

論文98-35S-10-10

개선된 선형 샘플치 출력 조절기

(An Improved Linear Sampled-data Output Regulator)

鄭 善 太 *

(Sun-Tae Chung)

요 약

선형 시스템의 출력 조절 문제에 있어서, 출력 조절가능성은 일반적으로 보존되지 않는다. 따라서, 연속시간 선형시스템에 대해 설계된 아날로그 조절기를 샘플링하여 구현한 디지털 출력조절기는, 샘플링 시간에 대해 1차 근사적인 근사 샘플치 조절기에 불과하다. 그런데, 주어진 시스템의 내재적 구조를 잘 이용하면, 샘플링 시간에 대해 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하다. 본 논문은 샘플링 시간에 대해 더 개선된 근사 샘플치 출력 조절기를 설계하기 위한 시스템의 구조를 연구하였다.

Abstract

In general, the solvability of linear robust output regulation problem are not preserved under time-sampling. Thus, it is found that the digital regulator implemented by time-sampling of analog output regulator designed based on the continuous-time linear system model is nothing but a 1st order approximation with respect to time-sampling. However, one can design an improved sampled-data regulator with respect to sampling time by utilizing the intrinsic structure of the system. In this paper, we study the system structures for which it is possible to design an improved sampled-data regulator with respect to sampling time.

I. 서 론

전체 폐루프 시스템을 안정화하면서, 외란을 제거하고 출력이 외부 기준입력을 추종하도록 하는 '출력 조절(output regulation)'의 문제는 가장 기본적인 제어의 문제의 하나로 선형 시스템 뿐만아니라 비선형 시스템에 대해서도 많은 연구가 진행되어 있다^[1,2,5,6,7]. 그런데, 주어진 연속시간 시스템에 대해 출력 조절을 달성하는 출력 조절기(output regulator)를 실제로 구현하게 될 때 설계된 연속시간 출력 조절기는 그 제어기 구조의 복잡성으로 인한 구현의 어려움 또는 경제

성 등의 여러가지 이유로 디지털 구현을 고려하게 된다. 따라서, 연속시간 시스템을 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템에 대해 직접 디지털 조절기를 설계할 필요가 존재한다. [8]에서는 단일 입출력 선형 시스템의 경우에는 출력 조절 설계 가능성이 샘플링에 대해 보존되지만, 일반적으로는 출력 조절기의 설계 가능성이 샘플링에 대해 보존되지 않음을 보였다. 즉, 연속시간 선형 시스템에 출력 조절기 설계가 가능하더라도, 연속시간 시스템을 이산화한 샘플치 선형 시스템에 대해서는 출력 조절기 설계가 가능하지 않을 수도 있다. 이 경우, 연속시간 시스템에 대해 설계된 아날로그 조절기를 디지털 구현하는 경우, 이는 샘플링 시간 간격 T 에 대해, 1차 근사적인 근사 샘플치 조절기에 불과하다. 따라서, 연속시간 시스템에 대해 설계된 아날로그 조절기를 디지털 구현하여 얻어진 샘플

* 正會員, 崇實大學校 情報通信電子工學部

(School of Electronic Engineering, Soongsil University)

接受日字: 1998年7月8日, 수정완료일: 1998年9月30日

치 조절기보다 샘플링 시간 간격 T 에 대해 개선된 근사 샘플치 조절기 설계 가능성에 대한 연구의 필요성이 존재한다. 본 논문에서는 이에 따라, 복수 입출력 선형 시스템에 대해 어떤 구조적 특성을 갖게 되면, 샘플링 시간 간격 T 에 대해 개선된 근사 샘플치 조절기 설계가 가능할 것인지에 대해 연구하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 선형 시스템의 출력 조절의 문제와 그 해, 그리고 아날로그 출력 조절기의 디지털 구현에 대해 설명하며, 제3절에서는 샘플링 시간에 대해 근사적인 샘플치 출력 조절기를 설계하는 문제에 필요한 기본사항을 기술한다. 제4절에서는 개선된 근사출력 조절기 설계에 대한 본 논문의 주요한 결과가 기술되며, 마지막으로 제 5절에 결론이 주어진다.

II. 선형 시스템의 출력 조절과 디지털 구현

출력 조절(output regulation)의 목적은 전체 폐루프시스템이 안정을 유지하면서 궁극적으로 외란을 제거하고 출력이 기준신호를 추종하도록 하는 ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$) 제어기(regulator)를 설계하는 것이다. 먼저 출력 조절을 위해 본 논문에서 고려한 선형 시스템은 다음과 같다.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw & (1a) \\ \dot{w} = Sw & (1b) \\ e = Cx + Qw & (1c) \end{cases}$$

여기에서 각 식의 의미는 다음과 같다. 첫번째 식은 상태 $x \in R^n$, 입력 $u \in R^m$ 을 가지며, Pw ($w \in R^s$) 로 나타나는 외란의 영향을 받는 플랜트를 기술한다. 세번째 식은 실제 플랜트 출력 Cx 와 실제 플랜트 출력이 추종하여야 할 기준 입력 Qw 사이의 에러 $e \in R^p$ 을 나타내며, 두 번째 식은 외부시스템(exosystem)으로써, 외란과 (또는) 기준 신호의 동력학 시스템을 모델화한 것이다. A, B, P, S, C, Q 는 각각 적절한 차원을 갖는 상수 행렬들이다.

이 때, 만약 $\dot{x} = Ax$ 가 안정이면, 시스템 Σ 는 '내재적으로 안정하다(internally stable)'고 한다. 또, 만약 임의의 초기 상태들 $x(0), w(0)$ 과 입력 $u=0$ 에

대해, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 이면, 시스템 Σ 는 '출력 조절됨(output regulated)'을 만족한다고 한다. 시스템 Σ 가 '내재적으로 안정' 하고 '출력조절됨'을 만족하면, 이는 이미 시스템 Σ 가 안정되어 있고 궁극적으로 외란을 제거하고 출력이 기준입력을 추종하므로 따로 제어를 설계하지 않아도(즉, $u=0$) 출력조절의 목적을 달성한다. 그런데, 만약 시스템 Σ 가 내재적으로 안정하지 않고, 출력 조절됨도 만족하지 않을 때, 우리는 다음의 보상기 Γ 를 추가하여 이 출력 조절의 목적을 만족하도록 시도할 수 있다.

$$\Gamma : \begin{cases} \dot{z} = Fz + Ge \\ u = Hz \end{cases} \quad (2)$$

이때, 얻어지는 폐루프 시스템은 다음의 시스템 Σ_c 와 같다.

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x} = Ax + BHz + Pw \\ \dot{z} = Fz + GCx + GQw \\ \dot{w} = Sw \\ e = Cx + Qw \end{cases}$$

이때 $w=0$ 인 폐루프 시스템 Σ_c 가 '내재적으로 안정'하고 (즉, $\dot{x} = Ax + BHz$, $\dot{z} = Fz + GCx$ 인 시스템이 안정), '출력조절됨'(즉, 임의의 초기상태 $x(0), z(0), w(0)$ 에 대해 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 을 만족)일 때, 우리는 보상기 Γ 을 '조절기(regulator)'라 하고, 이러한 조절기를 찾는 문제를 '출력조절 문제'라 한다. 또한, 출력조절 문제를 풀수 있을 때, 시스템 Σ 는 '출력 조절가능(output regulatable)'이라고 한다.

이제, 출력 조절가능의 해의 존재 조건에 대해 정리 기술한다^[5].

정리 2.1 [5]: 시스템 Σ 에서 (A, B) 가 '안정화 가능(stabilizable)'하고 Σ 가 '검출가능(detectable)'하다고 하자. 그러면 다음의 방정식 (3)이 해 (Π, V) 를 가지면 시스템 Σ 는 '출력 조절가능'하다.

$$A\Pi + BV + P = \Pi S \quad (3a)$$

$$C\Pi + Q = 0 \quad (3b)$$

만약 S 가 불안정하면(즉, 모든 고유치가 폐우평면에 존재), 방정식 (3)의 해 존재는 또한

시스템 Σ 가 '출력 조절가능' 하기 위한 필요조건이 된다.

(위 정리 2.1에서, Σ 가 '검출가능' 이라는 것은 $((C, Q), \begin{pmatrix} A, P \\ 0, S \end{pmatrix})$ 가 검출가능하다는 것을 말한다.)

정리 2.1의 증명은 [5]를 참조하라. 또, 선형 이산 시스템과 선형 샘플치 시스템에 대해서도

정리 2.1 과 똑같은 정리가 성립함을 쉽게 보일 수 있다.^[8].

연속시간에 대해 설계된 출력조절기 (2)를 이산화하여 얻어진 샘플치 출력 조절기는 다음과 같다.

$$\Gamma(T): \begin{cases} z_{k+1} = F(T)z_k + G(T)e_k \\ u_k = Hz_k \end{cases} \quad (4)$$

(여기서, $F(T) = e^{TF}$, $G(T) = \int_0^T e^{A\tau} G d\tau$)

이 경우, 샘플치 출력 조절기 (4)는 샘플링 시간 T 에 대해, 1차 선형근사 출력조절기에 불과함을 알 수 있다. 즉, 원래의 연속 시간 시스템 Σ 에 기반하여 설계된 연속시간 출력 조절기 Γ 를 이산화하여 얻은 선형 샘플치 출력 조절기는 단지 샘플링 시간에 대해 1차 근사화에 불과하다는 것을 어렵지 않게 알 수 있다.

III. 근사 샘플치 선형 출력 조절기

원래의 연속 시간 시스템 Σ 에 기반하여 설계된 연속시간 출력 조절기 Γ 를 이산화하여 얻은 선형 샘플치 출력 조절기는 단지 샘플링 시간에 대해 1차 근사화에 불과하다. 그러면, 샘플링 시간에 대해 개선된 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해서는 시스템은 어떤 구조적 특성을 만족해야 할까? 먼저 추후의 논의 전개를 위해, 필요한 표기, 개념 및 정의를 기술한다.

선형 시스템 Σ 를 이산화 하여 얻어진 샘플치 시스템을 $\Sigma(T)$ 라 하자.

$$\Sigma(T): \begin{cases} x_{k+1} = A(T)x_k + B(T)u_k + P(T)w_k \\ w_{k+1} = S(T)w_k \\ e_k = Cx_k + Qw_k \end{cases} \quad (5)$$

(T : 샘플링 시간 간격, $x_k := x(kT)$, $A(T) := e^{TA}$, $S(T) := e^{TS}$,

$$B(T) := \int_0^T e^{A\tau} B d\tau, P(T) := \int_0^T e^{(T-\tau)A} P e^{\tau S} d\tau)$$

여기서, 선형 샘플치 시스템에서의 '출력 조절가능'은 어떤 양의 실수 T^* 가 존재하여, $0 < T < T^*$ 인 모든 샘플링 시간 간격 T 의 이산시스템 $\Sigma(T)$ 가 '출력 조절가능'을 만족할 때를 의미한다. 따라서, 출력 조절가능의 경우, $T \in (0, T^*)$ 인 T 에 대해 다음의 식 (6)이 해 $\Pi(T), V(T)$ 를 갖는 것이 필요 충분조건이 된다.

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) \quad (6a)$$

$$C\Pi(T) + Q = 0 \quad (6b)$$

식 (6) 이 만족되면, 샘플치 선형 시스템 (5)에 대해 정확한 출력 조절을 달성하는 디지털 출력 조절기 설계가 가능하다. [7]에는 단일 입출력 시스템에서는 출력 조절가능성이 보존되나, 일반적으로 선형 시스템의 '출력 조절가능성'은 샘플링에 대해 보존되지 않음이 보여졌다. [7]에는 또한, 'right invertible'하고 시스템의 전송영점(transmission zeros) 이 외부 시스템의 극점과 일치하지 않는 시스템은 완전한 샘플치 출력 조절기 설계가 가능함을 보여 주었다. 그 외의 일반적인 시스템에서는 어떤지, 이제, (6)의 다음의 근사적 해 (7)에 대해 고려하자.

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) + \alpha(T^{n+1}) \quad (n \geq 1) \quad (7a)$$

$$C\Pi(T) + Q = 0 \quad (7b)$$

(여기서, $\alpha(T^{n+1})$ 은 다음을 만족하는 T 의 함수들을 가리킨다. $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\alpha(T^{n+1})}{T^n} = 0$)

(7)의 관심은 물론, 정확한 출력 조절기 설계와 마찬가지로 다음과 같이 샘플링 시간 T 에 대해 n 차 근사 출력 조절기를 설계하는 데 있다. (7)이 성립하는 경우, 시스템 $\Sigma(T)$ 는 ' n 차 근사 출력 조절 가능'임을 다음의 논의를 통해 알 수 있다.

선형 샘플치 시스템의 출력 조절기 (4) $\Gamma(T)$ 의 $F(T), G(T), H(T)$ 를 다음과 같이 결정하자.

- 1) $\begin{pmatrix} A(T), P(T) \\ 0, S(T) \end{pmatrix} - G(T)(C, Q)$ 가 안정인 행렬 $G(T)$ 를 구한다.
- 2) $A(T) + B(T)H_1(T)$ 가 안정인 행렬 $H_1(T)$ 를 구한다.
- 3) 식 (7)를 만족하는 $\Pi(T), V(T)$ 에 대해, $H_2(T) := -H_1(T)\Pi(T) + V(T)$,

$H(T) := [H_1(T) \ H_2(T)]$ 라 정의한다.

$$4) F(T) := \begin{pmatrix} A(T) & P(T) \\ 0 & S(T) \end{pmatrix} - G(T)(C, Q) + \begin{pmatrix} B(T) \\ 0 \end{pmatrix} H(T)$$

이제, 이렇게 구해진 출력조절기 $\Pi(T)$ 가 'n차 근사 출력조절'을 이룸을 다음의 논의로 부터 알 수 있다.

출력 조절기 $\Pi(T)$ 를 사용한 후, 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\Sigma_c(T) : \begin{cases} x_{k+1}^e = A_c(T)x_k^e + P_c(T)w_k \\ w_{k+1} = S(T)w_k \\ e_k = C_c x_k^e + Qw_k \end{cases}$$

$$(x^e := \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad A_c(T) := \begin{pmatrix} A(T) & B(T)H(T) \\ G(T)C & F(T) \end{pmatrix},$$

$$P_c(T) := \begin{pmatrix} P(T) \\ G(T)Q \end{pmatrix}, \quad C_c := (C, 0))$$

먼저, $A_c(T)$ 는 안정함을 다음의 논의로 부터 알 수 있다.

$G(T) := \begin{pmatrix} G_1(T) \\ G_2(T) \end{pmatrix}$ 라 하면, $\lambda I - A_c(T)$ 는 다음과 같이 3개의 행 부분들 (row blocks)과 열 부분들 (column blocks) 를 가진 행렬로 표현된다.

$$\lambda I - A_c(T) = \begin{pmatrix} \lambda I - A(T) & & -B(T)H_1(T) & -B(T)H_2(T) \\ -G_1(T)C & \lambda I - A(T) + G_1(T)C - B(T)H_1(T) & -P(T) + G_1(T)Q - B(T)H_2(T) & \\ -G_2(T)C & G_2(T)C & \lambda I - S(T) + G_2(T)Q & \end{pmatrix}$$

이때, 첫 번째 행 부분(row block)에 -1 를 곱한 후, 이를 두 번째 행 부분에 더한 다음, 다시 두 번째 열 부분(column block)을 첫 번째 열 부분에 더하면, 결과되는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A(T) - B(T)H_1(T) & & -B(T)H_2(T) \\ 0 & \lambda I - A(T) + G_1(T)C & -P(T) + G_1(T)Q \\ 0 & G_2(T)C & \lambda I - S(T) + G_2(T)Q \end{pmatrix}$$

따라서,

$$\det(\lambda I - A_c(T)) = \det \begin{pmatrix} \lambda I - (A(T) + B(T)H_1(T)) & & B(T)H(T) \\ 0 & \lambda I - \begin{pmatrix} A(T) & P(T) \\ 0 & S(T) \end{pmatrix} + G(T)(C, Q) \end{pmatrix}$$

$$A(T) + B(T)H_1(T) \quad \text{과} \quad \begin{pmatrix} A(T) & P(T) \\ 0 & S(T) \end{pmatrix} - G(T)(C, Q)$$

이 각각 안정하므로, $A_c(T)$ 도 안정함을 알 수 있다.

다음, $U(T) := \begin{pmatrix} \Pi(T) \\ I \end{pmatrix}$, $\Pi_c(T) := \begin{pmatrix} \Pi(T) \\ U(T) \end{pmatrix}$ 라 하면, $H(T)U(T) = V(T)$ 임에 유의하여 다음을 보일 수 있다.

$$A_c(T)\Pi_c(T) + P_c(T) = \Pi_c(T)S(T) + \alpha T^{n+1} \quad (8a)$$

$$C_c\Pi_c(T) + Q = 0 \quad (8b)$$

식 (8a)가 성립하면, $u=0$ 에서,

$$x_{k+1}^e - \Pi_c(T)w_{k+1} = A_c(T)(x_k^e - \Pi_c(T)w_k) + \alpha T^{n+1}$$

가 성립한다. $A_c(T)$ 가 안정하므로, $k \rightarrow \infty$ 에 따라, $x_k^e - \Pi_c(T)w_k \cong \alpha T^{n+1}$ 가 성립한다. 또한 (8b)가 성립하므로,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (C_c x_k^e + Qw_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (C_c(x_k^e - \Pi_c(T)w_k) + (C_c\Pi_c(T) + Q)w_k) = \alpha T^{n+1}$$

이 때, αT^{n+1} 는 x_k, z_k, w_k 의 함수인 데, 이 가운데, x_k, z_k 는 안정하게 설계되었으므로, 따라서, w_k 가 유한하면, 충분히 작은 샘플링 시간 T 에 대해, $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k \cong 0$ 가 성립한다(T 에 대해 n 차 근사로). 따라서, 식(7)를 만족하면, 폐루프 시스템 $\Sigma_c(T)$ 는 n 차 근사 출력 조절됨을 알 수 있다. 즉, 시스템 $\Sigma(T)$ 는 ' n 차 근사 출력 조절가능'이다.

이상의 논의를 바탕으로 다음의 정의를 기술한다.

정의 3.1: 시스템 Σ 는, 어떤 양의 실수 T^* 가 존재하여, 모든 $T \in (0, T^*)$ 에 대해 Σ 을 이산화하여 얻어진 선형 이산 시스템 $\Sigma(T)$ 에 대해, 다음의 가정 1), 2), 3)를 만족하고, 행렬방정식 (9)를 만족하는 해 $\Pi(T), V(T)$ 가 존재하면, ' n 차 근사 샘플치 출력 조절 가능' 이라 한다.

가정 1) $(A(T), B(T))$ 가 안정가능

가정 2) $\Sigma(T)$ 가 집합가능

가정 3) S 의 고유치가 모두 허수축상에 존재하며 이 고유치는 S 의 최소 다항식 (minimal polynomial)의 중근이 아닌(distinct) 근이다.

행렬방정식 (9)

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) + \alpha T^{n+1} \quad (n \geq 1) \quad (9a)$$

$$C\Pi(T) + Q = 0 \quad (9b)$$

$\{\lambda(S(T))\} = \{e^{\lambda(S)T}\}$ ($\{\lambda(A)\}$ 는 행렬 A 의 고유치의 집합을 의미) 이므로, 정의 3.1의 가정 3)은 $S(T)$ 의 고유치가 모두 단위원상에 존재하며 이 고유치는 $S(T)$ 의 최소 다항식 (minimal polynomial)의 중근이 아닌(distinct) 근임을 의미하며, 이는 $w_{k+1} = S(T)w_k$ 가 리아푸노프 안정임을 보장하므로^[3], w_k 가 유한함이 보장된다.

다음의 정리는 시스템 Σ 에 n 차 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해서는 원래 연속시간 시스템에 출력 조절기 설계가 가능해야 함을 의미한다.

정리 3.2 : 시스템 Σ 가 ' n 차 근사 샘플치 출력 조절가능'이면, 시스템 Σ 는 '출력조절가능'이다.

(증명) 안정화가능성, 검출가능성, 반안정성 등은 샘플링에 대해 보존되므로, $(A(T), B(T))$ 가 안정가능, $\Sigma(T)$ 가 검출가능하면, (A, B) '안정화가능', Σ 가 '검출가능'함을 쉽게 보일 수 있다.

또 $\Sigma(T)$ 가 ' n 차 근사 샘플치 출력 조절가능'이면 정의 3.1에 따라, 식 (9)를 만족하는, $T=0$ 에서 해석적인 해 $\Pi(T)$ 와 $V(T)$ 가 각각 존재한다.

$\Pi(T)$ 와 $V(T)$ 는 $T=0$ 에 대해 해석적이므로 각각 T 에 대해 Taylor 급수 전개를 하여 다음과 같이 표기하자.

$$\Pi(T) = \Pi_0 + T\Pi_1 + \frac{1}{2!} T^2\Pi_2 + \dots \quad (10a)$$

$$V(T) = V_0 + TV_1 + \frac{1}{2!} T^2V_2 + \dots \quad (10b)$$

또, $A(T), B(T), S(T), P(T)$ 를 각각 T 에 대해 Taylor급수 전개를 하여 다음과 같이 표기하자.

$$A(T) = I + TA + \frac{1}{2} T^2A^2 + \frac{1}{6} T^3A^3 + \dots \quad (11a)$$

$$B(T) = TB + \frac{1}{2} T^2AB + \frac{1}{6} T^3A^2B + \dots \quad (11b)$$

$$S(T) = I + TS + \frac{1}{2} T^2S^2 + \frac{1}{6} T^3S^3 + \dots \quad (11c)$$

$$P(T) = TP + \frac{1}{2} T^2(AP + PS) + \frac{1}{6} T^3(A^2P + APS + PS^2) + \dots \quad (11d)$$

$$F(T) = I + TF + \frac{1}{2} T^2F^2 + \frac{1}{6} T^3F^3 + \dots \quad (11e)$$

$$G(T) = TG + \frac{1}{2} T^2FG + \frac{1}{6} T^3F^2G + \dots \quad (11f)$$

이제, (10)과 (11)을 각각, (9)에 대입하자. ' n 차 근사 샘플치 출력 조절가능' ($n \geq 1$)이므로, 적어도 T 에 대한 1차까지의 계수에 대한 양변은 같아야한다. 따라서, (9a)에서 T 에 대한 1차계수를 비교하고, (9b)에 대입하여 T 에 대한 상수계수를 비교하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} A\Pi_0 + BV_0 + P &= \Pi_0 S \\ C\Pi_0 + Q &= 0 \end{aligned}$$

따라서, 정리 2.1에 의해 시스템 Σ 는 출력 조절가능이다.

IV. 개선된 선형 시스템 출력 조절기

제 3절에서는, 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위하여서는 원래의 연속시간 선형 시스템에 정확한 선형 출력 조절기 설계가 가능해야 함이 보여졌다. 이 절에서는 샘플링시간에 대해 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하게 하기 위하여, 원래의 연속시간 선형 시스템이 추가적으로 가져야 할 구조적 특징을 조사하고, 이 구조를 특성화하는 조건을 구한다.

만약, 시스템 Σ 가 ' n 차 근사 샘플치 출력조절가능'이라고 하자. 이 경우, 필요충분조건은 정의 3.1에 따라, 식(9)를 만족하는 $\Pi(T), V(T)$ 가 각각 존재하는 것이다. $A(T), B(T), S(T), P(T), \Pi(T), V(T)$ 를 각각 T 에 대해 Taylor급수 전개를 한 결과 (10)과 (11)를 각각 식 (9)에 대입하고 T 에 대한 계수들을 비교하여 정리하면, 다음의 관계식들을 얻는다.

T^1 의 계수비교로,

$$\begin{aligned} A\Pi_0 + BV_0 + P &= \Pi_0 S \\ C\Pi_0 + Q &= 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$T^2: \begin{aligned} A\Pi_1 + B(V_1 - \frac{1}{2} V_0 S) &= \Pi_1 S \\ C\Pi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (12b)$$

T^3 :

$$\begin{aligned} A\Pi_2 + B(V_2 - V_1 S + \frac{1}{6} V_0 S^2) + \frac{1}{6} ABV_0 S &= \Pi_2 S \\ C\Pi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12c)$$

T^4 :

$$\begin{aligned} A\Pi_3 + B(V_3 - \frac{3}{2} V_2 S + \frac{1}{2} V_1 S^2) + \frac{1}{2} AB(V_1 S + \frac{1}{2} V_0 S^2) &= \Pi_3 S \\ C\Pi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12d)$$

∴ ∴

이 때, 정의 3.1에 따라, '2차(3차) 근사 샘플치 출력 조절가능'이라면, $T^2 (T^3)$ 에 대한 계수의 양변이 같아야 한다.

(12b)는 항상 해가 존재함을 쉽게 알 수있다. 즉, $\Pi_1=0, V_1 = \frac{1}{2} V_0 S$ 은 식 (12b)를 만족한다. 따라서, 샘플링 시간 T 에 대해 2차 근사화된 샘플치 출력 조절기는 항상 설계가능하다.

3차 이상 근사 출력조절기 설계가 가능하기 위해서는 식 (12c)를 만족하는 해 Π_2 와 V_2 가 존재하면 된다. 그런데, 식 (12c)는 다음 식 (12c')과 같이 쓸 수 있다.

$$A(\Pi_2 + \frac{1}{6} BV_0S) + B(V_2 - V_1S + \frac{1}{3} V_0S^2) = (\Pi_2 + \frac{1}{6} BV_0S)S$$

$$C(\Pi_2 + \frac{1}{6} BV_0S) - \frac{1}{6} CBV_0S = 0 \tag{12c'}$$

식 (12c')는 다음의 식 (13)으로 정리된다.

$$A\Pi - \Pi S = -BV \tag{13}$$

$$C\Pi = \frac{1}{6} CBV_0S$$

$$(\Pi := \frac{1}{6} BV_0S + \Pi_2, \quad V := V_2 - V_1S + \frac{1}{6} V_0S^2 + \frac{1}{6} V_0S^2)$$

따라서, 식 (13)의 해 Π, V 가 존재하면, 원래의 해 Π_2, V_2 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Pi_2 = \Pi - \frac{1}{6} BV_0S, \quad V_2 = V + V_1S - \frac{1}{3} V_0S^2$$

이상의 논의를 정리하면 다음과 같다.

정리 4.1 : 시스템 Σ 가 '출력 조절 가능'이며, 정의 3.1의 가정 3)을 만족한다고 하자.

이 경우, 시스템 Σ 는 항상 '2차 근사 샘플치 출력 조절가능'이며, 또한, 시스템 Σ 가 '3차 근사 샘플치 출력 조절 가능'일 필요충분조건은 다음과 같다.

다음의 행렬방정식 (14)을 만족하는 V_0 에 대해, 행렬방정식 (15)을 만족하는 해 Π, V 가 존재한다.

$$A\Pi_0 + BV_0 + P = \Pi_0S \tag{14a}$$

$$C\Pi_0 + Q = 0 \tag{14b}$$

$$A\Pi - \Pi S = BV \tag{15a}$$

$$C\Pi = \frac{1}{6} CBV_0S \tag{15b}$$

정리 4.1의 식(15)는 언제 해가 존재할까? 아직 필요충분조건은 밝혀지지 않았지만, 판별하기 쉬운 충분조건의 하나는 다음과 같다.

보조정리 4.2 : 시스템 Σ 가 '출력 조절 가능'일 때, 다음의 조건을 만족하면, 시스템 Σ 는 '4차 근사 샘플치 출력 조절 가능'이다.

$$CBV_0S = 0$$

(여기서, V_0 는 $A\Pi_0 + BV_0 + P = \Pi_0S, C\Pi_0 + Q = 0$ 을 만족하는 해이다.)

(증명) $CBV_0S = 0$ 이면, 식 (15)를 만족하는 해 Π, V 가 존재한다.

즉, $\Pi = 0, V = 0$ 따라서, $\Pi_2 = -\frac{1}{6} BV_0S,$

$$V_2 = V_1S - \frac{1}{3} V_0S^2$$

따라서, $CBV_0S = 0$ 이면, 시스템 Σ 는 '3차 근사 샘플치 출력 조절 가능'이다.

또한, (12d) 는 다음과 같이 정리된다.

$$A(\Pi_3 + \frac{1}{2} BV_1S + \frac{1}{4} BV_0S^2) + B(V_3 - \frac{3}{2} V_2S + V_1S^2 + \frac{1}{4} V_0S^3)$$

$$= (\Pi_3 + \frac{1}{2} BV_1S + \frac{1}{4} BV_0S^2)S$$

$$C(\Pi_3 + \frac{1}{2} BV_1S + \frac{1}{4} BV_0S^2) = C(\frac{1}{2} BV_1S + \frac{1}{4} BV_0S^2) \tag{16}$$

$$\Pi := \Pi_3 + \frac{1}{2} BV_1S + \frac{1}{4} BV_0S^2,$$

$$V := V_3 - \frac{3}{2} V_2S + V_1S^2 + \frac{1}{4} V_0S^3 \text{ 이라 하면,}$$

식 (16)은 다시 다음과 같이 표현된다.

$$A\Pi - \Pi S = BV \tag{17}$$

$$C\Pi = C(\frac{1}{2} BV_1S + \frac{1}{4} BV_0S^2)$$

(12b)의 해, $\Pi_1 = 0, V_1 = \frac{1}{2} V_0S$ 를 취하면, 식 (17)은 다음의 식 (18)로 표현되며,

$$A\Pi - \Pi S = BV \tag{18}$$

$$C\Pi = \frac{1}{2} CBV_0S^2$$

식 (18)은, $CBV_0S = 0$ 일 때, 역시 해 $\Pi = 0, V = 0$ 가 존재하며, 이 때,

$$\Pi_3 = -\frac{1}{2} BV_1S - \frac{1}{4} BV_0S^2, \quad V_3 = \frac{3}{2} V_2S - V_1S^2 - \frac{1}{4} V_0S^3.$$

따라서, $CBV_0S = 0$ 이면, 샘플링 시간 T 에 대해 4차 근사화된 샘플치 출력조절기 설계도 항상 가능함을 알 수 있다.

$CBV_0S = 0$ 의 조건은, 우선 $CB = 0$ 이면 만족한다. $CB = 0$ 의 조건은 MIMO 시스템의 상대차수 (relative degree)와 연관이 있다. 이는 strictly proper 시스템의 경우(입력이 출력에 즉시 나타날 수 없는 시스템), 어떠한 입력으로부터의 어떠한 출력으로의 영향이 나타나는 데는, 출력이 2번이상 미분되는 경우에만 나타난다는 의미이다. 이는 이산 시스템의 경우, 입력이 출력으로 나타나는 데에는 $2T$ 이상의 지

연후에야 나타날 수 있다는 것을 말한다. 따라서, 이러한 시스템($CB=0$ 을 만족하는 시스템)에 대해서는 언제나 4차 근사 샘플치 출력기 설계가 가능하다.

샘플링 시간 T 에 대해 5차이상의 근사 샘플치 출력 조절기 설계의 조건은 마찬가지로 정의 3.1의 식 (9)를 샘플링 시간 T 에 대해 계속 전개하여, T^6 의 계수를 비교하여, 만족해야할 행렬방정식을 구할 수 있다. 그러나, 실제적으로는 T 에 대해 4차 정도의 근사 샘플치 출력 조절기의 설계만으로도 충분하다고 본다.

다음의 예는 정리 4.1에서 보여준 바대로, 시스템 Σ 가 출력 조절 가능한 경우, 아날로그 출력조절기를 샘플링하여 얻어진 샘플치 출력조절기보다 개선된, 2차근사 샘플 출력 조절기로 설계한 샘플치 출력 조절의 성능 개선을 보여준다.

(예)

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ \dot{w} = Sw \\ e = Cx + Qw \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} A := \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \\ C := \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

이 경우, (A, B) : 안정화가능, $((C, Q), \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix})$: 점출가능, S 는 정의 3.1의 가정 3) 의 조건들을 만족한다. 또한, 식 (3)을 만족하는 해가 존재함을 쉽게 점검할 수 있다. 이 때, 해의 하나는 $\Pi = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix}$ 이다. 따라서, 시스템 Σ_1 은 출력조절 가능하다.

이제, 시스템 Σ_1 을 이산화하면, 다음과 같다.

$$\Sigma_1(T) : \begin{cases} x_{k+1} = A(T)x_k + B(T)u_k + P(T)w_k \\ w_{k+1} = S(T)w_k \\ e_k = Cx_k + Qw_k \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} A(T) := \begin{pmatrix} 1, & T \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad B(T) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} T^2, & \frac{1}{2} T^2 \\ T, & T \end{pmatrix}, \\ P(T) := \begin{pmatrix} 3\sin(T) - 2\cos(T) - T + 2, & -2\sin(T) - \cos(T) + 2T - 1 \\ 2\sin(T) + \cos(T) - 1, & -2\cos(T) + \sin(T) + 2 \end{pmatrix} \\ S(T) := \begin{pmatrix} \cos(T), & \sin(T) \\ -\sin(T), & \cos(T) \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

아래 그림 1은, 제3절에 소개된, 출력조절기 설계 절차대로, 아날로그 출력 조절기를 설계하고 이를 샘플링하여 얻어진 샘플치 출력 조절기를 사용한 경우 (case 1)와, 샘플치 시스템 $\Sigma_1(T)$ 에 대해 2차 근사

샘플치 출력 조절기를 설계한 경우(case 2)의 출력 반응 $e(k)$ 중 두 번째 성분 $e_2(k)$ 를 비교한 것이다 ($e_1(k)$ 의 경우도 같은 비교결과를 보임 - 표 1 참조). 표 1은 시뮬레이션의 최종 시간(40sec)근방의 값을 명확히 비교하기 위해, 시뮬레이션을 통해 얻어진 각 경우의 값을 나타낸 것이다. 표 1에서, case 3은 샘플치 시스템 $\Sigma_1(T)$ 에 대해 1차 근사 샘플치 출력 조절기를 설계한 경우이다. 시뮬레이션 환경은, 샘플링 시간 T 는 0.08sec, 초기값 $w(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 그외의 상태 초기값은 0 으로 하였다. 따라서, $e(k)$ 의 초기값은 $e_1(0) = 2, e_2(0) = 2$ 이다. 또한, 아날로그 안정화 제어기의 고유치(즉, $A + BH_1$ 의 고유치)를 $\{-2, -3\}$, 아날로그 관측기의 고유치(즉, $\begin{pmatrix} A, & P \\ 0, & S \end{pmatrix} - G(C, Q)$ 의 고유치)를 $\{-4, -5, -6, -7\}$ 로 하였으며, 샘플치 시스템에서도 각각 아날로그와 동일한 모드를 갖도록 하였다 (즉, 샘플치 안정화 제어기의 고유치 $\{e^{-2T}, e^{-3T}\}$, 샘플치 관측기의 고유치 $\{e^{-4T}, e^{-5T}, e^{-6T}, e^{-7T}\}$ 로 함).

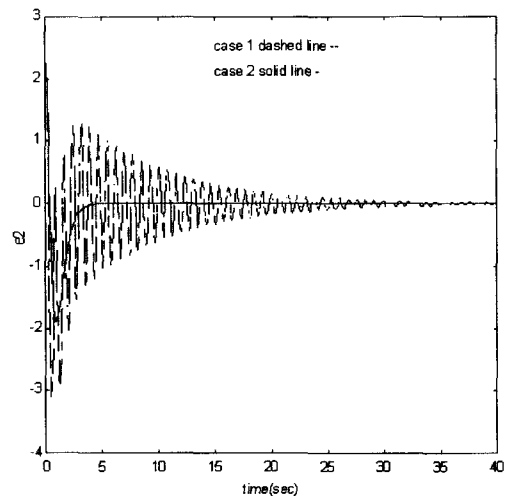


그림 1. 아날로그 출력조절기를 샘플링하여 얻어진 샘플치 출력 조절기와 본논문에서 제안한 개선된 2차 근사 샘플치 출력조절기의 비교 (e 가운데 두 번째 성분인 e2 만 비교)

Fig. 1. Comparison between the sampled-data output regulator designed based upon the analog output regulator and the proposed 2nd order approximate sampled-data output regulator.

표 1. 샘플치 출력 조절기 설계의 비교(샘플링 시간 0.08 sec)

Table 1. Comparison among sampled-data output regulators.

시간 cases	case 1(아날로그)		case 2(2차근사)		case 3(1차근사)	
	e1	e2	e1	e2	e1	e2
39.2800	0.0036	0.0055	0.0010	-0.0007	-0.0182	-0.0111
39.3600	0.0037	-0.0051	0.0010	-0.0008	-0.0189	-0.0096
39.4400	0.0031	-0.0137	0.0011	-0.0008	-0.0195	-0.0080
39.5200	0.0020	-0.0169	0.0011	-0.0008	-0.0199	-0.0063
39.6000	0.0009	-0.0135	0.0012	-0.0008	-0.0202	-0.0047
39.6800	0.0003	-0.0050	0.0012	-0.0008	-0.0204	-0.0029
39.7600	0.0004	0.0049	0.0012	-0.0009	-0.0205	-0.0012
39.8400	0.0011	0.0121	0.0013	-0.0009	-0.0205	0.0005
39.9200	0.0022	0.0136	0.0013	-0.0008	-0.0203	0.0023
40.0000	0.0032	0.0090	0.0013	-0.0008	-0.0199	0.0040

(40sec)근방의 각 경우(case 2 와 case 3)의 값을 비교한 것이다.

그림 1 과 그림 2, 표 1 과 표 2를 통해 보면, 샘플링 시간에 대해 2차 근사로 설계한 샘플치 출력 조절기(case 2)가 아날로그 출력조절기를 샘플링하여 얻어진 샘플치 출력 조절기(case 1)나 또는 샘플치 시스템에 대해 1차 근사로 설계된 샘플치 출력 조절기(case 3)에 비해 성능이 개선됐음을 알 수있다.

표 2. 1차 근사(case 3) 및 2차 근사(case 2) 샘플치 출력 조절기 설계의 비교 (샘플링 시간 0.5 sec)

Table 2. Comparison between a 1st order approximate sampled-data output regulator and the proposed 2nd order approximate sampled-data output regulator(sampling time 0.5 sec).

시간cases	case 2(2차 근사)		case 3 (1차근사)	
	e1	e2	e1	e2
35.500	0.0192	-0.0071	0.0619	0.3347
36.000	-0.0167	-0.0058	0.1812	0.2732
36.500	-0.0485	-0.0031	0.2561	0.1448
37.000	-0.0685	0.0003	0.2683	-0.0191
37.500	-0.0716	0.0037	0.2148	-0.1783
38.000	-0.0572	0.0062	0.1087	-0.2938
38.500	-0.0288	0.0071	-0.0240	-0.3374
39.000	0.0066	0.0063	-0.1508	-0.2984
39.500	0.0405	0.0040	-0.2407	-0.1863
40.000	0.0644	0.0007	-0.2717	-0.0286

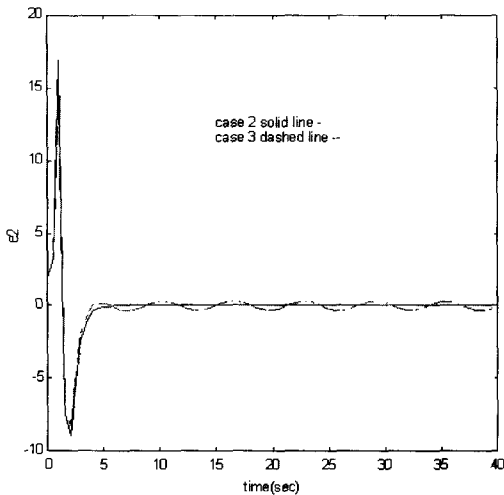


그림 2. 1차근사 샘플치 출력조절기(case 3)와 2차 근사 출력 조절기 (case 2)의 비교 (샘플링 시간 0.5 sec)

Fig. 2. Comparison between a 1st order approximate sampled-data output regulator(case 3) and the proposed 2nd order approximate sampled-data output regulator(case 2) (sampling time 0.5 sec)

그림 2의 경우, 그림 1과 동일한 시뮬레이션 환경이나 다만 샘플링 시간이 0.5 sec 이며, 2차 근사 샘플치 출력 조절기(case 2)와 1차 근사 샘플치 출력 조절기를 설계한 경우(case 3) 를 비교한 것이다(이 샘플링 시간에서는 case 1의 샘플치 출력 조절기는 불안정해진다). 또한, 표 2는 시뮬레이션의 최종 시간

V. 결론

연속 시간 선형 시스템 모델에 기반하여 설계된 아날로그 조절기를 이산화하여 얻어진 샘플치 조절기는 샘플링 시간에 대해 1차 근사 조절기에 불과하다. 따라서, 샘플링 시간에 대해 개선된 샘플치 조절기를 설계할 필요가 존재한다. 본 논문에서는 근사 샘플치 출력 조절기 문제를 명확히 기술하고, 먼저 개선된 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해서는 먼저 아날로그 출력 조절기 설계가 가능해야 함을 보였다. 근사 샘플치 출력 조절기 설계가 가능하기 위해 만족되어야 할 필요 충분조건인 행렬 방정식 해의 분석을 통해, 2차 근사 출력 조절기 설계는 항상 가능하며, 3차 이상의 근사 샘플치 출력 조절기의 설계의 경우에, 만족해야할 시스템의 구조를 밝혔다.

참 고 문 헌

- [1] C.I. Byrnes and A. Isidori, "Steady State Response, Separation Principle, and The Output Regulation of Nonlinear Systems," 28th Proc. conf. on Decision and Control, vol. 3, pp. 2247-2251, 1989.
- [2] C.I. Byrnes and Wei Lin "On Discrete-Time Nonlinear Control," 32nd Proc. conf. on Decision and Control, vol.3, pp. 2990-2996, 1993.
- [3] C.T.Chen, Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [4] B.A. Francis, "The Linear Multivariable Regular Problem," SIAM J.Contr.Optimiz., vol. 15, pp. 486-505, 1987.
- [5] M. Hautus, "Linear Matrix Equations with Applications to the Regulator Problem," in Outils and Modèles Math. pour l'Auto., I.D. Landau, Ed. Paris: C.N.R.S., pp. 399-412, 1983.
- [6] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 2nd ed., 1989.
- [7] A. Isidori, and C.I. Byrnes, "Output Regulation of Nonlinear Systems," IEEE trans. Aut. Contr., AC-35, pp. 131-140, 1990.
- [8] 정선태, "선형 샘플치 시스템의 출력 조절", 대한 전자공학회 논문지 제34권 S편 제 8호, pp. 853-861, 1997.

저 자 소 개



鄭 善 太(正會員)

1983년, 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사)
 1990년, 미국 The University of Michigan,
 Ann Arbor, 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공
 학박사) 1991년~현재, 숭실대학교 정보통신전
 자공학부 부교수 주관심분야는 실시간 시스템,
 디지털 제어, 비선형 제어 등임