

論文98-35S-11-7

TSK퍼지모델로부터 TSK퍼지제어기의 설계

(Design of TSK Fuzzy Controller Based on TSK Fuzzy Model)

姜 根 澤 * , 李 遠 昌 *

(Geuntaek Kang and Wonchang Lee)

요 약

본 논문은 TSK퍼지모델로부터 폐루프의 안정성을 보장하며 그 응답을 자유로이 지정할 수 있는 퍼지제어기와 그 제어기의 설계 방법을 제안한다. 본 논문에서는 퍼지규칙의 선형식이 상수항이 포함되는 affine 방정식으로 된 일반적인 형태의 TSK퍼지모델을 다룬다. 본 논문에서는 제안되는 TSK퍼지제어기는, 선형시스템에서 사용되는 극배치(pole placement)법을 사용하여 설계될 수 있으며, 폐루프의 응답이 원하는 안정된 선형시스템의 거동과 동일하게 되도록 하며, 제어 목표를 바꿀 수 있도록 하며, 적분제어도 가능하게 한다. 시뮬레이션을 통해 제안한 퍼지제어기가 유효함을 보인다. 본 논문에서는 연속시스템과 이산시스템 모두에 대해 설명한다.

Abstract

This paper suggests a method designing the TSK fuzzy controller based on the TSK fuzzy model, which guarantees the stability of the closed loop system and makes the response of the closed loop system to be a desired one. This paper deals with the general type of TSK fuzzy model of which consequents are affine equations having a constant term. The TSK fuzzy controller suggested in this paper is designed by using the pole placement which developed for the linear systems and makes the closed loop system have the same behavior as a desired linear system. A reference input can be introduced to the suggested TSK fuzzy controller and an integral action also can be introduced. Simulation results reveal that the suggested methods are practically feasible. This paper deals with both the continuous systems and the discrete systems.

I. 서 론

퍼지집합 이론이 다음과 같은 언어적 규칙의 형태로 제어에 맨 처음 적용된 것은 1974년이다.

if z_1 is F_1 , z_2 is F_2 , ..., z_m is F_m then y is Y (1)

위 규칙에서 F_1, F_2, \dots, F_m 와 Y 는 퍼지집합이

다. 위 형태의 퍼지제어기는 그 후 많이 성공적으로 응용되어 왔다. 위의 퍼지제어기는 숙련가의 정성적인 지식을 표현하는데 매우 유용하다. 이에 반해 TSK퍼지모델은 다음과 같이 결론부가 선형식인 퍼지 규칙들로 구성되어 있다^[1].

if z_1 is F_1 , z_2 is F_2 , ..., z_m is F_m then $y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ (2)

위의 TSK퍼지규칙은 전제부에서 정해지는 퍼지부분 공간에서의 입출력관계를 결론부의 선형식에서 표현하고 있다. 이러한 퍼지규칙들로 구성되는 TSK퍼지모

* 正會員, 釜慶大學校 電子工學科,

(Department of Electronic Engineering, Pukyong National University)

接受日字: 1998年5月22日, 수정완료일: 1998年10月21日

델은 비선형 모델의 하나이며 적은 수의 규칙들로 비선형 시스템을 매우 잘 표현할 수 있다.^[2,3,4,5,6] 또한 TSK퍼지모델은 시스템의 입출력 데이터를 이용하여 인식되어질 수 있다^[7]. 따라서 TSK퍼지모델로부터 안정성을 보장하는 제어기를 설계하는 방법이 있으면 비선형시스템의 제어기를 체계적으로 설계할 수 있게 된다. 이에 관하여 이제까지 여러 연구가 발표되었다.^[8,9,10,11,12,13,14,15,16] 그러나 이제까지 발표된 연구는 모두 다음과 같이 결론부의 선형식이 상수항을 갖고 있지 않는 특수한 형태의 TSK퍼지규칙들로 구성되는 TSK퍼지모델을 다루고 있다.

$$\text{if } z_1 \text{ is } F_1, z_2 \text{ is } F_2, \dots, z_m \text{ is } F_m \text{ then } sx(t) = Ax(t) \quad (3)$$

위에서 $x(t)$ 는 상태벡터이며 A 는 상태천이행렬이며

$$sx(t) = \begin{cases} x(t+1), & \text{이산시스템} \\ \frac{dx(t)}{dt}, & \text{연속시스템} \end{cases} \quad (4)$$

식 (3)의 퍼지규칙은 식 (2)의 퍼지규칙에서 $a_0=0$ 일 때에 해당하며, 그러한 퍼지규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델은 비선형시스템을 매우 정밀하게 표현할 수가 없다. 본 논문에서는 식 (2)의 퍼지규칙 또는 다음과 같이 결론부가 affine 방정식인 퍼지규칙을 다루고자 한다.

$$\text{if } z_1 \text{ is } F_1, z_2 \text{ is } F_2, \dots, z_m \text{ is } F_m \text{ then } sx(t) = Ax(t) + c \quad (5)$$

위 식에서 c 는 상수벡터이다.

본 논문의 목적은 식 (2) 또는 식 (5)와 같은 TSK 퍼지규칙들로 구성되는 TSK퍼지모델로부터 페루프의 안정성을 보장하며 그 응답을 자유로이 지정할 수 있는 퍼지제어기와 그 제어기의 설계 방법을 제안하는 것이다.

TSK퍼지모델로부터 설계되는 제어기에 대해 이제까지 연구된 것은 대부분이 Lyapunov 함수를 사용하는 것으로 설계가 복잡하면서 페루프의 응답도 마음대로 지정할 수가 없었다. 본 논문에서는 선형시스템에서 사용되는 극배치(pole placement)를 TSK퍼지모델의 제어에 사용하여, 페루프의 응답이 원하는 안정된 선형시스템과 동일하게 되도록 하는 퍼지제어기와 그 설계방법을 제안한다. 본 논문에서는 연속시스템과 이산시스템 모두에 대해 설명한다. 또한 본 논문에서는 1입력 1출력 시스템을 다루지만 본 논문에서 제안

되는 방법은 다변수 시스템에도 적용 가능하다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II장에서 TSK퍼지 입출력모델과 TSK퍼지 상태변수모델을 설명한다. III장에서 TSK퍼지제어기에 대해 설명한다. III-1절에서는 TSK퍼지 입출력모델에서 설계되는 퍼지제어기를, III-2절에서는 TSK퍼지 상태변수모델에서 극배치법을 이용하여 설계되는 퍼지제어기를, III-3절에서는 적분제어에 대하여 각각 설명한다. 마지막으로 IV장에서 결론을 맺는다.

II. TSK 퍼지모델

1. TSK퍼지 입출력 모델

TSK퍼지 입출력 모델은 다음과 같은 TSK퍼지 규칙들로 구성된다.

$$M^i: \text{if } z_1 \text{ is } F_1^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i \text{ then } y^i = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n \quad (6)$$

여기서 M^i 은 모델의 i 번째 규칙임을 뜻하고, z_j 는 전제부 변수, F_j^i 는 z_j 위의 한 퍼지집합, x_j 은 결론부 변수, a_j^i 는 결론부 파라미터, y^i 는 규칙 M^i 로부터의 출력을 각각 뜻한다. 출력 y 는 다음과 같이 구한다.

$$y = \frac{\sum_i w^i(z) y^i}{\sum_i w^i(z)} \quad (7)$$

여기서 r 은 규칙의 개수이며 $w^i(z)$ 는 i 번째 규칙의 적합도를 나타내며 다음과 같이 구한다.

$$w^i(z) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j) \quad (8)$$

여기서 $F_j^i(z_j)$ 는 퍼지집합 F_j^i 에서 z_j 의 멤버십치이다. TSK퍼지 모델은 시스템의 입출력 데이터를 이용하여 인식되어 진다.

예제 1: 구간 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에서 $\sin \theta$ 의 퍼지모델을 구하였다. $\sin \theta$ 로부터 151개의 입출력 데이터를 만들어 인식용 데이터로 사용하였다. 인식된 퍼지모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{if } \theta \text{ is } F_1 \text{ then } \sin \theta^1 = -2.915 - 0.928\theta \\ M^2: & \text{if } \theta \text{ is } F_2 \text{ then } \sin \theta^2 = 0.292\theta \\ M^3: & \text{if } \theta \text{ is } F_3 \text{ then } \sin \theta^3 = 2.915 - 0.928\theta \end{aligned} \quad (9)$$

퍼지집합 $F_1 \sim F_3$ 은 그림 1에 보인다. 그림 2에서는

식 (9)의 퍼지모델의 출력과 $\sin \theta$ 의 비교를 보인다.

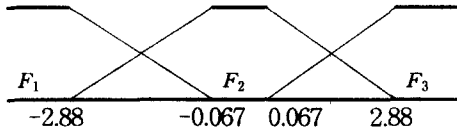


그림 1. 식 (9) 퍼지모델의 퍼지집합
Fig. 1. The fuzzy sets in the fuzzy model (9).

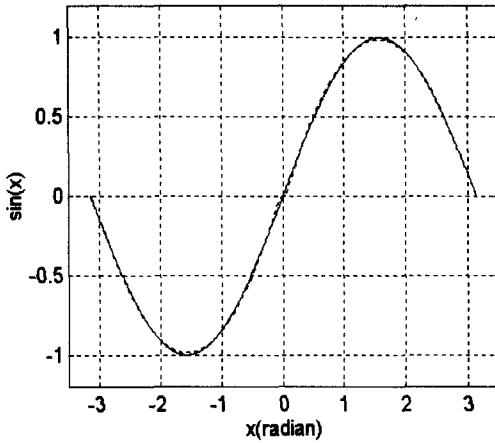


그림 2. 식 (9) 퍼지모델과 $\sin \theta$
Fig. 2. $\sin \theta$ and outputs of the fuzzy model (9).

다음의 예제 2와 예제 3은 neural networks 인식의 예제로 사용되었던 것이다^[17].

예제 2 : 인식 대상의 시스템은 다음과 같다.

$$y(k+1) = f(y(k), y(k-1)) + u(k) \quad (10)$$

여기서

$$f(y(k), y(k-1)) = \frac{y(k)y(k-1)(y(k)+2.5)}{1+y(k)^2+y(k-1)^2} \quad (11)$$

위 $f(y(k), y(k-1))$ 의 퍼지모델을 인식하였다. 인식에 사용된 데이터는, 구간 $[-2, 2]$ 에 랜덤하게 분포한 $u(k)$ 를 식 (16)에 입력하여 구하였으며 그 갯수가 500개이다. 인식된 퍼지모델은 다음과 같다.

- M^1 : if $y(k-1)$ is A_1 and $y(k)$ is B_1
then $y(k+1)^1 = 0.449 + 0.071y(k) - 0.09y(k-1)$
- M^2 : if $y(k-1)$ is A_1 and $y(k)$ is B_2
then $y(k+1)^2 = -2.418 + 0.669y(k) + 0.438y(k-1)$
- M^3 : if $y(k-1)$ is A_2 and $y(k)$ is C_1
then $y(k+1)^3 = -0.426 - 0.142y(k) - 0.147y(k-1)$
- M^4 : if $y(k-1)$ is A_2 and $y(k)$ is C_2
then $y(k+1)^4 = 3.672 - 1.354y(k) + 1.273y(k-1)$

- M^5 : if $y(k-1)$ is A_3 and $y(k)$ is D_1
then $y(k+1)^5 = 0.479 + 0.371y(k) - 0.319y(k-1)$
 - M^6 : if $y(k-1)$ is A_3 and $y(k)$ is D_2
then $y(k+1)^6 = 0.497 + 0.581y(k) + 0.099y(k-1)$
- (12)

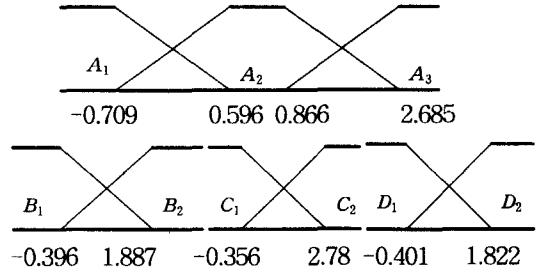


그림 3. 식 (12) 퍼지모델의 퍼지집합
Fig. 3. The fuzzy sets in the fuzzy model (12).

그림 3에 전제부의 퍼지집합을 보이며, 그림 4에서는 $u(k) = \sin(2\pi k/25)$ 일 때 퍼지모델의 출력과 실제 시스템의 출력을 비교하여 보인다. TSK퍼지모델의 결론부 선형식에 상수항이 필요함을 보이기 위하여, 식 (11) $f(y(k), y(k-1))$ 에 대해 결론부 선형식에 상수항이 없는 퍼지모델을 인식하여 결론부에 상수항이 있는 모델인 식(12)의 퍼지모델과 비교하여 보았다. 똑같은 인식용 데이터를 이용하여 인식된 결론부 선형식에 상수항이 없는 퍼지 모델은 다음과 같다.

- M^1 : if $y(k-1)$ is A_1 and $y(k)$ is B_1
then $y(k+1)^1 = -0.433y(k) - 0.167y(k-1)$
 - M^2 : if $y(k-1)$ is A_1 and $y(k)$ is B_2
then $y(k+1)^2 = -0.425y(k) + 1.23y(k-1)$
 - M^3 : if $y(k-1)$ is A_2 and $y(k)$ is C_1
then $y(k+1)^3 = 0.498y(k) + 0.013y(k-1)$
 - M^4 : if $y(k-1)$ is A_2 and $y(k)$ is C_2
then $y(k+1)^4 = 0.002y(k) + 1.76y(k-1)$
 - M^5 : if $y(k-1)$ is A_3 and $y(k)$ is D_1
then $y(k+1)^5 = -0.031y(k) - 0.064y(k-1)$
 - M^6 : if $y(k-1)$ is A_3 and $y(k)$ is D_2
then $y(k+1)^6 = 0.376y(k) + 0.429y(k-1)$
- (13)

인식용 데이터에 대한 오차 제곱 합의 평방근은 식 (12) 퍼지모델의 경우 0.0384인데 반해 식 (13)의 퍼지모델은 0.1128로 훨씬 높았다. 입력 $u(k)$ 를 구간 $[-2, 2]$ 에서 랜덤한 값을 하도록 하였을 때, 식 (10)의 원래 시스템의 출력, $f(y(k), y(k-1))$ 대신 식 (12)의 퍼지모델을 사용했을 때 출력, $f(y(k), y(k-1))$ 대신 식 (13)의 퍼지모델을 사용했을 때 출력 등을 그림 4

에 보인다. 그림 4에서, TSK퍼지모델의 결론부 선형식에 상수항이 없을 경우 시스템을 정확히 표현하기가 어려움을 알 수 있다.

예제 3: 인식 대상의 시스템은 다음과 같다.

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1) + u(k)}{(1+y(k-2))^2 + y(k-1)^2} \quad (14)$$

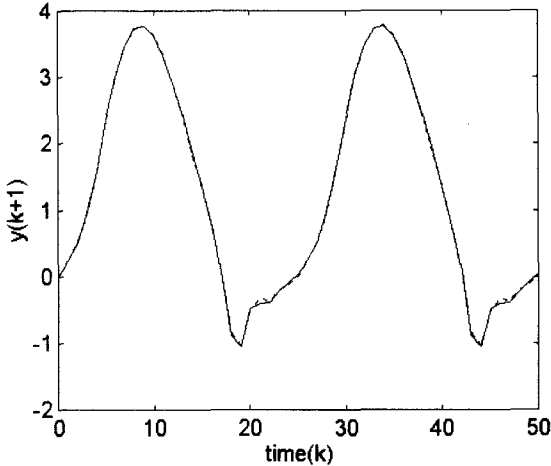


그림 4. 식 (12) 퍼지모델의 출력과 식 (10) 플랜트의 출력

Fig. 4. Outputs of the plant and the fuzzy model (12).

구간 $[-1, 1]$ 에 분포한 랜덤한 $u(k)$ 를 식 (14)에 입력하여 구한 800개의 데이터를 이용하여 퍼지모델을 인식하였으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_1 \text{ and } y(k-2) \text{ is } B_1 \text{ then } y(k+1)^1 = 0.008 \\ & + 0.974y(k) + 0.333y(k-1) - 0.279y(k-2) + 0.494u(k) - 0.468u(k-1) \\ M^2: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_1 \text{ and } y(k-2) \text{ is } B_2 \text{ then } y(k+1)^2 = 0.021 \\ & - 0.030y(k) + 0.058y(k-1) + 0.127y(k-2) + 0.419u(k) + 0.029u(k-1) \\ M^3: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k-2) \text{ is } C_1 \text{ then } y(k+1)^3 = 0.004 \\ & - 0.173y(k) + 0.211y(k-1) + 0.009y(k-2) + 0.619u(k) + 0.111u(k-1) \\ M^4: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k-2) \text{ is } C_2 \text{ then } y(k+1)^4 = 0.002 \\ & - 0.012y(k) + 0.005y(k-1) + 0.007y(k-2) + 0.977u(k) + 0.007u(k-1) \\ M^5: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k-2) \text{ is } C_3 \text{ then } y(k+1)^5 = 0.003 \\ & - 0.099y(k) + 0.011y(k-1) - 0.020y(k-2) + 0.587u(k) + 0.058u(k-1) \\ M^6: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_3 \text{ and } y(k-2) \text{ is } D_1 \text{ then } y(k+1)^6 = -0.003 \\ & - 0.062y(k) + 0.010y(k-1) - 0.192y(k-2) + 0.380u(k) + 0.079u(k-1) \\ M^7: & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_3 \text{ and } y(k-2) \text{ is } D_2 \text{ then } y(k+1)^7 = -0.112 \\ & + 0.131y(k) - 0.001y(k-1) + 0.144y(k-2) + 0.382u(k) - 0.138u(k-1) \end{aligned} \quad (15)$$

그림 6에 전제부의 퍼지집합을 보인다. 입력을 $k \leq 500$ 에서는 $u(k) = \sin(2\pi k/250)$ 로 하고 $k > 500$ 에서는 $u(k) = 0.8\sin(2\pi k/250) + 0.2\sin(2\pi k/25)$ 로 하였을 때 퍼지모델의 출력과 시스템의 출력을 그림 7에 보인다. 그림 7에 보이는 퍼지 모델의 출력은 문헌^[17]에서 제시한 neural networks의 출력보다 훨씬 나은 모양을 하고 있다. 식 (15)의 퍼지모델은 54개의 파라미터(전제부의 12개와 결론부의 42개)를 갖고 있지만, 문헌^[17]의 neural networks는 2개의 hidden layer를 갖고 있으며 341개의 weight들이 인식되어야 한다.

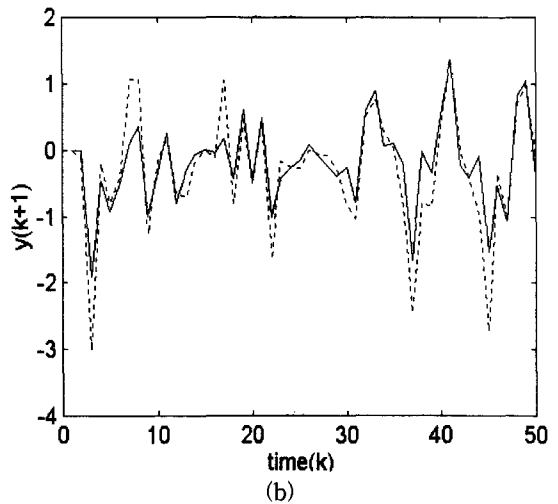
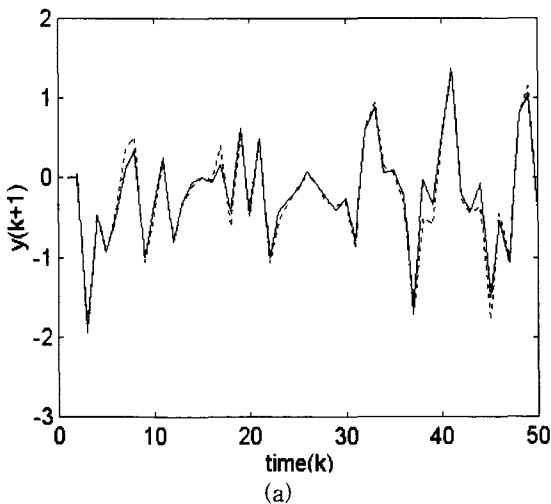


그림 5. 퍼지모델 결론부 선형식에 상수항이 있는 경우와 없는 경우의 비교 실선: 식 (11) 플랜트 출력, 점선: 퍼지모델 출력 (a) 식(12) 상수항이 있는 퍼지모델, (b) 식 (13) 상수항이 없는 퍼지모델

Fig. 5. Comparison of the fuzzy model having a constant term in consequents with the fuzzy model not having a constant term. solid line: Outputs of the plant (11), dashed line: Outputs of fuzzy model. (a) the fuzzy model (12) having a constant term (b) the fuzzy model (13) not having a constant term

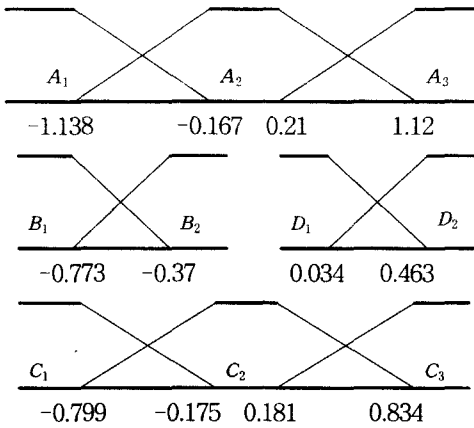


그림 6. 식 (15) 퍼지모델의 퍼지집합
Fig. 6. The fuzzy sets in the fuzzy model (15).

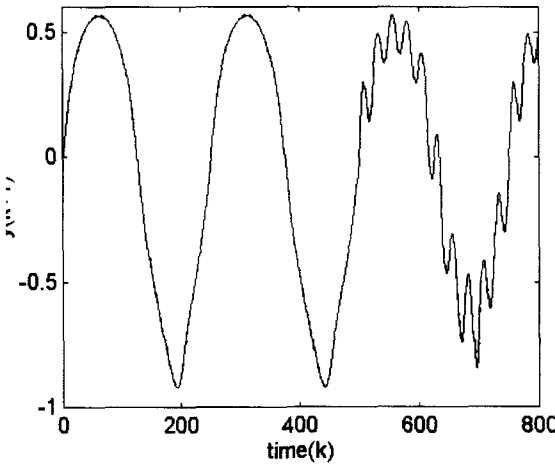


그림 7. 식 (15) 퍼지모델의 출력과 식 (14) 플랜트의 출력
Fig. 7. Outputs of the plant (14) and the fuzzy model (15).

2. TSK퍼지 상태변수모델

여기서는 시스템의 입출력 데이터로부터 인식된 TSK퍼지 입출력모델을 TSK퍼지 상태변수모델로 바꾸는 방법에 대하여 설명한다. 일반적으로 TSK퍼지 입출력모델은 결론부의 선형식에 상수항이 있으므로 TSK퍼지 상태변수모델의 상태방정식도 상수항을 갖게 된다.

(1) 이산 시스템의 TSK퍼지 상태변수모델

이산 시스템의 일반적인 TSK퍼지 입출력모델의 i 번째 규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다

$$M^i: \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(k) \text{ is } F_n^i \\ \text{ then } y^i(k+1) = a_0^i + a_1^i y(k) + a_2^i y(k-1) + \dots + a_n^i y(k-n+1) \\ + b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) + \dots + b_m^i u(k-m+1) \quad (16)$$

여기서

$$x_1(k) = y(k), x_2(k) = y(k-1), \dots, x_n(k) = y(k-n+1), \\ d_1^i(k) = a_0^i + b_2^i u(k-1) + \dots + b_m^i u(k-m+1).$$

라 하자. 그러면 식 (16)의 퍼지규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^i: \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(k) \text{ is } F_n^i \\ \text{ then } x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \\ y(k+1) = cx(k+1) \quad (17)$$

여기서

$$A^i = \begin{pmatrix} a_1^i & a_2^i & \dots & a_n^i \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ b^i = (b_1^i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ d^i(k) = (d_1^i(k) \ 0 \ \dots \ 0)^T \\ c = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

식 (17) 형태의 퍼지규칙을 지금부터 *TSK fuzzy canonical form* 라고 한다. 식 (16)의 퍼지 모델과 식 (17)의 퍼지모델이 서로 동일함은 쉽게 확인 할 수 있다.

(1) 연속 시스템의 TSK퍼지 상태변수모델

연속 시스템의 일반적인 TSK퍼지 입출력모델의 i 번째 규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다

$$M^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(t) \text{ is } F_n^i \\ \text{ then } \frac{d^n x(t)}{dt^n} = a_0^i + a_1^i x(t) + a_2^i \frac{dx(t)}{dt} + \dots + a_n^i \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + b^i u(t) \quad (18)$$

여기서 $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$

라자. 그러면 상태변수 표현은 다음과 같다.

$$M^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(t) \text{ is } F_n^i \\ \text{ then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + b^i u(t) + d^i \\ y(t) = cx(t) \quad (19)$$

여기서

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^i & a_2^i & \dots & \dots & a_n^i \end{pmatrix} \\ b^i = (0 \ \dots \ 0 \ b^i)^T$$

$$d^i = (0 \cdot \dots \cdot 0 \ a_0^i)^T$$

$$c = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

식 (18)의 퍼지모델과 식 (19)의 퍼지모델이 동일함은 쉽게 알 수 있다. 식 (19) 형태의 퍼지규칙도 TSK fuzzy canonical form. 라고 부른다.

주의: 식 (17) 또는 식 (19)의 TSK 퍼지 canonical form 형태로 표현한 TSK퍼지 상태변수모델은 모든 i 에 대해 $b_i \neq 0$ 일 경우 가제어(controllable)임을 쉽게 알 수 있다.

III. TSK 퍼지모델로 부터 설계되는 TSK 퍼지제어기

이 단원에서는 TSK퍼지 모델로부터 폐루프 시스템의 안정성을 보장하는 퍼지 제어기와 그 설계방법을 제안한다. 이 단원에서 제안하는 퍼지 제어기를 TSK 퍼지 제어기라 부른다.

TSK퍼지 모델은 TSK퍼지 규칙들로 구성되며, 여러 선형 시스템에 각 선형 시스템에 해당하는 적합도 q^i 를 곱하여 그 합으로 한 비선형 시스템을 다음과 같이 표현한다.

$$y = \sum_{i=1}^n q^i \times \text{output from (linear system)}^i$$

따라서, TSK퍼지 제어기로부터 제어 입력을 다음과 같이 구할 경우 폐루프 시스템의 거동을 원하는 대로 만들 수 있음을 기대할 수 있을 것이다.

$$u = \sum_{i=1}^n q^i \times \text{output from (linear controller)}^i$$

여기서 (linear controller)ⁱ는 (linear system)ⁱ로부터 설계되는 제어기이며 q^i 는 q^i 를 변형한 것이다. 따라서 TSK퍼지 제어기의 형태는 TSK퍼지 모델과 같은 수의 TSK퍼지 규칙들로 구성되게 하며, 그 전제부는 TSK퍼지 모델의 전제부와 동일하게 한다. 이 단원에서는, 그림 8에 보이는 것과 같이 폐루프 시스템의 거동이 원하는 안정된 선형 시스템과 동일하게 하도록, TSK퍼지 제어기 결론부의 선형 제어기를 설계하는 방법과 규칙의 변형된 적합도 q^i 의 형태를 구하고자 한다. 본 단원에서는 single-input single-output 시스템에 대해서만 취급하며, 여기서 개발된 방법들은 다변수 시스템에도 적용될 수 있다.

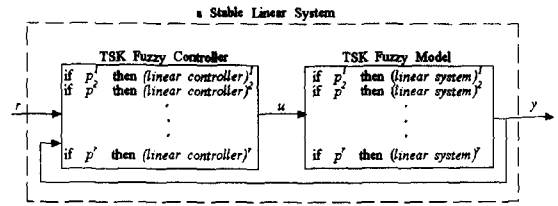


그림 8. TSK 퍼지제어시스템
Fig. 8. The TSK fuzzy control system.

1. TSK퍼지 입출력 모델로부터 설계되는 TSK퍼지 제어기^[18]

일반적인 TSK퍼지 입출력 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$M^i: \text{if } z_1 \text{ is } F_1^i, z_2 \text{ is } F_2^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i$$

$$\text{then } y^i = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u$$

(20)

여기서 u 는 제어입력 변수이며, 모든 i 에 대하여 $z_i \neq u$ 라고 가정한다. 위의 퍼지 모델로부터의 출력은

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n w^i(z)(a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u)}{\sum_{i=1}^n w^i(z)} \quad (21)$$

원하는 출력이 y_d 라고 하자. TSK퍼지 제어기는 TSK퍼지 모델의 각 규칙들로부터 설계된다. TSK퍼지 모델의 i 번째 규칙에 해당하는 TSK퍼지 제어기의 규칙은 다음과 같다.

$$C^i: \text{if } z_1 \text{ is } F_1^i, z_2 \text{ is } F_2^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i$$

$$\text{then } u^i = (y_d - a_0^i - a_1^i x_1 - \dots - a_n^i x_n) / b^i$$

(22)

규칙 C^i 의 전제부는 규칙 M^i 의 전제부와 동일하다. 위의 퍼지 제어기로부터 제어입력 u 를 퍼지모델과 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{w^i(z)}{\sum_{i=1}^n w^i(z)} \right) u^i \quad (23)$$

위의 식에서 구한 제어입력을 사용할 경우 퍼지모델의 출력은 식 (21)으로부터 다음과 같이 원하는 출력 y_d 이 되지 않는다.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n w^i(z)(a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n)}{\sum_{i=1}^n w^i(z)} + \frac{\sum_{i=1}^n w^i(z)b^i}{\sum_{i=1}^n w^i(z)} \frac{\sum_{i=1}^n w^i(z)u^i}{\sum_{i=1}^n w^i(z)}$$

$$\neq y_d \quad (24)$$

그러나 제어입력 u 를 식 (25)와 같이 구하면 퍼지 모델의 출력은 식 (26)와 같이 원하는 출력이 된다.

$$u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{w^i(z) b^i}{\sum_{i=1}^n w^i(z) b^i} \right) u^i \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y &= \left(\sum_{i=1}^n w^i(z) (a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u) \right) / \sum_{i=1}^n w^i(z) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n w^i(z) (a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n) + \sum_{i=1}^n w^i(z) b^i u \right) / \sum_{i=1}^n w^i(z) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n w^i(z) (a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n) + \sum_{i=1}^n w^i(z) b^i u^i \right) / \sum_{i=1}^n w^i(z) \\ &= y_d \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)를 *consistence condition*라 부르며 TSK퍼지 제어기로부터 제어입력을 추론하는 방법으로 사용한다.

예제 4 : 예제 3에서 사용된 식 (14)의 시스템에 대해 퍼지 제어를 설계하였다. 대상 시스템의 퍼지 모델인 식 (15)의 i 번째 규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^i: \text{if } \dots \text{ then } y(k) = a_0^i + a_1^i x(k) + a_2^i x(k-1) + a_3^i x(k-2) + b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) \quad (27)$$

그러면 위의 규칙으로부터 설계되는 퍼지 제어기 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$C^i: \text{if } \dots \text{ then } u^i(k) = (y_d - a_0^i - a_1^i x(k) - a_2^i x(k-1) - a_3^i x(k-2) - b_2^i u(k-1)) / b_1^i \quad (28)$$

여기서 y_d 는 원하는 출력이며 규칙 C^i 의 전제부는 규칙 M^i 의 전제부와 동일하다. 그림 9에 식 (28)의 퍼지규칙들로 구성된 퍼지제어기로부터 구해진 제어입력과, 그 제어입력을 사용하였을 때 대상 플랜트 식 (14)의 출력과 원하는 출력을 보인다. 그림 9에서 원하는 출력 y_d 는 $k \leq 300$ 에서 $0.7 \sin(2\pi k/200)$ 이며 $k > 300$ 에서는 구형파이다.

2. TSK퍼지 상태변수모델로부터 설계되는 TSK퍼지 제어기

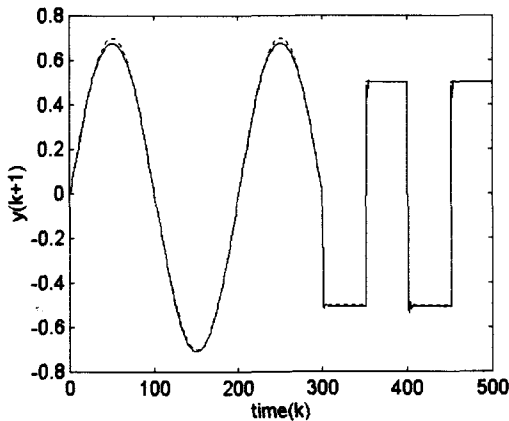
선형제어시스템을 위해 개발된 극(pole) 배치법을 이용하여, TSK퍼지 상태변수모델로부터 TSK퍼지 제어를 설계하는 방법을 설명한다. 제어 목표는 $x=0$ 이며 제어입력은 *consistence condition*을 이용하여 구한다. 그림 10에서와 같이 TSK퍼지 제어기는 원하는 극을 갖는 선형시스템과 같은 응답을 페루프 시스템이 갖도록 설계한다.

(1) 이산 TSK퍼지 제어기

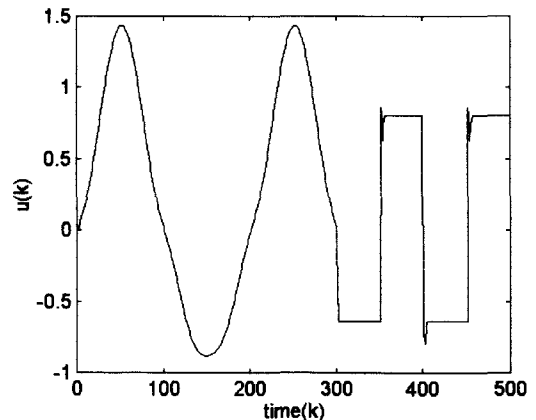
다음과 같은 TSK퍼지 canonical form의 퍼지 모델로부터 퍼지 제어를 설계한다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i \\ & \text{then } x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \\ & y(k+1) = c x(k+1) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 모든 i 에 대하여 $z_i(k) \neq u(k)$ 라 한다. 규칙 M^i 로부터 설계되는 퍼지 제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.



(a)



(b)

그림 9. (a) 실선 : 플랜트 응답, 점선 : 원하는 출력, (b) 제어입력 $u(k)$

Fig. 9. (a) solid line: Responses of the plant, dashed line: The desired output (b) Input $u(k)$.

$$C^i: \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(k) \text{ is } F_n^i \\ \text{then } u^i(k) = -g^i x(k) + g_0^i(k) \quad (29)$$

여기서 $g^i = (g_1^i \ g_2^i \ \dots \ g_n^i)$ 는 $(1 \times n)$ 벡터이며 $g_0^i(k)$ 는 스칼라이며, 규칙 C^i 의 전제부는 규칙 M^i 의 전제부와 동일하다. g^i 와 $g_0^i(k)$ 다음 식들로부터 구해진다.

$$\phi = A^i - b^i g^i \quad (30)$$

$$g_0^i(k) = -\frac{d_1^i(k)}{b_1^i} \quad (31)$$

여기서 ϕ 는 원하는 상태전이 행렬이다. 제어입력 $u(k)$ 는 다음 식과 같이 *consistence condition*에 의해 구해진다.

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^m w^i(z) b_1^i u^i(k)}{\sum_{i=1}^m w^i(z) b_1^i} \quad (32)$$

다음 정리는 위의 TSK퍼지 제어기를 사용할 경우 페루프 시스템의 상태전이행렬을 원하는 것으로 만들 수 있음을 보여준다.

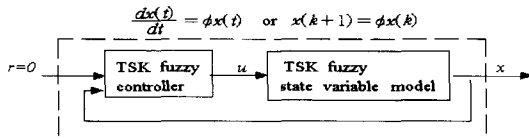


그림 10. TSK 퍼지상태변수모델로부터 설계되는 TSK퍼지제어기 ϕ 는 원하는 상태전이행렬
Fig. 10. TSK fuzzy controller based on a TSK fuzzy state variable model. ϕ is a desired state transition matrix.

정리 : 식 (17)의 규칙들로 구성되는 퍼지모델을 식 (29)의 규칙들로 구성되는 퍼지제어기를 사용하여 제어할 경우, 페루프 시스템의 거동은 상태전이행렬이 원하는 행렬 ϕ 인 선형시스템의 거동과 동일하게 할 수 있다.

증명 :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^m w^i(z) (A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k)) / \sum_{i=1}^m w^i(z) \\ &= (\sum_{i=1}^m w^i(z) (A^i x(k) + d^i(k)) + \sum_{i=1}^m w^i(z) b^i u(k)) / \sum_{i=1}^m w^i(z) \\ &= \sum_{i=1}^m w^i(z) (A^i - b^i g^i) x(k) / \sum_{i=1}^m w^i(z) \\ &= \phi x(k) \end{aligned} \quad (33)$$

■

주의: 원하는 상태전이 행렬이 다음과 같다고 하자.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

그러면 식 (30)을 만족하는 g^i 는 다음과 같다.

$$g_j^i = (a_j^i - \phi_j) / b_1^i \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

예제 5: 예제 3에서 사용된 식 (14)의 시스템에 대해 퍼지 제어기를 설계하였다.

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1)+u(k)}{(1+y(k-2))^2+y(k-1)^2} \quad (14)$$

대상 시스템의 퍼지 모델인 식 (15)의 i 번째 규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^i: \text{if } \dots \text{ then } y^i(k+1) = a_0^i + a_1^i y(k) + a_2^i y(k-1) + a_3^i y(k-2) + b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) \quad (35)$$

위의 규칙을 TSK퍼지 canonical form으로 바꾸면 다음과 같다.

$$M^i: \text{if } \dots \text{ then } \begin{cases} x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \\ y(k+1) = cx(k+1) \end{cases} \quad (36)$$

여기서

$$A^i = \begin{pmatrix} a_1^i & a_2^i & a_3^i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} b_1^i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^i(k) = \begin{pmatrix} a_0^i + b_2^i u(k-1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ c = (1 \ 0 \ 0)$$

원하는 출력을 y_d , 원하는 상태를 $x_d = (y_d \ y_d \ y_d)^T$ 라 하자. 그리고 상태 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{x}(k) = x(k) - x_d \quad (37)$$

그러면 식 (36)의 규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^i: \text{if } \dots \text{ then } \tilde{x}^i(k+1) = A^i \tilde{x}(k) + b^i u(k) + (d^i(k) + A^i x_d - x_d) \quad (38)$$

식 (36)의 규칙들로 구성된 퍼지모델과 식 (38)의 규칙들로 구성된 퍼지모델이 동일함을 다음 식에서 보인다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) + x_d &= \sum_{i=1}^m q^i(k) \tilde{x}^i(k+1) + x_d \\ &= \sum_{i=1}^m q^i(k) (A^i \tilde{x}(k) + b^i u(k) + d^i(k) + A^i x_d - x_d) + x_d \\ &= \sum_{i=1}^m q^i(k) (A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k)) \\ &= x(k+1) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{단 } q^i(k) = w^i(z) / \sum_{i=1}^m w^i(z).$$

식 (38)의 규칙들로 구성된 퍼지모델로부터 위에서 설

명한 극 배치법을 이용하여 설계된 퍼지제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$C^i: \text{ if } \dots \text{ then } u^i(k) = -\frac{(a_1^i - \phi_1 \ a_2^i - \phi_2 \ a_3^i - \phi_3) \tilde{x}(k)}{a_0^i + b_2^i u(k-1) + (a_1^i + a_2^i + a_3^i - 1) y_d} / b_1^i \quad (40)$$

단

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

그림 11에 식 (13)의 플랜트에 위의 퍼지제어기를 사용하였을 경우 플랜트 출력을 보인다. 그림 11에서 원하는 극(pole)은 0.2이며, 원하는 출력 y_d 를 -0.5, -0.3, -0.1, 0.1, 0.3, 0.5로 변화시켰다. 그림 12에서는 여러 극 ($p=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$)에 대하여, 선형시스템 $\tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)$ 의 응답과, 위의 퍼지제어기로 제어된 식 (14) 플랜트의 응답을 보인다.

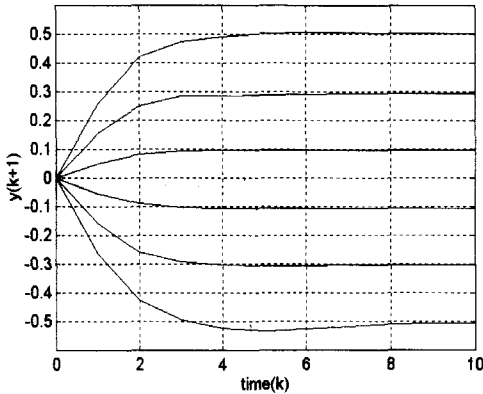


그림 11. 여러 y_d 에 대한 플랜트 응답
Fig. 11. Responses of the plant for various y_d 's.

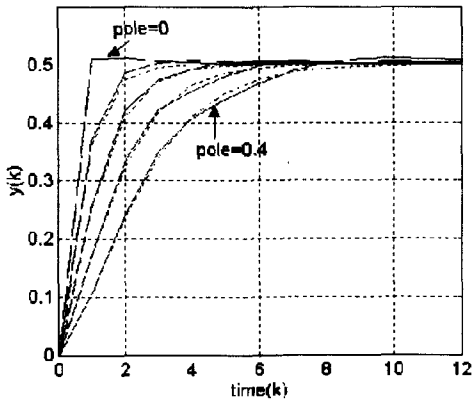


그림 12. 실선 : 플랜트 응답 점선: 선형시스템 $\tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)$ 의 응답
Fig. 12. Solid line: Responses of the plant, dashed line: Responses of the linear system $\tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)$.

(2) 연속 TSK퍼지제어기

연속시간 사스택의 TSK퍼지 제어기의 설계방법은 이산 시스템의 경우와 동일하다. 이산 TSK퍼지 상태 변수모델의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$M^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i \text{ then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + b^i u(t) + d^i \quad (19)$$

$$y(t) = cx(t)$$

여기서 모든 i 에 대하여 $z_i(t) \neq u(t)$ 라자. 모델의 i 번째 규칙 M^i 에 대한 퍼지제어기의 규칙은 다음과 같다.

$$C^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i \text{ then } u^i(t) = -g^i x(t) + g_0^i \quad (41)$$

여기서 g^i 와 g_0^i 는 다음을 만족하도록 한다.

$$\phi = A^i - b^i g^i$$

$$g_0^i = -\frac{a_0^i}{b_1^i}$$

제어입력 $u(t)$ 는 다음의 consistence condition에 의해 구해진다.

$$u(t) = \frac{\sum_i w^i(z) b_1^i u^i(t)}{\sum_i w^i(z) b_1^i} \quad (42)$$

보조정리: 식 (41)의 규칙들로 구성된 퍼지제어기와 식(42)으로 구해진 제어입력으로 식 (19)의 규칙들로 구성된 퍼지모델을 제어할 경우 그 퍼지모델의 거동을 원하는 상태천이행렬 ϕ 를 갖는 선형시스템의 거동과 같게 할 수 있다.

예제 6: 제어 대상은 진자(pendulum)이며 그 동적방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = -f\theta - \frac{m \cdot g}{l} \sin \theta \quad (43)$$

여기서 $\frac{m \cdot g}{l} = 1, f=1$ 라자. 그러면 위의 진자 시스템의 TSK퍼지모델은 식 (9)의 $\sin \theta$ 의 퍼지모델에 의해 다음과 같이진다.

$$M^1: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^1 \text{ then } \frac{dx^1(k)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2.915 \end{pmatrix}$$

$$M^2: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^2 \text{ then } \frac{dx^2(k)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$M^3: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^3 \text{ then } \frac{dx^3(k)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.915 \end{pmatrix} \quad (44)$$

여기서 $x_1(t) = \theta, x_2(t) = \dot{\theta}$ 이다. 원하는 출력을 θ_d , 원하는 상태를 $x_d = (\theta_d \ 0)^T$ 라 하고, 상태오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_d \tag{45}$$

그러면 식 (44)의 퍼지모델은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^1 \text{ then } \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 2.915 \\ 0.928\theta_d \end{pmatrix} \\ M^2: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^2 \text{ then } \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.292\theta_d \end{pmatrix} \\ M^3: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^3 \text{ then } \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -2.915 \\ 0.928\theta_d \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{46}$$

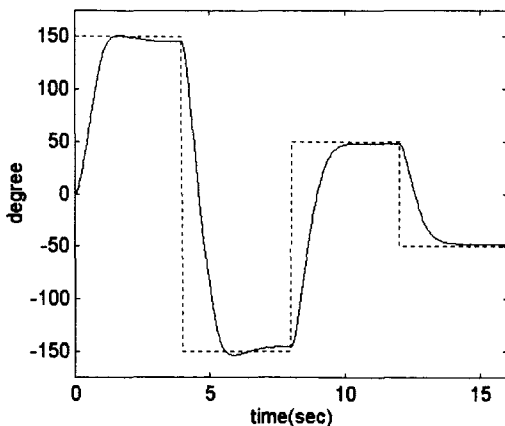
식 (44)의 퍼지모델과 식 (46)의 퍼지모델은 동일한 시스템을 나타낸 것은 쉽게 확인할 수 있다. 식 (46)의 퍼지모델로부터 설계된 퍼지제어기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^1: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^1 \text{ then } u^1(t) = (\phi_1 - 0.928 \ \phi_2 + 1) \tilde{x}(t) - 2.915 - 0.928\theta_d \\ C^2: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^2 \text{ then } u^2(t) = (\phi_1 + 0.292 \ \phi_2 + 1) \tilde{x}(t) + 0.292\theta_d \\ C^3: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^3 \text{ then } u^3(t) = (\phi_1 - 0.928 \ \phi_2 + 1) \tilde{x}(t) + 2.915 - 0.928\theta_d \end{aligned} \tag{47}$$

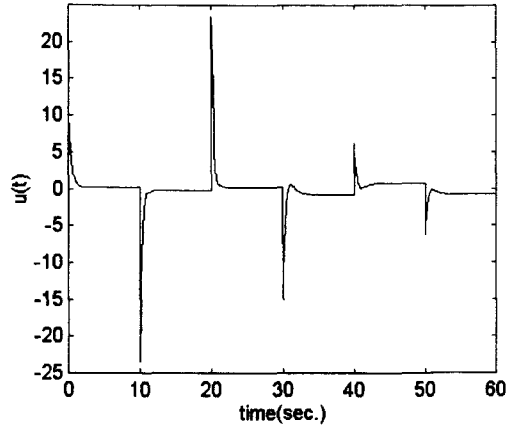
여기서

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix}$$

원하는 출력 y_d 가 구형파이고 원하는 극(pole)을 $p = -2$ 로 하였을 때, 식 (47)의 퍼지제어기로 제어된 식 (43) 플랜트의 응답을 그림 13에 보인다. 그림 14에서는 원하는 극(pole)을 $p = -0.7, -1, -2, -4$ 와 같이 여러 값들로 바꿔가며 설계된 퍼지제어기로 제어된 식 (43) 플랜트의 응답과 선형시스템 $\tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)$ 의 응답을 비교하여 보인다.



(a)



(b)

그림 13. (a) 실선 : 플랜트 응답, 점선: 원하는 출력, (b) 제어입력
Fig. 13. (a) Solid line: Responses of the plant, dashed line: The desired output (b) Control input.

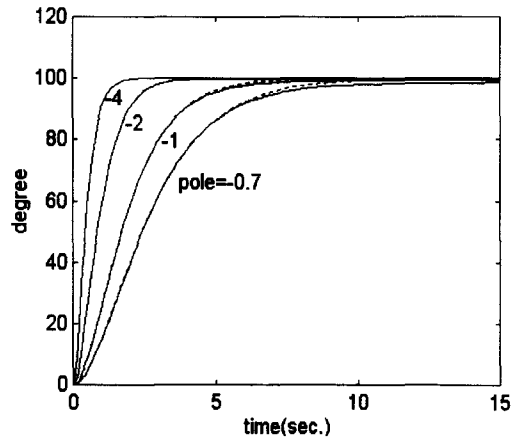


그림 14. 실선 : 플랜트 응답, 점선: 선형시스템 $\tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)$ 의 응답
Fig. 14. Solid line: Responses of the plant, dashed line: Responses of the linear system $\tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)$.

예제 7: 제어 대상은 cart-pole 시스템이며 문헌 [14]에서 사용된 예이다. 그 동적방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \cos \theta \left(\frac{-u - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta}{m_c + m} \right)} \tag{48}$$

여기서 $g = 9.8 \text{ m/s}^2, m_c = 1.0 \text{ kg}, m = 0.1 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}$

라 하자. 퍼지제어기를 설계하기 위하여 먼저 플랜트의 TSK퍼지모델을 인식하였다. 인식에 사용된 데이터는 구간 $[-\pi, \pi]$, $[-40, 40]$, $[-100, 100]$ 에서 각각 랜덤하게 만든 $\theta, \dot{\theta}, u$ 를 식 (48)의 플랜트에 대입하여 구하였으며 그 개수는 850개 이다. 인식된 퍼지모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M^1: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^1 \text{ then } \ddot{\theta}^1(t) = -30.196 - 9.3\theta(t) + 2.065u(t) \\
 M^2: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^2 \text{ then } \ddot{\theta}^2(t) = -16.303 + 0.4\theta(t) + 0.989u(t) \\
 M^3: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^3 \text{ then } \ddot{\theta}^3(t) = -6.311 + 10.318\theta(t) - 0.985u(t) \\
 M^4: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^4 \text{ then } \ddot{\theta}^4(t) = 19.112\theta(t) - 2.027u(t) \\
 M^5: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^5 \text{ then } \ddot{\theta}^5(t) = 6.311 + 10.318\theta(t) - 0.985u(t) \\
 M^6: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^6 \text{ then } \ddot{\theta}^6(t) = 16.303 + 0.4\theta(t) + 0.989u(t) \\
 M^7: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^7 \text{ then } \ddot{\theta}^7(t) = 30.196 - 9.3\theta(t) + 2.065u(t)
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

위의 퍼지모델의 전제부 퍼지집합은 그림 15에 보인다. 상태변수를 $x(t) = (\theta(t) \ \dot{\theta}(t))^T$ 로 하고, 원하는 상태변수값을 $x_d = (\theta_d \ 0)^T$ 상태오차를 $\tilde{x}(t) = x(t) - x_r$ 라 하자. 그리고 위의 퍼지모델의 i 번째 규칙을 다음과 같이 표현하자.

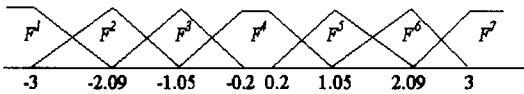


그림 15. 식(49) 퍼지모델의 퍼지집합
Fig. 15. The fuzzy sets in the fuzzy model (49).

$$M^i: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^i \text{ then } \ddot{\theta}^i(t) = a_0^i + a_1^i\theta(t) + b^i u(t)
 \tag{50}$$

위의 퍼지규칙을 상태변수모델로 변환시키면 다음과 같은 형태가 된다.

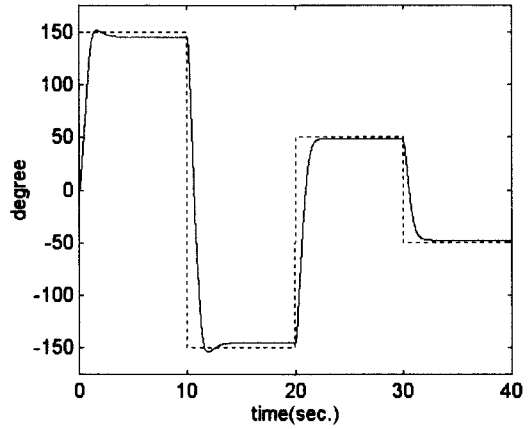
$$M^i: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^i \text{ then } \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1^i & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b^i \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ a_0^i + a_1^i\theta_d \end{pmatrix}
 \tag{51}$$

위의 퍼지모델 규칙으로부터 설계되는 퍼지제어기 규칙은 다음과 같다.

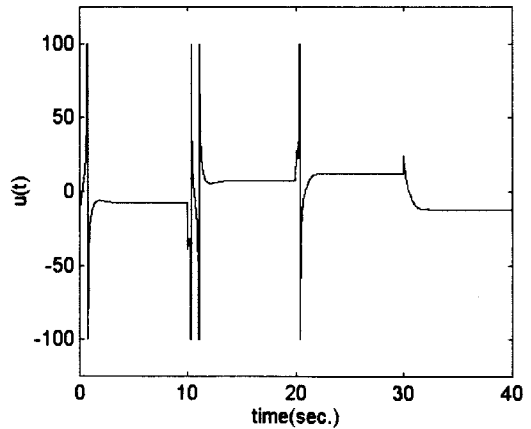
$$C: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^i \text{ then } u^i(t) = -((a_1^i - \phi_1 - \phi_2)\tilde{x}(t) + a_0^i + a_1^i\theta_d) / b^i
 \tag{52}$$

원하는 출력 y_d 가 구형파이고 원하는 극(pole)을 $p = -3$ 로 하였을 때, 식 (52)의 퍼지규칙들로 구성된 퍼지제어기로 제어된 식 (48) 플랜트의 응답을 그림 16에 보인다. 그림 16의 제어에서 제어입력은 구간 $[-$

$100 \ 100]$ 으로 제한하였다. 그림 17에서는 원하는 극(pole)을 $p = -2, -3, -4, -6$ 과 같이 여러 값들로 바꿔가며 설계된 퍼지제어기로 제어된 식 (46) 플랜트의 응답과 선형시스템 $\tilde{x}(k+1) = \Phi\tilde{x}(k)$ 의 응답을 비교하여 보인다.



(a)



(b)

그림 16. (a) 실선: 플랜트 응답, 점선: 원하는 출력
(b) 제어입력
Fig. 16. (a) Solid line: Responses of the plant, dashed line: The desired output (b) Control input.

문헌 [14]에서는 식(48)의 플랜트를 결론부에 상수항이 없는 TSK퍼지모델로 표현하고 그 모델로부터 Lyapunov 함수를 사용하는 방법으로 퍼지제어기를 설계하였다. 문헌 [14]에서 설계된 퍼지제어기도 결론부에 상수항이 없어 항상 $x=0$ 가 되도록 제어한다. 따라서 제어 목표를 바꿀 수가 없다. 또한 문헌 [14

에서는 페루프 시스템의 천이 응답을 마음대로 조정할 수가 없다. 그에 반해 본 논문에서 제안한 방법은 상태 오차가 0이 되도록 제어하므로 제어 목표를 마음대로 바꿀 수가 있으며, 페루프 시스템의 pole을 마음대로 지정할 수 있으므로 페루프 시스템의 천이 응답을 원하는 대로 할 수가 있다.

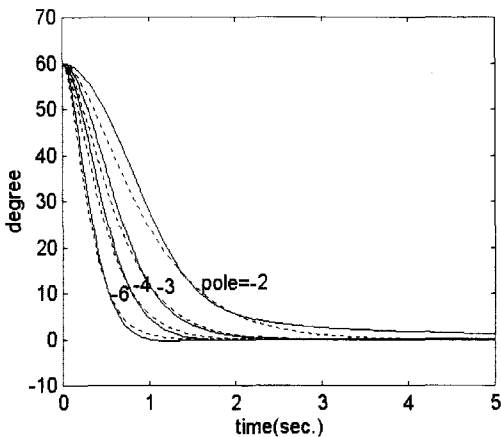


그림 17. 실선 : 플랜트 응답 점선: 선형시스템 $\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$ 의 응답
Fig. 17. Solid lines: Responses of the plant, dashed lines: Responses of the linear system $\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$.

3. 적분제어가 첨가된 TSK퍼지 제어기

시스템에 일정한 외란이 작용하든지 플랜트의 모델에 오차가 있는 경우 등에서는 정상상태 오차가 발생하며 그러한 경우 일반적으로 적분제어를 사용하여 그 정상상태 오차를 제거한다. 본 절에서는 선형제어 시스템에서 개발된 적분제어가 TSK퍼지제어에서도 사용될 수 있음을 보인다. 적분제어의 기본방법은 모델의 기존 상태변수에 적분 상태변수를 추가시키는 것이다.

(1) 이산 시스템

다음 식을 만족하는 적분상태변수 x_I 를 상태변수에 추가시킨다.

$$\begin{aligned} x_I(k+1) &= x_I(k) + y(k) \\ &= x_I(k) + cx(k) \end{aligned} \tag{53}$$

그러면 식 (17)의 퍼지규칙은 다음과 같이된다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_r(k) \text{ is } F_r^i \\ & \text{ then } \begin{pmatrix} x^i(k+1) \\ x_I(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^i \\ 0 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} d^i(k) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & y(k+1) = cx(k+1) \end{aligned} \tag{54}$$

식 (54)의 퍼지규칙들로 구성되는 퍼지모델과 식 (17)의 퍼지규칙들로 구성되는 퍼지모델이 동일함은 쉽게 알 수 있다. 적분제어가 포함되는 퍼지제어기는 식 (54)의 규칙으로부터 앞 절에서 설명한 극 배치법을 이용하여 퍼지제어기를 설계하면 된다.

예제 8: 예제 5에서 사용된 식 (14)의 시스템에 대해 적분제어가 첨가된 TSK퍼지 제어기를 설계한다. 식 (38)의 퍼지규칙에 적분상태변수를 첨가하면 다음과 같이 된다.

$$M^i: \text{ if } \dots \text{ then } \begin{pmatrix} \tilde{x}^i(k+1) \\ x_I(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(k) \\ x_I(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^i \\ 0 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} d^i(k) + A^i x_a - x_a \\ 0 \end{pmatrix} \tag{55}$$

위의 퍼지규칙에서 설계되는 퍼지제어기의 규칙은 다음과 같다.

$$C^i: \text{ if } \dots \text{ then } u^i(k) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_j - a_j) \tilde{x}(k) + \phi_1 x(k) - b_2^i u(k-1) - a_0^i + (1 - \sum_{j=1}^n a_j^i) y_a}{b_1^i} \tag{56}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

원하는 $y_a = 0.3$ 이고 $k=20$ 부터 $w=0.2$ 의 외란이 플랜트에 첨가되었을 때 위의 퍼지제어기로 제어된 식 (14)의 플랜트의 출력을 그림 18에 보인다.

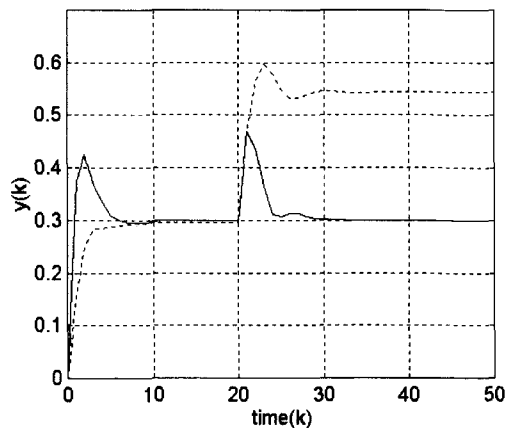


그림 18. 실선 : 적분제어가 있을 때 응답, 점선: 적분제어가 없을 때 응답

Fig. 18. Solid line: Response with an integral control action. dashed line: Response with no integral action.

(2) 연속 시스템

연속 시스템에 대한 적분제어 방법은 이산 시스템의 경우와 동일하다. 다음 식을 만족하는 적분상태변수를 첨가한다.

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = y(t) = cx(t) \quad (57)$$

그러면 식 (19)의 퍼지규칙은 다음과 같아진다.

$$M^1: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(t) \text{ is } F_n^i \\ \text{ then } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & A^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b^i \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ d^i(t) \end{pmatrix} \quad (58) \\ y(t) = cx(t)$$

앞 절에서 설명한 극 배치 방법으로 위의 퍼지규칙으로부터 TSK퍼지제어기를 설계하면 된다.

예제 9 : 예제 6에서 설명한 식 (43)의 진자 시스템에 대해 적분제어를 한다. 식 (46)의 퍼지모델에 적분상태변수를 첨가하면 다음과 같아진다.

$$M^1: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^1 \\ \text{ then } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.928 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2.915 + 0.928\theta_d \\ 0 \end{pmatrix} \\ M^2: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^2 \\ \text{ then } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.292 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.292\theta_d \\ 0 \end{pmatrix} \\ M^3: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^3 \\ \text{ then } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.928 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f(t) \\ x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.915 + 0.928\theta_d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

단 $x_f(t) = \int (\theta(t) - \theta_d) dt$, $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) - \theta_d \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ 이다. 위의 퍼지모델로부터 극배치법을 용하여 퍼지제어기를 설계하면 다음과 같다.

$$C^1: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^1 \text{ then } u^1(t) = (\phi_1 \ \phi_2 - 0.928 \ \phi_3 + 1) \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} - 2.915 - 0.928\theta_d \\ C^2: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^2 \text{ then } u^2(t) = (\phi_1 \ \phi_2 + 0.292 \ \phi_3 + 1) \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + 0.292\theta_d \\ C^3: \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^3 \text{ then } u^3(t) = (\phi_1 \ \phi_2 - 0.928 \ \phi_3 + 1) \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + 2.915 - 0.928\theta_d \quad (60)$$

단

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix}$$

원하는 출력이 100° 이고 $t=20$ 부터 $w=1.5$ 의 step 외란이 플랜트에 첨가되었을 때 위의 퍼지제어기로 제어된 식 (43)의 플랜트의 출력을 그림 19에 보인다.

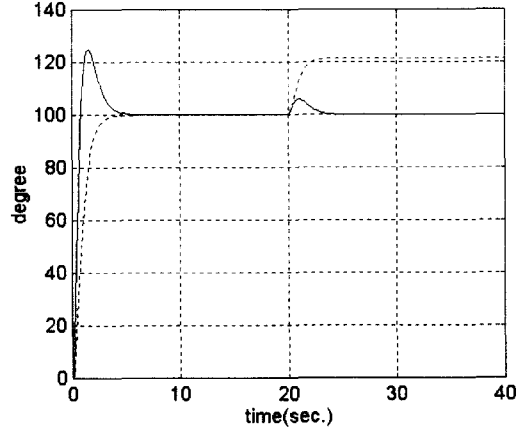


그림 19. 실선 : 적분제어가 있을 때 응답, 점선: 적분제어가 없을 때 응답

Fig. 19. Solid line: Response with an integral control action. dashed line: Response with no integral action.

IV. 결과 고찰

본 논문에서 검토 또는 제안한 결과를 정리 고찰하면 다음과 같다.

1. TSK퍼지모델 결론부의 선형식에서 상수항의 필요성 확인

TSK퍼지모델은 비선형 시스템들을 원하는 어떠한 정확도로도 표현 할 수 있음을 문헌 [2]에 발표되어 있다. 이 때 TSK퍼지모델은 퍼지규칙 결론부의 선형식이 상수항을 포함하여야 비선형 시스템을 정확히 표현 할 수 있다. TSK퍼지제어기에 대해 지금까지 발표된 논문들은 제어기 설계의 어려움으로 결론부의 선형식에 상수항이 없는 특수한 형태를 취급하였다. 하지만 상수항이 없을 경우 TSK퍼지모델로 잘 표현 못하는 비선형 시스템이 있다. 본 논문에서는 먼저 TSK퍼지모델의 결론부에 상수항이 필요함을 예제로 보였다. 가령 본 논문의 예제 2와 같은 비선형 시스템은 상수항이 없는 TSK퍼지모델로 표현 할 경우 상수항이 있는 TSK퍼지모델에 비해 인식용 데이터에 대한 오차가 약 3배정도 많이 나왔다. 따라서, 적은 수의 규칙으로 비선형 시스템을 매우 정확히 표현할 수 있는 것이 TSK퍼지모델의 최대 장점이므로 그 장점을 살리기 위해서는 TSK퍼지모델 결론부에 상수항이 있어야 함을 알 수 있다.

2. TSK퍼지모델 결론부를 상태방정식으로 표현하는 방법 제안

현대 제어 수법을 이용하여 TSK퍼지제어기를 설계하기 위해서는 TSK퍼지 입출력모델의 결론부를 상태방정식 형태로 변환할 필요가 있다. 그러나, 지금까지 TSK퍼지제어기 설계에 관해 발표된 논문들은 입출력 모델을 상태방정식 형태로 변환시키는 방법에 대해서는 언급이 없이 TSK퍼지모델의 결론부가 처음부터 상태방정식의 형태인 것으로 가정하고 있으며, 그 상태 방정식은 상수항을 포함하고 있지 않는 특수한 형태이다. 하지만 비선형 시스템으로부터 입출력 데이터를 이용하여 TSK퍼지모델을 인식할 경우 그 모델의 결론부는 입출력모델이므로 상태방정식으로 변환시키는 방법이 필요하며, 앞에서 말했듯이 그 상태방정식은 상수항을 갖고 있어야 한다. TSK퍼지 입출력모델을 TSK퍼지 상태방정식 모델로 변환시킬 경우 선형 시스템에서 상태방정식을 만드는 방법을 모두 그대로 사용할 수 없다. 본 논문에서 가능한 방법을 제시하였으며, 그 때 만들어지는 TSK퍼지 상태방정식 모델을 TSK fuzzy canonical form이라 정의하였다. 그리고 그 TSK fuzzy canonical form은 상수항을 갖고 있어 일반적인 형태라 할 수 있다.

3. 극 배치법을 이용한 TSK퍼지제어기 설계방법 제안

TSK퍼지제어기 설계에 대해 지금까지 발표된 논문의 내용은, TSK퍼지모델의 결론부가 상수항이 없는 상태방정식일 때 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 페루프 시스템이 단지 안정되도록 그 퍼지모델로부터 TSK퍼지제어기를 설계하는 것이며 제어 목표는 항상 $x=0$ 이다. 하지만 본 논문에서 제안한 방법은, 극 배치법(pole assignment)을 이용하여 페루프 시스템의 응답이 원하는 선형시스템의 응답과 같아지도록 TSK 퍼지제어기를 설계하는 것이며, 대상 TSK퍼지 상태방정식 모델이 상수항을 갖는 일반적인 형태이므로 제어 목표를 마음대로 바꿀 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안한 방법이 종전의 Lyapunov 방법에 비해 개선된 것은, 페루프 시스템의 극을 마음대로 지정 할 수 있으므로 제어 입력에 대한 물리적인 제약이 없다면 천이 응답의 형태를 자유로이 지정 할 수 있는 것, 제어 목표를 마음대로 정 할 수 있는 것이다. 실제 예제 7의 시뮬레이션에서, 본 논문이 제안한 방법에 의한

결과와 똑같은 예제를 Lyapunov 방법을 사용한 문헌 [14]의 결과를 보면 본 논문의 개선점을 뚜렷이 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템이 TSK퍼지모델로 표현되어 있을 때 그 TSK퍼지모델로부터 설계되는 TSK퍼지제어기의 형태와 그 설계 방법을 제안하였다.

TSK퍼지제어기에 대해 지금까지 발표된 연구는, 퍼지규칙 결론부의 선형식이 상수항을 갖고 있지 않는 특수한 형태의 퍼지모델을 대상으로 Lyapunov 안정성 이론을 이용하여 페루프 시스템이 단지 안정되도록 퍼지제어기를 설계되었다. 이에 반해 본 논문에서 제안한 퍼지제어기는 결론부 선형식이 상수항을 갖는 일반적인 형태이며, 극 배치법(pole assignment)을 이용하여 페루프 시스템의 응답이 원하는 선형시스템의 응답과 같아지도록 설계되었다. 본 연구에서는 제안한 퍼지제어기는 선형제어시스템에서 개발된 적분제어도 사용 가능함을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] T.Takagi and M.Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modelling and Control", *IEEE Trans. on SMC*, 15 (1), pp.116-132, 1985.
- [2] J.Buckley, "Sugeno type controllers are universal controller", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 53, pp.199-303, 1993
- [3] M.Sugeno and M.Nishida, "Fuzzy Control of Model Car", *Fuzzy Sets and Systems*, vol.16, pp.103-113, 1985.
- [4] M.Sugeno and G.Kang, "Fuzzy Modelling and Control of Multilayer Incinerator", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 18, pp.329-346, 1986.
- [5] Y.S.Lee, S.J.Jeong, S.Y.Kim, and G.Kang, "Hull Form Generation by Using Fuzzy Model", in *Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress*, 1993, pp.1234-1237.
- [6] M.Kim and G.Kang, "Design of Fuzzy

- Controller Based on Fuzzy Model for Container crane System", in *Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress*, 1993, pp.1250-1253.
- [7] M.Sugeno and G.Kang, "Structure Identification of Fuzzy Model", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, pp.15-33, 1988.
- [8] K.Tanaka and M.Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, pp.135-156, 1992
- [9] A.Ishigame, T.Furugawa, S.Kawamoto, and T.Taniguchi, "Sliding Model Controller Design Based on Fuzzy Inference for Nonlinear Systems", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, pp.64-70, Feb. 1993.
- [10] K.Tanaka and M.Sano, "On the Concepts of Regulator and Observer of Fuzzy Control System", in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1994, pp.767-772.
- [11] G.Kang and W.Lee, "Design of Fuzzy Parameter Adaptive Controllers", in *Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress*, 1995, pp.609-612.
- [12] K.Kiriakidis and A.Tzes, "Applocation of Implicit Self-Tuning Fuzzy control to Nonlinear Systems", in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1995, pp. 1419-1426.
- [13] G.Kang and W.Lee, "Design of Fuzzy State Controllers and Observers", in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1995, pp. 1355-1360.
- [14] H.O.Wang, K.Tanaka, and M.F.Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.14-23, Feb. 1996.
- [15] K.Tanaka, T.Ikeda, and H.O.Wang, "Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H Control Theory, and Linear Matrix Inequalities", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.1-13, Feb. 1996.
- [16] D.Driankov, R.Palm, and U.Rehfuess, "A Takagi-Sugeno Fuzzy Gain-Scheduler", in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1996, vol. 2, pp. 1053-1059
- [17] K.S.Narendra and K.Parthasarathy, "Identification and Control Dynamical Systems Using Neural Networks", *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 4, pp.4-27, Mar. 1990.
- [18] G.Kang, "Fuzzy Modelling of systems and Design of Fuzzy Controllers" Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1987.

 저 자 소 개

姜 根 澤(正會員) 第 26卷 第 12號 參照
 현재 부경대학교 전자공학과 부
 교수

李 遠 昌(正會員) 第 26卷 第 12號 參照
 현재 부경대학교 전자공학과 조
 교수