로 비선형 유동문제를 고려해 보자. 식 (14)와 식 (15)에 보간 함수 식 (16)-(18)을 사용한 이산화 방정식에 Gauss-Newton 방법을 적용하였다. Kim[13]은 Conjugate 문제로 발표하였으나 본 연구에서는 고체 영역과 열전달을 고려하지 않고 유체 유동만 고려하였다. 비선형 문제는 외부실린더는 고정되어 있고 내부실린더가 일정속도로 회전하고 있는 형상으로 Fig. 4에서 회전하는 실린더를 포함하는 좌표계와 경계조건을 나타내었다. 그림에서 외부실린더의 반경은 내부실린더의 2배 ( $r_{in}/r_{out} = 0.5$ )이며, 편심을  $\epsilon$ 는  $\epsilon = (r_{out} - r_{in})/r_{out}$ 로 정의한다. 편심이 있는 두 실린더 사이의 유동은 매우 비선형인 문제로 해석해와 비교할 수는 없으므로 이미

Table 3 Comparison of numerical results

Galerkin Method with Cubic B-spline Interpolation			Finite Volume Method with SIP Solver		
No. of splines	$x=0.5$	Error(%)	No. of grid points	$x=0.5$	Error(%)
$10 \times 10$	0.05612	2.192	$10 \times 10$	0.05614	2.227
$20 \times 20$	0.05492	0.054	$20 \times 20$	0.05501	0.218
$30 \times 30$	0.05489	0.000	$30 \times 30$	0.05492	0.055
			$60 \times 60$	0.05490	0.018
			$90 \times 90$	0.05489	0.000



4 Coordinate system

발표된 논문과 비교 검토하였다. 경계조건을 적용한 후의 속도와 압력 변수에 대한 B-spline 함수의 전개식은 다음과 같다.

$$u(x, y) = \sum_{i=2}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-3} u_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (20)$$

$$v(x, y) = v_1 A_1(x) + \sum_{i=2}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-3} v_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (21)$$

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-3} p_{ij} A_i(x) b_j(y) \quad (22)$$

여기서  $v_1$ 는 내부 실린더의 회전속도이며  $A_i(x)$ 는 방사형 방향의 3차 B-spline 함수이고  $b_j(y)$ 는 회전방향의 3차 B-spline 함수이다. 위의 전개식을 무차원 지배방정식에 대입하고 Galerkin 방법을 사용하여 해를 구하였다. Table 4는 중단점이 일정간격일 때 Ballal등[14]과 계산 결과에서 회전방향의 속도를 비교하였다.  $x$ 는 방사선 방향의 무차원 성분이고  $y$ 는 실린더 회전 방향의 무차원 성분으로  $y=0.0$ 인 경우는 두 실린더 사이의 간격이 가장 넓은 부분으로 재순환이 가장 활발하게 일어나는 영역이다.  $x$ 가 0.4와 0.6인 경우 [14]의 결과와 비교해 보면  $N=12$ 일 때 0.342%와 1.131%의 오차를 나타내고 있다. Table 5는 벽면주위의 속도구배가 급격하게 변하는 지역에 보간 함수를 집중한 결과를 나타내었다. 위와 같은  $x$ 의 위치에서  $N=12$ 일 때 0.197%와 0.611%의 오차로, 보간 함수를 벽 주위에 집중시켰을 때 해의 정확도가 크게

향상되는 것을 알 수 있다. 그러나  $N=20$ 인 경우는 해의 정확도는 일정격자인 경우가 비 일정격자인 경우와 별로 차이를 보이지 않고 있다. 이는 격자의 간격이 충분히 작아서 해의 정확도에는 영향을 미치지 않는 것으로 볼 수 있는데  $x$ 의 전 범위에서 0.5%이내에서 [14]의 결과와 일치하는 것으로 알 수 있다. Fig. 5는 Stokes 유동에 대하여 편심비의 값을 변화시켰을 때 실린더 사이의 유선을 보여주고 있다. 재순환 유동은 중심선에 대해 대칭이고 박리와 재부착점은 발표된 논문[15]의 결과와 잘 일치하고 있다. Fig. 6은 해의 수렴횟수를 나타내는 것으로 스플라인의 수와 관계없이, 결과는 5회 이내에서 매우 빠르게 수렴하였으며 오차는 나머지 값으로 첫 번째 계산에서는  $10^5$ 의 오차를 가지고 있으나 5번 반복 후에는  $10^{-7}$ 의 오차로 해가 매우 빠르게 수렴함을 알 수 있다. 또한 유한체적법은 격자점의 수가 많아짐에 따라 수렴성에 문제가 있으나

Table 4 Azimuthal velocity (Stokes flow,  $\epsilon=0.5$ , equally spaced breakpoints)

$x$	(a) Ballal 등	(b) $N=12$	(a)-(b)	(c) $N=20$	(a)-(c)
0.0	29.0000	29.0000	0.0000	29.0000	0.0000
0.2	17.4419	17.4635	-0.0216	17.4465	-0.0046
0.4	8.4619	8.4909	-0.0290	8.4693	-0.0074
0.6	2.2295	2.2550	-0.0255	2.2376	-0.0081
0.8	-0.8420	-0.8288	-0.0132	-0.8361	-0.0059
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 5 Azimuthal velocity (Stokes flow,  $\epsilon=0.5$ , equally spaced breakpoints)

$x$	(a) Ballal 등	(b) $N=12$	(a)-(b)	(c) $N=20$	(a)-(c)
0.0	29.0000	29.0000	0.0000	29.0000	0.0000
0.2	17.4419	17.4545	-0.0126	17.4465	-0.0046
0.4	8.4619	8.4786	-0.0167	8.4695	-0.0076
0.6	2.2295	2.2432	-0.0137	2.2380	-0.0085
0.8	-0.8420	-0.8365	-0.0055	-0.8357	-0.0037
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

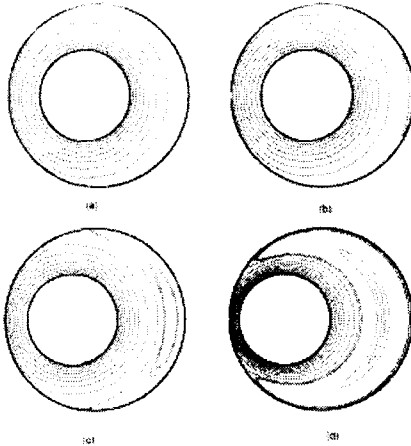


Fig. 5 Stream pattern for Stokes flow  
(a)  $\epsilon=0.3$ ; (b)  $\epsilon=0.35$ ; (c)  $\epsilon=0.5$ ; (d)  $\epsilon=0.8$

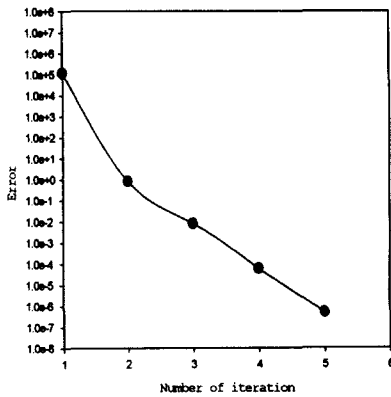


Fig. 6 Convergence of the solution

본 논문에서 제시한 방법은 스플라인 수가 증가하더라도 빠르게 수렴함을 알 수 있다. Fig. 7은 실린더의 직경비가  $r_{in}/r_{out}=0.002$ 으로 편심률  $\epsilon$ 을 변화시킬 때 Dai등[11]과 DiPrima등[16]의 결과와 비교하기 위하여 무차원 힘  $f$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} \quad (23)$$

여기서  $f_x = \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta$  와  $f_y = -\int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta$  이다.

무차원 힘을 비교하는데 있어서 해의 정확도는 압력을 적분한 값이기 때문에 1차의 정확도가 떨어지는 것을 고려해야 한다.

DiPrima등[16]은 섭동법을 이용하였고, Dai등[11]은 압력항을 복잡한 수학적 조작에 의해 제거한 방정식을 사용하였는데, 본 연구에서는 원시변수공식을 그대로 사용하였다. 임계 레이놀즈 수에 가까운 레이놀즈 수  $Re=900$ 에 대하여 편심률  $\epsilon=0.1$ 인 경우 최대오차가 1% 이내이며,  $\epsilon=0.7$ 과  $Re=1100$ 에서는 최대 오차가 약 3.5% 정도를 보이고 있다. 이는 [16]은 편심비가 작다는 가정하의 결과이므로 편심비가 커짐에 따라서 오차가 커짐을 알 수 있다. 즉 DiPrima등[16]은 관성의 항을 무시하였으나 관성항의 중요성을 언급한 Dai등[11]의 결과와 비교해 보면 편심비가 매우 큰  $\epsilon=0.7$ 과  $Re=1100$ 에서 최대오차가 2%이내의 오차가 있었다. 비록 [16]의 결과는 편심률과 레이놀즈 수가 작다고 가정하였으나 편심비  $\epsilon$ 이 0.7에서조차 만족할 만한 결과를 가질 수 있다.

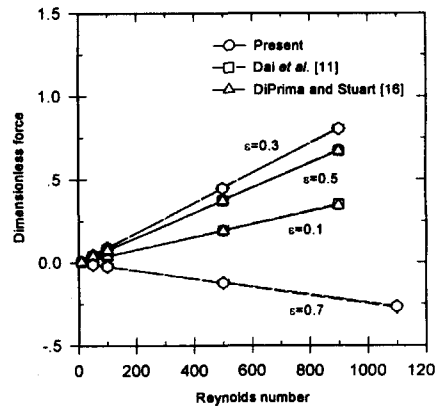


Fig 7 Comparison of numerical solution at different eccentricity ratios

## 6. 결론

본 논문에서는 3차 B-spline 함수를 사용하여 선형 및 비선형 문제를 고찰하였으며 결론은 다음과 같다.

선형 문제에서 중단점을 등간격으로 하였을 때 변수의 구배가 크게 변하는 부분에 중단점을 조밀하게 두어 가중치를 두었다. 이로 인해 결과는 크게 향상되었다. 이는 본 논문에서 사

용한 방법이 전체적 기술(global technique)로 격자점의 상호간에 많은 영향을 미치기 때문이다. 유한체적법에 비하여는 격자점의 수  $n$ 에 대하여 약  $n^2$ 배 이상 작게 필요한 것을 알 수 있다. 또한 계산 격자가 많아짐으로 수렴에 문제가 발생하는 유한체적법과는 달리 전 영역을 통해서 해가 매우 빠르게 수렴하고 있다.

비선형 Stokes의 유동에 대하여 Ballal등의 논문과 비교했을 때  $N=20$ 에서는 매우 정확한 해를 구하였으며 또한 유동의 재순환이 일어나는 영역에서 분리점과 재부착점도 잘 일치하고 있다.  $r_{out}/r_{in}=0.0002$ 는 저널 베어링의 형상으로 무차원 힘을 비교하는데 있어서 편심비가 큰 경우에도 잘 일치하고 있다.

### 참고문헌

- [1] M. H., Schultz, Spline Analysis, Prentice Hall, 1973.
- [2] R. L. Panton and H. B. Sallee, "Spline Function Representations for Computer Solutions to Fluid Problems, Computer and Fluids", Vol. 3, pp. 257-269, 1975.
- [3] R. D. Russel and L. F. Shampine, "A Collocation Method for Boundary Value Problems", Numeische Mathematic, Vol. 19, pp. 1-28, 1972.
- [4] G. Birkhoff, Piecewise Bicubic Interpolation and Approximation in Polygons, Academic Press, 1969.
- [5] E. Kim, "A Mixed Galerkin Method for Computing the Flow between Eccentric Rotating Cylinders", Int. J. Nume. Meth. Fluids, Vol. 26, pp. 877-885, 1998.
- [6] S. V. Patankar and D. B. Spalding, "A Computer Model for Three Dimensional Flows in Furnaces", Fourteenth Symposium on Computation, The Combustion Institute, Pittsburgh, 1973.
- [7] O. C. Zienkiewicz and J. Wu, "Incompressibility without Tears-how to Avoid Restrictions of Mixed Formulation", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 32, pp. 1189-1203, 1991.
- [8] I. Babuska, "Error Bounds for Finite Element Method", Numer. Math., Vol. 16, pp. 322-333, 1971.
- [9] E. Kim and A. Z. Szeri, "On the Combined Effects of Lubricant Inertia and Viscous Dissipation in Long Bearing", ASME J. Tribology, Vol. 119, pp. 76-84, 1997.
- [10] C. deBoor, A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, 1978.
- [11] R. X. Dai, Q. Dong and A. Z. Szeri. "Flow of Variable Viscosity Fluid between Eccentric Rotating Cylinders", Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 27, pp. 367-389, 1992.
- [12] N. N. Ozisik, Conduction Heat Transfer, John Wiley & Sons, 1980.
- [13] E. Kim, "The Influence of Reynolds Number and Heat Transfer in Fluid Film Lubrication", Mech. Res. Comm., Vol. 23, pp. 441-448, 1996.
- [14] B. Ballal and P. S. Rivlin, "Flow of a Newtonian Fluid between Eccentric Rotating Cylinders", Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 62, pp. 237-294, 1972.
- [15] K. T. Obrien, C. D. Jones and F. R. Mobbs, "Separation and Cavitation in Superlaminar Flow between Eccentric Rotating Cylinders," Leeds-Lyon Symposium on Tribology", pp. 69-72, 1974.
- [16] R. C. DiPrima and J. T. Stuart, "Flow between Eccentric Rotating Cylinders", J. Lub. Tech., Trans. ASME, Vol. 94, pp. 266-274, 1972.