論文98-35S-10-13

윈도우 함수를 이용한 2차원 신호의 위상복원

(Two-Dimensional Phase Retrieval Using Window Functions)

金 禹 植 *

(Wooshik Kim)

요 약

이 논문에서는 윈도우를 이용한 위상복원에 관하여 다룬다. 구하고자 하는 신호의 푸리에 크기와 이 원하는 신호에 서로 보완 (complementary) 윈도우가 곱해진 신호의 푸리에 크기로부터 원하는 신호를 구하는 문제에 대하여 알아본다. 여기서는 유일 조건을 만족하기 위한 여러 조건을 제시하고 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 응용한 새로운 복원 알고리즘을 제시한다. 이 연구의 결과는 광학, 특히 천문학에서 Ground-based Telescope의 성능 개선에 이용할 수 있을 것으로 생각된다.

Abstract

In this paper, we consider the problem of reconstructing a two-dimensional signal from its Fourier intensity and the Fourier intensities of two windowed signals: one by a window w(m,n) and the other by its complementary window [1-w(m,n)]. We develop several conditions under which a signal can be uniquely specified to within several trivial ambiguities such as sign, translation, and time-reversal from the given conditions. We present two possible reconstruction algorithms derived from the Gerchberg-Saxton algorithm.

Ⅰ. 서 론

위상복원 문제는 어떤 신호의 푸리에 크기 또는 Intensity로부터 그 신호를 구하는 문제로 전자현미경, 광학, 천문학, X-선 결정학, 신호처리와 같은 여러 분야에서 일어나는 문제이다 [1]. 일반적으로 어떤 신호의 푸리에 크기는 그 신호를 정확하게 나타낼 만큼 충분한 정보를 갖고 있지 못하다. 그래서 위상복원문제의 많은 연구가 얻고자 하는 신호에 알고 있는 제한조건(Constraints)을 가하거나 정보(Information)를 더하고, 이를 이용하여 문제를 해결하는 방식을 취하고 있다.

* 正會員, 明知大學校 電氣電子工學部

(School of Electronics, Information and Communication Engineering, Myongji Univ.)

接受日字: 1998年7月22日, 수정완료일: 1998年9月28日

이 중 한 분야가 윈도우 함수를 이용한 위상복원이며, 여러 연구결과가 발표되었다[2,3,4,5,6]. 예를 들어 Nawab은 큰 영역을 갖는 신호를 작은 부분으로 나누고, 이 부분의 푸리에 크기로부터 원 신호를 구해나가는 짧은 시간 신호 (Short-time signal)의 위상복원에 관하여 연구하였다[2]. Gonsalves는 원 신호의 푸리에 크기와 그 신호에 Weighted Aperture를 윈도우로 사용하여 얻은 푸리에 크기사이에 미분 방정식을 유도하고, 이를 풀어 원 신호를 구하는 방법을 연구하였다[3]. Wood는 어떤 신호의 zero와 이 신호에 지수함수 윈도우 (Exponential Window)를 곱한 신호의 zero 사이에 특별한 관계가 있다는 사실을 발견하였으며, 두 신호의 자기상관함수 (Autocorrelation)로부터 원 신호를 구할 수 있다는 사실을 예를 들어 보였다 [4]. 또한 Nakajima는 이 문제를 수치해석으로 해결하는 문제에 대하여 연구하였다 [5,6].

최근에 어떤 일차원 신호의 푸리에 크기와 이 신호에 서로 보완적인 윈도우 함수 ($w(n)$과 $w_c(n)$)를 곱하여 구해진 신호의 푸리에 크기로부터 원 신호를 구하는 연구 결과가 발표되었다[7]. 이 논문에서는 [7]의 결과의 2차원 신호로의 확장에 대하여 다룬다. II장에서는 신호가 유일하게 주어지기 위한 조건을 III장에서는 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 변형하여 II에서의 유일성의 조건을 만족하는 신호를 복원하는 알고리즘을 개발한다.

II. 이 론

[7]에서는 1차원의 위상복원 문제로 $y(n)$, $z(n)$이 유한한 영역을 갖는 1차원 신호이고, 두 신호의 z-transform 사이에 서로 공통 인수가 없다고 가정하고, $x(n)$을

$$x(n)=y(n)+z(n) \tag{1}$$

이라고 가정하면, 신호 $x(n)$, $y(n)$과 $z(n)$은 세 신호의 푸리에 크기로부터 자리 이동, 부호, 역시간 변환과 같은 모호성 (ambiguity)을 제외하고 유일하게 결정될 수 있음을 보였다. 이 논문에서는 이 정리를 2차원 신호로 확장한다.

정리 1 : 신호 $y(m,n)$, $z(m,n)$을 유한한 영역을 가진 실수 2차원 신호로 두 신호의 z-변환 사이에 서로 공통 인수가 없다고 가정한다. 그리고 신호 $x(m,n)$을

$$x(m,n)=y(m,n)+z(m,n) \tag{2}$$

이라고 가정한다. 그러면 세 신호 $x(m,n)$, $y(m,n)$, $z(m,n)$은 부호, 지리이동, 역공간 변환의 모호성을 제외하고는 푸리에 크기 $|X(\omega_1,\omega_2)|$, $|Y(\omega_1,\omega_2)|$, $|Z(\omega_1,\omega_2)|$로부터 유일하게 결정된다.

정리 1의 증명은 부록에 보였다. 정리 1의 자리이동, 역공간 (일차원 신호는 역시간) 변환과 같은 모호성은 $y(m,n)$과 $z(m,n)$의 영역 (R.O.S.: Region of Support)이 서로 다르면 제거할 수 있다. 예를 들어 신호 $y(m,n)$의 0이 아닌 영역 중에서 가장 작은 영역을 $R(M_y,N_y)$, $z(m,n)$의 가장 작은 non-zero 영역을 $R(M_z,N_z)$, 그리고 $M_y\neq M_z$ 또는 $N_y\neq N_z$이라고 가정한다. (여기서 $R(M,N)$는 2차원 평면상에서 $R(M,N)=[0,M-1]\times[0,N-1]$의 rectangular 영역을 의미한다.) 그러면 위 정리에 의하여 위상복원 문제의 y의 해 $\hat{y}(m,n)$은 $y(m,n)$ 또는 $y(M_y-1-m,N_y-1-n)$이어야 한다. 하지만 $y(M_y-1-m,N_y-1-n)$이 해인 경우에는 $z(M_y-1-m,N_y-1-n)$역시 z에 관한 해가 되어야 한다. 하지만 $z(m,n)$과 $z(M_y-1-m,N_y-1-n)$이 같은 R.O.S.를 갖는 경우에는 $M_y=M_z$ and $N_y=N_z$이어야 하고, 또한 가정에서 $M_y\neq M_z$ 또는 $N_y\neq N_z$이므로 따라서 자리이동과 역공간 변환의 모호성은 제거된다. 부호의 모호성은 화상과 같은 2차원 신호의 경우에는 항상 0 이상의 값만을 갖기 때문에 모호성은 금방 제거된다.

정리1은 주파수 영역에서 연속인 값을 갖는 것으로 가정하였다. 하지만 푸리에 크기의 값들이 충분히 주어지면 유한한 값으로도 유일하게 구할 수 있다. 이 결과는 정리 2에 나타내었다.

정리2 : 실수 값을 갖는 2차원 신호 $y(m,n)$과 $z(m,n)$은 유한한 영역을 갖고, z-변환사이에 공통 인수가 없다고 가정한다. 그리고 2차원 신호 $x(m,n)$은 다음의 식

$$x(m,n)=y(m,n)+z(m,n) \tag{3}$$

으로 주어진다고 가정한다. 그러면 신호 $x(m,n)$, $y(m,n)$, $z(m,n)$은 부호, 자리이동, 역공간(시간) 변환과 같은 모호성을 제외하고, 푸리에 크기 $|X(\omega_1,\omega_2)|$, $|Y(\omega_1,\omega_2)|$, $|Z(\omega_1,\omega_2)|$의 $2M\times 2N$의 샘플 값으로부터 유일하게 결정된다. 여기서 M과 N은 신호 영역 $R(M,N)$으로 결정되며, $R(M,N)$은 $x(m,n)$, $y(m,n)$, $z(m,n)$의 non-zero 영역을 모두 포함하면서 가장 작은 Rectangular 영역으로 정의된다.

이 정리의 증명은 다음과 같다. [8]의 결과에 따르면, 유한한 영역 $R(M,N)$을 갖는 신호의 푸리에 크기가 $2M\times 2N$ 만큼의 샘플이 주어지면, 이 샘플로부터 이 신호의 자기상관함수를 정확하게 구할 수 있으며, 다음은 정리 1의 증명과 같다.

정리 1은 윈도우 함수를 이용하여 다시 정리할 수 있다. 정리 1에서 $w(m,n)$을 다음과 같이 $y(m,n)$과 $x(m,n)$의 비로 정의한다.

$$w(m,n)=\begin{cases} y(m,n)/x(m,n) & \text{if } x(m,n)\neq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{4}$$

그러면, $y(m,n)$과 $z(m,n)$은

$$\begin{aligned} y(m,n) &= x(m,n)w(m,n) \\ z(m,n) &= x(m,n)-y(m,n)=[1-w(m,n)]x(m,n) \end{aligned} \tag{5}$$

으로 주어진다. 따라서 정리 1은 다음과 같이 얻고자 하는 신호 $x(m,n)$과 이 신호에 윈도우 함수를 곱하여 얻은 두 신호 $y(m,n)$과 $z(m,n)$의 푸리에 크기로부터 $x(m,n)$을 구하는 문제로 다시 해석할 수 있다.

다음은 이 개념을 임의의 윈도우 함수로 일반화시킨다. $x(m,n)$을 전과 같이 실수 값을 갖는 2차원의 신호로 non-zero 최소 영역이 $R(M,N)$이라고 가정한다. 또한 두 함수 $w_1(m,n)$과 $w_2(m,n)$을 $R(M,N)$ 영역 밖에서는 0의 값을 갖는 윈도우라고 가정하고, $y(m,n)$과 $z(m,n)$은 각각 $x(m,n)$에 $w_1(m,n)$과 $w_2(m,n)$을 곱해서 얻어진 신호

$$\begin{aligned} y(m,n) &= w_1(m,n)x(m,n) \\ z(m,n) &= w_2(m,n)x(m,n) \end{aligned} \tag{6}$$

라고 가정한다. 식 (6)에서 만일 두 윈도우 함수 $w_1(m,n)$과 $w_2(m,n)$가 $R(M,N)$ 안에서

$$w_1(m,n)+w_2(m,n)=\begin{cases} 1 & \text{if } (m,n)\in R(M,N) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{7}$$

의 관계식이 성립하면 두 함수는 서로 보완(Complementary) 관계에 있다고 정의하고, 이 때, $R(M,N)$ 안에서 $x(m,n)=y(m,n)+z(m,n)$의 관계식이 성립한다. 여기에서 새로운 윈도우 함수 $w_c(m,n)$를 다음과 같이

$$w_c(m,n)=\begin{cases} 1-w(m,n) & \text{if } (m,n)\in R(M,N) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{8}$$

라고 정의하면, $y(m,n)=w_1(m,n)x(m,n)$, $z(m,n)=[1-w_1(m,n)]x(m,n)=w_c(m,n)x(m,n)$ 과 같이 된다. 이 관계식을 정리 1에 응용하면 다음과 같다.

정리 3 : $x(m,n)$을 음이 아닌 실수값을 갖는 2차원의 신호로 최소 R.O.S.가 $R(M,N)$인 신호라고 가정한다. 또한 $w(m,n)$을 $R(M,N)$ 밖에서는 모두 0의 값을 갖는 윈도우 함수, $w_c(m,n)$를 $w(m,n)$의 보완 윈도우 함수로 $R(M,N)$ 영역 안에서는 $w(m,n)=1-w_c(m,n)$, 밖에서는 모두 0의 값을 갖는 윈도우라고 가정한다. 또한 $y(m,n)$과 $z(m,n)$의 자기상관함수의 z-변환은 서로 공통 인수가 없다고 가정한다. 이 때, 윈도우 함수 $w(m,n)$이 다음 조건

$$w(m,n)\neq w(M-1-m,N-1-n) \tag{9}$$

을 만족하면, 신호 $x(m,n)$은 3개의 푸리에 크기 $|X(\omega_1,\omega_2)|$, $|Y(\omega_1,\omega_2)|$, $|Z(\omega_1,\omega_2)|$로부터 유일하게 결정된다.

이 정리의 증명은 다음과 같다. 유한한 영역을 갖는 2차원 음이 아닌 실수 신호 $y(m,n)$, $z(m,n)$의 z 변환사이에 공통 인수가 없다고 가정한다. 또한 $\tilde{x}(m,n)$, $\tilde{y}(m,n)$, $\tilde{z}(m,n)$을 정리 1에서와 같이 $x(m,n)$, $y(m,n)$, $z(m,n)$ 각각에 주어진 모든 조건을 만족한다고 가정한다. 그러면 정리 1의 결과에 의하여 $\tilde{x}(m,n)=x(m,n)$ 또는 $\tilde{x}(m,n)=x(M-1-m,N-1-n)$ $\tilde{y}(m,n)=y(m,n)$ 또는 $\tilde{y}(m,n)=y(M-1-m,N-1-n)$, $\tilde{z}(m,n)=z(m,n)$ 또는 $\tilde{z}(m,n)=z(M-1-m,N-1-n)$으로 주어진다. 여기에서 다음의 조건

$$\begin{aligned} \tilde{y}(m,n) &\neq y(M-1-m,N-1-n) \\ \tilde{z}(m,n) &\neq z(M-1-m,N-1-n) \end{aligned} \tag{10}$$

을 만족하면 위의 모호성 (Ambiguity)은 제거할 수 있다. 특히 위 식(10)의 조건을 풀면,

$$w(m,n)x(m,n) \neq w(M-1-m,N-1-n)x(m,n) \tag{11}$$

을 얻을 수 있고, 따라서 만일 $w(m,n)\neq w(M-1-m,N-1-n)$을 만족하면 신호 $x(m,n)$, $y(m,n)$과 $z(m,n)$ 모두 유일하게 구할 수 있다.

일반적으로 2차원이나 그 이상의 차원을 가진 신호는 1차원 신호에 비하여 매우 다른 성질을 갖는다. 예를 들어 1차원 신호의 z-변환은 복소수 변수 z의 함수로 Gauss's의 Fundamental Theorem of

Algebra에 의하여 항상 1차원의 인수의 곱으로 분해할 수 있다. 하지만 2차원 이상의 차원을 가진 신호의 z-변환은 확률 99.9% 이상으로 자기 자신과 1만이 인수로 갖는 irreducible 다항식으로 구성되어 있다 [9]. 따라서 2차원 이상의 신호의 경우에 주어진 푸리에 크기를 만족하는 신호는 부호, 자리 이동, 역공간 변환의 3가지 모호성 (Ambiguity)을 제외하고는 유일하게 결정된다. 이 성질을 이용하면 정리3의 경우에 실질적으로 2장의 푸리에 크기로 신호는 유일하게 결정될 수 있다.

정리 4. $x(m,n)$을 음이 아닌 실수값을 갖는 2차원의 신호로 최소 R.O.S.가 $R(M,N)$인 신호라고 가정한다. 또한 $w(m,n)$을 $R(M,N)$ 밖에서는 모두 0의 값을 갖는 윈도우 함수로 다음 조건

$$w(m,n) \neq w(M-1-m, N-1-n) \tag{12}$$

을 만족하고, 신호 $y(m,n)$을 $y(m,n)=x(m,n)w(m,n)$로 정의된다고 가정한다. 이 때, 신호 $x(m,n)$은 99.9% 이상의 확률로 2개의 푸리에 크기 $|X(\omega_1,\omega_2)|$와 $|Y(\omega_1,\omega_2)|$로부터 유일하게 결정된다.

위 정리의 증명은 다음과 같다. 먼저 [9]의 결과에 따라 $|Y(\omega_1,\omega_2)|$를 만족하는 신호는 확률 99.9% 이상으로 원 신호 $y(m,n)$과 $y(m,n)$의 모호성으로부터 파생되어 나오는 신호들, 예를 들어 부호 $-y(m,n)$, 자리이동 $y(m-m_0,n-n_0)$과 역공간 변환 $y(-m,-n)$ 밖에는 존재하지 않는다. 하지만 이 모호성은 모두 제거될 수 있다. 원신호 $x(m,n)$과 $y(m,n)$의 신호 값들은 주어진 조건에 의하여 0 이상이므로 부호의 모호성은 제거된다. 자리이동과 역공간 변환의 모호성은 $y(M-1-m,N-1-n)$을 제외하고는 신호의 영역이 달라지기 때문에 역시 제거된다. 또한 $y(M-1-m,N-1-n)$도 주어진 조건에서 $w(m,n)\neq w(M-1-m,N-1-n)$이라고 가정했기 때문에 역시 해로는 부적합하다. 따라서 $|Y(\omega_1,\omega_2)|$를 만족하는 신호 $y(m,n)$은 주어진 조건으로부터 유일하게 결정된다. 다음에 역시 $|X(\omega_1,\omega_2)|$를 만족하는 신호는 확률 99.9% 이상으로 $x(m,n)$ 또는 $x(M-1-m,N-1-n)$ 밖에는 존재하지 않는다. 더욱이 $x(M-1-m,N-1-n)w(m,n)$은 $y(m,n)$과는 같지 않기 때문에 해가 될 수 없으며, 따라서 $x(m,n)$은 주어진 조건으로부터 확률 99.9% 이상으로 유일하게 결정된다. 이 정리는 특히 윈도우 함수 $w(m,n)$을 신호 $x(m,n)$의 경계 (Boundary)를 포함하도록 선정하면 그 의미를 명확하게 알 수 있다.

Ⅲ. 복 원

이 장에서는 위의 정리 3과 정리 4를 만족하는 신호의 복원에 관하여 알아본다. 일반적으로 정리 3의 조건을 만족하는 신호의 복원은 그 신호의 유일성이 보장된다고 하더라고 복원하기에는 매우 어렵다. 그 이유는 $y(m,n)$과 $z(m,n)$이 서로 어떤 성질을 갖고 있는지 알 수가 없기 때문이다. 하지만 두 신호의 신호 영역이 서로 다르면 (Disjoint)하면 (이 경우 윈도우 함수의 값은 0 또는 1의 값만 가짐.) Gerchberg-Saxton 알고리즘을 응용하여 Iterative 알고리즘을 만들 수 있다. 그림 1은 정리 3의 조건을 만족하는 신호를 복원하기 위하여 3개의 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 이용하여 구성한 복원 알고리즘이며, 그림 2는 이 알고리즘을 실제의 화상에 적용했을 때의 결과이다. 그림 2에서 (a)는 구하고자 하는 128x128 point 원 신호, (b)는 Non-symmetric 윈도우 함수 $w(m,n)$으로

$$w(m,n)=\begin{cases}0 & \text{if } (m,n)\in[10,110]\times[10,110]\\ 1 & \textit{Otherwise}\end{cases}, \tag{13}$$

그림 (c)는 Complementary 윈도우 $w_c(m,n)$로 윈도우 된 신호이다. (d)는 Iteration을 시작하기 위한 초기 화상을, (e)는 100번의 iteration을 수행 한 후의 결과를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있듯이 복원된 신호는 원신호의 특성을 많이 갖고 있음을 알 수 있으며, 따라서 유일하게 복원할 수 있음을 알 수 있다.

2장의 푸리에 크기만이 주어졌을 경우, 즉 정리 4의 조건을 만족하는 신호의 복원은 2번의 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 각각 수행하여 복원할 수 있다. 그림 3은 알고리즘의 Block Diagram을 그림 4는 이 알고리즘을 이용하여 그림 2에서와 같은 조건으로 복원을 수행한 결과이다. 알고리즘 1에 비하여 오히려 성능이 좋은 것을 알 수 있다. 그 이유는 $z(m,n)$을 구하는 과정에서 발생하는 Stagnation 문

제를 피해갈 수 있기 때문인 것으로 보인다. 그림 5에서는 알고리즘 #1과 #2의 성능을 Mean Squared Error를 이용하여 비교한 것이다. Mean Squared Error는

$$MSE=\frac{1}{MN}\sum_{(m,n)\in R(M,N)}[x_r(m,n)-x_o(m,n)]^2 \quad (14)$$

식으로 주어진다. 여기서 $x_r(m,n)$은 복원된 신호값, $x_o(m,n)$은 원 신호의 신호값을 나타낸다. 알고리즘 #2는 미리 윈도우된 신호 $y(m,n)$을 복원하고 이를 초기 신호로 이용하였기 때문에 푸리에 크기를 역변환 한 화상을 초기 신호로 사용하는 알고리즘 1에 비하여 초기 화상은 원신호에 매우 가깝다. 두 알고리즘의 상대적인 수렴 속도는 이 예에서는 알고리즘 1이 더 빨리 수렴하는 것으로 나타났지만, 다른 예에서는 반대의 경우도 발생한다 (그림 6 참조). 일반적으로 Gerchberg-Saxton 알고리즘과 이를 응용한 알고리즘의 수렴 특징은 그림 5에서 나타난 바와 같이 알고리즘을 시작할 단계에서는 급격히 수렴하다 다시 급격히 수렴속도가 감소하는 추세를 보인다.

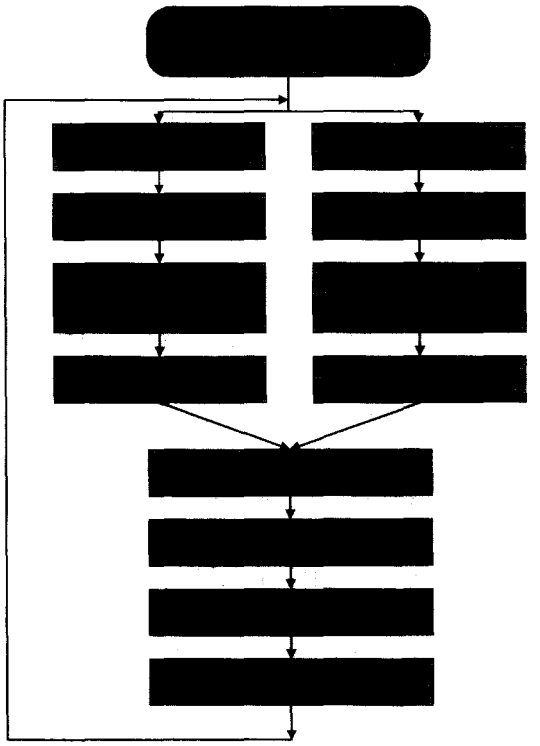
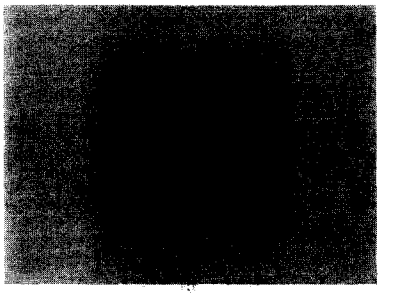


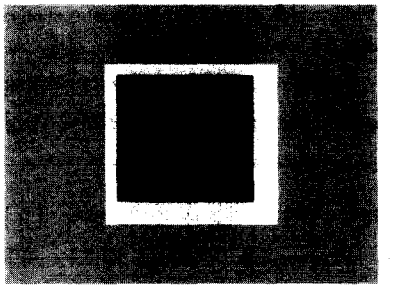
그림 1. 복원 알고리즘 #1
Fig. 1. Reconstruction Algorithm #1.

그림 5에서 알고리즘 #1과 알고리즘 #2의 경우 모두 궁극적으로 얻고자하는 신호에 수렴하지만, 어떤 수렴 조건을 만족하기까지 알고리즘 #1은 알고리즘 #2에 비하여 매우 많은 수행을 하여야 한다.

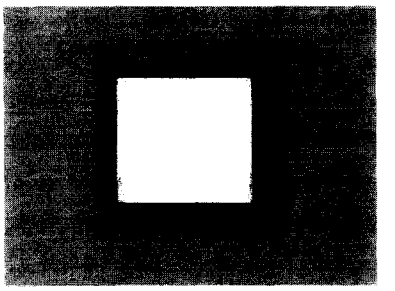
그림 6은 (정리 3, 4의 조건을 만족하지 않는) [0,127] x [0,127] - [10,117] x [10,117] 의 영역에서 1의 값을 갖는 대칭의 윈도우를 사용했을 때의 결과이다.



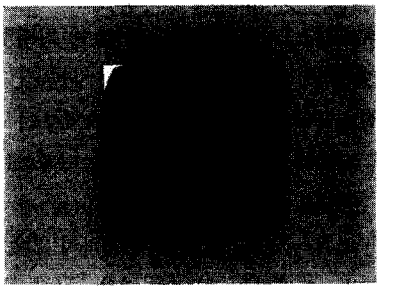
(a) Original Image



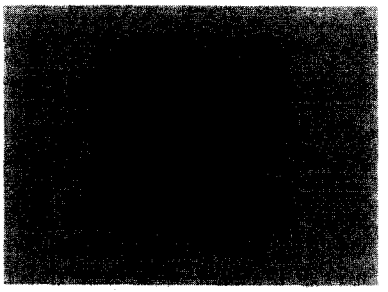
(b) Window Function



(c) Complementary Window Function



(d) Initial Image



(e) 알고리즘 #1을 이용하여 복원한 Image (100번 iteration 후)

그림 2. 알고리즘 #1을 이용한 복원
Fig. 2. Reconstruction using Algorithm #1.

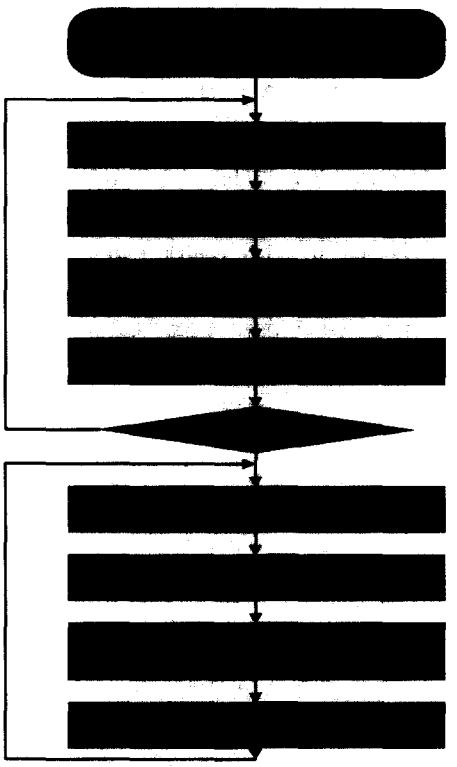


그림 3. 복원 알고리즘 #2
Fig. 3. Reconstruction Algorithm #2.

그림 (a)는 알고리즘 #1을, 그림 (b)는 알고리즘 #2를 사용한 경우이고, 그림 (c)는 (a) (b) 결과의 수렴 특성을 나타낸 것이다.

그림에 나타나 바와 같이 알고리즘 #1의 경우는 원 신호에 수렴하지 않음을 볼 수 있고, 알고리즘 #2의 경우는, 그림 3의 경우에 비하여 수렴 속도는 느리지만, Iteration을 계속할수록 얻고자하는 신호에 수렴하는 것을 유추할 수 있다. 특히 알고리즘 2의 경우에는 원도우 된 신호의 복원 과정에서 Boundary는 거의 정확히 복원이 되고, Boundary가 주어지면 확률 99.9% 이상으로 유일하게 결정이 되기 때문인 것으로 보이며[9,10], 알고리즘 1의 경우에는 자리이동과 역공간 변환에 의하여 발생하는 모호성(ambiguity)으로 인하여 여러 해(Solution)가 겹쳐서 나타나는 이른바 stagnation 문제[11]인 것으로 파악된다.

그림 4. 알고리즘 #2를 사용하여 복원한 Image (100번 Iteration 후)
Fig. 4. Reconstructed Image using Algorithm #2 (After 100 iterations).

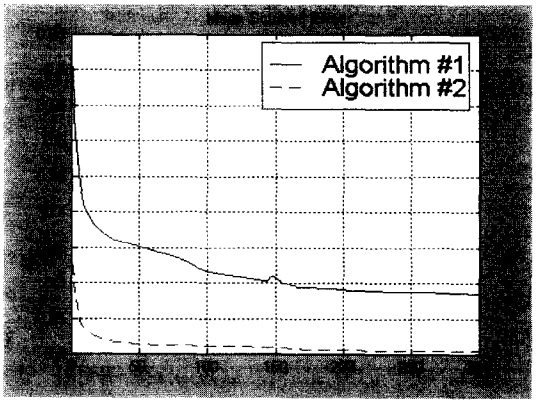
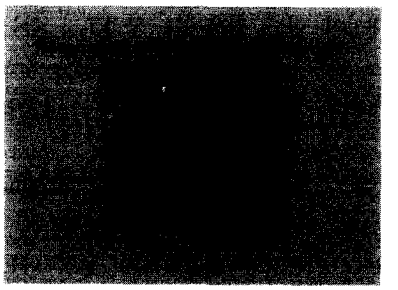
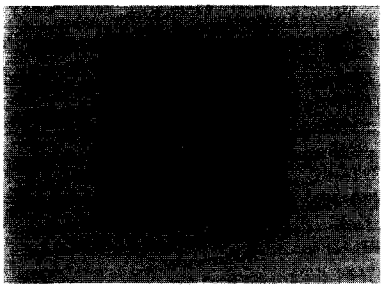


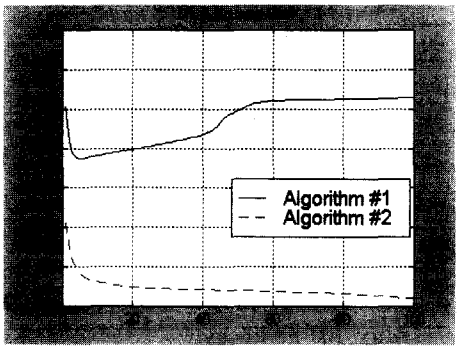
그림 5. 300번 수행 후의 알고리즘 #1과 #2의 Mean Squared Error 비교
Fig. 5. Comparison of the Convergence Properties between Algorithm #1 and Algorithm #2 After 300 Iterations.



(a) Algorithm #1으로 복원한 화상 (100번 Iteration)



(b) 알고리즘 #2로 복원한 화상 (100번 Iteration후)



(c) 알고리즘 #1과 #2의 수렴 특성

그림 6. 대칭의 윈도우 함수를 이용한 위상복원
Fig. 6. Phase Retrieval Using a Symmetric Window Function.

Ⅳ. 결 론

이 논문에서는 윈도우 함수를 이용한 위상복원에 관하여 논하였다. 구하고자 하는 신호가 있을 때, 이 신호의 푸리에 크기, 이 신호에 서로 보완 윈도우 함수 ($w(m,n)$, $w_c(m,n)=1-w(m,n)$)를 곱하여 얻어진 두 신호의 푸리에 변환이 주어졌을 때, 원 신호가 유일하게 결정될 조건과 이 신호를 복원하기 위한 알고리즘을 제시하였다. 먼저 3개의 푸리에 크기가 주어진 경우에는 모호성을 제외하고는 유일하게 결정될 수 있음을 보였다. 하지만, 2차원 화상의 경우에는 윈도우 함수가 대칭이 아닌 경우에는 구하고자 하는 신호는 실질적으로 2개의 푸리에 변환의 크기로 유일하게 결정되며, 복원도 3개의 푸리에 변환을 사용하는 것보다 잘되었다.

광학이나 천문학에서, 특히 Ground-based Telescope의 경우에 지구 대기의 영향으로 광학기기가 갖고있는 이론적인 해상도보다 훨씬 나쁜 화상을 얻는다. 이런 화상은 간섭계 (Interferometer)를 이용하면 해결할 수 있는 것으로 알려져 있고, 이것이 바로 위상복원 문제이다. 광학이나 천문학에서와 같이 광학 기기를 다루는 곳에서는 윈도우를 사용하는 것은 매우 쉽고, 보편적인 방법으로 알려져 있다. 이 연구는 사용되는 윈도우의 수도 하나 또는 두 개로 여러 개의 윈도우를 사용하는 Short-time window 방법에 비하여 적은 수를 필요로 하고, Exponential window를 사용하는 방법에 비하여는 빛의 통과/차단의 기능만 하는 윈도우만으로도 가능하기 때문에 이 연구의 결과는 이 분야의 연구에 매우 실질적인 도움이 줄 것으로 생각한다.

Ⅴ. 부 록

이 정리1의 증명은 다음과 같다. 신호 $y(m,n)$, $z(m,n)$과 $x(m,n)$은 모두 유한한 영역을 갖는 실수 신호이므로 이 신호들의 z-변환은 복소수 공간에서 단위 구 (Unit-sphere) 상에서 analytic하며 따라서 푸리에 변환을 갖는다. 이 경우 푸리에 변환의 크기의 제곱과 신호의 자기상관함수 (Autocorrelation Function)사이에는 1:1의 대응 관계를 가지며, 따라서 정확히 같은 정보를 갖게 된다[8]. (2)의 식으로부터 $x(m,n)$의 자기상관함수를 구하면

$$R_x(z_1,z_2)= R_y(z_1,z_2)+R_z(z_1,z_2)+Y(z_1^{-1},z_2^{-1})Z(z_1,z_2) + Y(z_1,z_2)Z(z_1^{-1},z_2^{-1}) \tag{15}$$

의 관계식을 얻는다. 여기서 $R_x(z_1,z_2)$, $R_y(z_1,z_2)$과 $R_z(z_1,z_2)$은 각각 $x(m,n)$, $y(m,n)$, $z(m,n)$의 자기상관함수이다. 위의 정리의 조건에서 신호 $x(m,n)$, $y(m,n)$, $z(m,n)$의 푸리에 변환의 크기가 주어졌으므로, (15)식에서 $R_x(z_1,z_2)$, $R_y(z_1,z_2)$, $R_z(z_1,z_2)$는 모두 정확히 알 수 있다.

다음에 신호 $\tilde{x}(m,n)$, $\tilde{y}(m,n)$, $\tilde{z}(m,n)$이 위의 조건을 모두 만족하는 신호라고 가정한다. 그러면

$$\tilde{x}(m,n)=\tilde{y}(m,n)+\tilde{z}(m,n) \tag{16}$$

식을 만족하고 따라서

$$R_{\tilde{x}}(z_1,z_2) = R_{\tilde{y}}(z_1,z_2)+R_{\tilde{z}}(z_1,z_2) + \tilde{Y}(z_1^{-1},z_2^{-1})\tilde{Z}(z_1,z_2)+\tilde{Y}(z_1,z_2)\tilde{Z}(z_1^{-1},z_2^{-1}) \tag{17}$$

와 같이 된다. 여기서 푸리에 크기 조건,

$R_x(z_1,z_2)=R_{\tilde{x}}(z_1,z_2)$, $R_y(z_1,z_2)=R_{\tilde{y}}(z_1,z_2)$, $R_z(z_1,z_2)=R_{\tilde{z}}(z_1,z_2)$을 이용하여 (15)-(17)을 계산하면

$$\begin{aligned}&R_x(z_1,z_2)-R_{\tilde{x}}(z_1,z_2)=\\&\quad Y(z_1,z_2)Z(z_1^{-1},z_2^{-1})-\tilde{Y}(z_1,z_2)\tilde{Z}(z_1^{-1},z_2^{-1})\\&\quad+Y(z_1^{-1},z_2^{-1})Z(z_1,z_2)-\tilde{Y}(z_1^{-1},z_2^{-1})\tilde{Z}(z_1,z_2)=0\end{aligned}\tag{18}$$

식이 유도된다. 두 신호 $y(m,n)$, $\tilde{y}(m,n)$은 실수의 유한한 영역을 갖는 함수이고, 서로 같은 푸리에 크기를 가지므로, z-변환은 일반성을 상실하지 않고

$$\begin{aligned}Y(z_1,z_2)&=C_y\prod_{k=1}^{I}Y_k(z_1,z_2)\\\tilde{Y}(z_1,z_2)&=\pm C_y z_1^{-p_2}z_2^{-q_2}\prod_{k\in I_y}Y_k(z_1,z_2)\prod_{k\notin I_y}Y_k(z_1^{-1},z_2^{-1})\end{aligned}\tag{19}$$

라고 가정할 수 있다 [8]. 여기서 C_y는 양의 실수, p, q는 정수, I은 양의 정수, $Y_k(z_1,z_2)$는 irreducible 다항식, I_y는 정수의 집합 $[1,2,\cdots,I]$의 부분집합이다. (19) 식을 보다 간단히 하기 위하여

$$\begin{aligned}\prod_{k\in I_y}Y_k(z_1,z_2)&=A(z_1,z_2)\\\prod_{k\notin I_y}Y_k(z_1,z_2)&=B(z_1,z_2)\end{aligned}\tag{20}$$

라고 가정하면, $Y(z_1,z_2)$와 $\tilde{Y}(z_1,z_2)$는 간략하게

$$\begin{aligned}Y(z_1,z_2)&=C_yA(z_1,z_2)B(z_1,z_2)\\\tilde{Y}(z_1,z_2)&=\pm C_yz_1^{-p_2}z_2^{-q_2}A(z_1,z_2)B(z_1^{-1},z_2^{-1})\end{aligned}\tag{21}$$

와 같이 정리된다. $Z(z_1,z_2)$의 경우에 있어서도 같은 방법으로 하면

$$\begin{aligned}Z(z_1,z_2)&=C_zz_1^{-r_1}z_2^{-s_1}\prod_{k=1}^{I}Z_k(z_1,z_2)\\&=C_zz_1^{-r_1}z_2^{-s_1}C(z_1,z_2)D(z_1,z_2)\\\tilde{Z}(z_1,z_2)&=\pm C_zz_1^{-r_2}z_2^{-s_2}\prod_{k\in I_z}Z_k(z_1,z_2)\prod_{k\notin I_z}Z_k(z_1^{-1},z_2^{-1})\\&=\pm C_zz_1^{-r_2}z_2^{-s_2}C(z_1,z_2)D(z_1^{-1},z_2^{-1})\end{aligned}\tag{22}$$

식이 얻어진다. 여기서 C_z는 실수이고, r, s는 정수, $Z_k(z_1,z_2)$는 irreducible한 다항식, $C(z_1,z_2)$, $D(z_1,z_2)$는 각각

$$\begin{aligned}C(z_1,z_2)&=\prod_{k\in I_z}Z_k(z_1,z_2)\\D(z_1,z_2)&=\prod_{k\notin I_z}Z_k(z_1,z_2)\end{aligned}\tag{23}$$

으로 정의된다. (19)와 (22)식을 (18)에 대입하면 (18)식은

$$\begin{aligned}&C_yC_z\ [z_1^{r_1}z_2^{s_1}B(z_1,z_2)D(z_1^{-1},z_2^{-1})\\&\quad\pm z_1^{(r_2-p_2)}z_2^{(s_2-q_2)}B(z_1^{-1},z_2^{-1})D(z_1,z_2)]\\&\quad\times[A(z_1,z_2)C(z_1^{-1},z_2^{-1})\\&\quad\pm z_1^{(p_2-r_2-r_1)}z_2^{(q_2-s_2-s_1)}A(z_1^{-1},z_2^{-1})C(z_1,z_2)]=0\end{aligned}\tag{24}$$

와 같이 인수분해 된다. 이 방정식을 풀면

$$\frac{A(z_1,z_2)}{A(z_1^{-1},z_2^{-1})}=\pm z_1^{p_2-r_2-r_1}z_2^{q_2-s_2-s_1}\frac{C(z_1,z_2)}{C(z_1^{-1},z_2^{-1})}\tag{25}$$

또는

$$z_1^{r_1}z_2^{s_1}\frac{B(z_1,z_2)}{B(z_1^{-1},z_2^{-1})}=\pm z_1^{r_2-p_2}z_2^{s_2-q_2}\frac{D(z_1,z_2)}{D(z_1^{-1},z_2^{-1})}\tag{26}$$

의 식이 얻어진다. 먼저 $Y(z_1,z_2)$와 $Z(z_1,z_2)$에는 reciprocal zero가 없다고 가정한다. 그러면 (25)식에서 $p_2-r_2-r_1=0$, $q_2-s_2-s_1=0$, $A(z_1,z_2)/A(z_1^{-1},z_2^{-1})=\pm C(z_1,z_2)/C(z_1^{-1},z_2^{-1})$의 관계식을 얻는다. 위의 두 신호 $A(z_1,z_2)$와 $C(z_1,z_2)$에는 reciprocal zero가 없다고 가정했으므로, $A(z_1,z_2)=0$를 만족하는 모든 z_1과 z_2는 모두 $C(z_1,z_2)=0$을 만족하며, 역도 성립한다. 따라서 $A(z_1,z_2)$와 $C(z_1,z_2)$ 사이에는 공통 인수가 존재하며, 다른 인수는 가질 수 없으며, 따라서 $A(z_1,z_2)=C(z_1,z_2)$이어야 한다. 여기에서, 만일 $A(z_1,z_2)\neq1$이면, 위의 조건에 의하여 $A(z_1,z_2)$와 $C(z_1,z_2)$ 사이에는 공통 인수가 존재하게 되고, 이 조건은 우리의 가정에 위배되므로 $A(z_1,z_2)=C(z_1,z_2)=1$ 의 조건을 만족해야한다. 이상을 정리하면

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(z_1,z_2)&=\pm z_1^{-(r_1+r_2)}z_2^{-(s_1+s_2)}\ C_y\ B(z_1^{-1},z_2^{-1})\\&=\pm z_1^{-(r_1+r_2)}z_2^{-(s_1+s_2)}Y(z_1^{-1},z_2^{-1})\\\tilde{Z}(z_1,z_2)&=\pm z_1^{-r_2}z_2^{-s_2}\ C_z\ D(z_1^{-1},z_2^{-1})\\&=\pm z_1^{-r_2}z_2^{-s_2}Z(z_1^{-1},z_2^{-1})\end{aligned}\tag{27}$$

이 얻어지며, 공간 영역 (Spatial domain)에서는

$$\begin{aligned}\tilde{y}(m,n)&=\pm y(r_1+r_2-m,s_1+s_2-n)\\\tilde{z}(m,n)&=\pm z(r_1+r_2-m,s_1+s_2-n)\end{aligned}\tag{28}$$

같은 방법으로 하면 (26)에서도 $B(z_1, z_2) = D(z_1, z_2) = 1$과 $r_1 = r_2 - p_2$, and $s_1 = s_2 - q_2$의 조건을 얻게되고, 따라서

$$\tilde{y}(m, n) = \pm y(r_1 - r_2 + m, s_1 - s_2 + n)$$
$$\tilde{z}(m, n) = \pm z(r_1 - r_2 + m, s_1 - s_2 + n) \quad (29)$$

의 조건이 얻어진다. 따라서 $Y(z_1, z_2)$, $Z(z_1, z_2)$ 가 reciprocal zero를 갖지 않으면, $y(m, n)$, $x(m, n)$, $z(m, n)$ 는 세 신호의 푸리에 크기로부터 모두 부호, 자리이동, 역공간 변환의 모호성 (Ambiguity)을 제외하고는 유일하게 결정된다. 두 신호 사이에 reciprocal zero가 있는 경우에도 유사하게 증명할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 김 우 식, "위상복원문제", 한국통신학회, 정보 통신지, 5월호, pp 53-70, 1993.

[2] S.H. Nawab, T.F. Quatieri, and J. S. Lim, "Signal reconstruction from short-time Fourier transform, magnitudes", IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, VOl. ASSP-31, No. 4, pp 986-998, Aug. 1983.

[3] R.A. Gonsalves, "Phase retrieval by Differential Intensity measurements," J. Opt. Soc. Amer. A, Vol 4, No. 1, pp 166-170, Jan. 1987.

[4] J. W. Wood, M. A. Fiddy, and R. E. Burge, "Phase retrieval using two intensity measurements in the complex plane", Opt. Lett. vol 6, No. 11, pp 514-516, Nov. 1981.

[5] N. Nakajima, "Phase retrieval from two intensity measurements using the Fourier series expansion", J. Opt. Soc. Amer. A. Vol. 4. No.1, pp 154-158, Jan. 1987.

[6] N. Nakajima, "Phase retrieval using the logarithmic Hilbert transform and the Fourier series expansion", J. Opt. Soc. Amer. A. Vol. 5. No.2, pp 257-262, Feb. 1988.

[7] W. Kim and M. H. Hayes, "Phase retrieval Using a Window Function', IEEE Transactions on Signal Processing, ASSP-41, No. 3, pp 1409-1412, March, 1993.

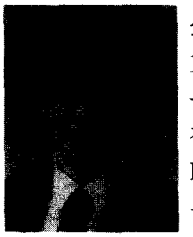
[8] M. H. Hayes, "The Reconstruction of a Multidimensional Sequence from the Phase or Magnitude of Its Fourier Transform," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, April 1982, ASSP-30, No. 2, , pp140 - 154.

[9] M.H. Hayes. and J.H. McClellan, "Reducible Polynomial in More than One Variable", Proceedings of IEEE, VOl 70, No. 2, February 1982, pp197-199.

[10] M.H. Hayes and T. F. Quatieri. "Recursive phase retrieval using boundary conditions", J. Opt. Soc. Am., 73(11):pp1427-1433, November, 1983.

[11] J. R. Fienup, and C. C. Wakerman, "Phase Retrieval stagnation problem and solutions," Journal of Optical Society of America A, 3(11): pp. 1879-1907.

저 자 소 개



金 禹 植(正會員)

1961년 3월 8일생. 1984년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사. 1986년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 공학석사. 1991년 9월. 미국 Georgia Institute of Technology 공학박사. 1992년 9월 - 1993년 12월 서울대학교 의과대학부설 의공학 연구소 특별연구원. 1993년 12월 - 1996년 2월한국통신 연구개발원 무선통신개발단 선임연구원. 1996년 3월 - 현재 명지대학교 전자정보통신공학부 조교수. 주관심분야 : 신호처리 및 응용, 통신 (ADSL/VDSL, 이동통신 등), 의공학