論文98-35S-11-8

상태변수에 시간지연을 갖는 선형시스템의 균형화된 모델 차수 축소

(Balanced Model Reduction for Linear Systems with State Delay)

柳 奭 桓 *

(Seog-Hwan Yoo)

요 약

본 연구에서는 상태변수에 시간지연을 갖는 시간지연 시스템의 모델 차수 축소를 취급한다. 시간 지연 시스템에 대한 가제어성 그래미안과 가관측성 그래미안을 정의하고 균형화된 상태공간 구현을 소개한다. 선형 행렬 부등식의 해를 이용하여 모델 차수 축소 방법과 차수 축소 오차의 상한치를 제시한다. 본 연구에서 제시한 방법의 효용성을 예시하기 위하여 수치예를 수행한다.

Abstract

This paper deals with a model reduction problem for the linear systems with state delay. After defining the controllability/observability Gramians, the concept of a balanced model for the linear systems with state delay is introduced. Based on solutions of linear matrix inequalities, the model reduction method with guaranteed error bounds is developed. In order to demonstrate the efficacy of the suggested method, a numerical example is also performed.

I. 서 론

제어시스템을 설계할 때 전체 시스템의 제어성능과 외란에 대한 견실성을 향상시키기 위해서는 플랜트의 수학적인 모델을 가급적 정확하게 표현할 필요가 있다. 플랜트를 가능한 정확하게 상태공간에서 모델할 경우 결과의 상태공간 모델은 아주 고차원으로 모델될 경우가 많다. 또한 최근 많은 발전을 보아온 견실 제어이론을 사용하여 제어기를 설계하고자 할 때도 많은 주파수 가중함수를 플랜트에 포함시킨 소위 일반화 시스템(generalized system)은 통상 차수가 상당히 높아진다. 높은 차수의 시스템으로부터 제어기를 설계할경우 대부분의 경우 제어기의 설계가 복잡하여질 뿐만 아니라 제어기의 차수도 역시 높아져 실제로 제어기를 구현할 때 하드웨어가 복잡하여지고 비싸게 된다. 따라서 제어기를 설계하거나 제어시스템을 모의실험할 경우 플랜트나 혹은 제어기의 차수축소는 아주 중요하므로 최근 모델 차수 축소에 관한 많은 연구가 수행되어 지고 있다.

상태공간에서 모델된 시스템의 차수를 축소하기 위한 보편적인 방법으로는 균형화된 상태공간에서의 절삭법(balance and truncate)[1, 2], 최적 Hankel-norm 근사[3], 특이섭동형 근사[4]등이 있다. 그러나 대부분의 모델 차수 축소 앨고리즘은 선형 시불변 시스템에 국한되어 발전되었다. 최근 G. D. Wood[5]는 선형 행렬 부등식의 해를 이용하여 시변 파라메터를 갖는 선형 시스템의 근사방법을 제시하였으며 C. L. Beck[6]는 구조적 불확실성을 갖는 선형 이산형 시스

* 正會員, 大邱大學校 情報通信工學部
(Taegu University, School of Computer & Communication Engineering)

※ 이 논문은 1998학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문임.
接受日字: 1998年9月4日, 수정완료일: 1998年10月17日

템의 모델 차수 축소 방법을 제시하였다.

화학공정이나 제철공정과 같은 공정제어 시스템에서 많이 모델되어지는 시간지연 시스템의 견실한 제어기 설계에 관한 연구가 국내외에서 상당히 활발히 이루어지고 있다.[7, 8] 특히 시간지연 시스템의 견실한 제어기 설계를 위하여 선형행렬 부등식을 이용한 설계기법이 많이 제시되고 있다. 그러나 선형행렬 부등식의 해를 구하는 과정에서 시스템의 차원이 클 경우 기하급수적으로 계산량이 많아지므로 시간지연 시스템의 모델 차수 축소 방법에 관한 연구가 절실히 요구되지만 실제로 시간지연 시스템의 차수축소에 관한 연구결과는 아주 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 상태변수에 시간지연을 갖는 시스템에서 균형화된 상태공간 구현을 이용하여 모델 차수를 축소하는 방법을 제시하고 모델 근사오차의 상한치를 제시하고자 한다.

본 연구의 주된 아이디어는 G. D. Wood[5]가 제시한 시변 파라메터를 갖는 시스템의 근사화 방법을 시간지연 시스템에 적용하기 위해 상태변수에 시간지연을 갖는 선형시스템을 가상의 절대값의 크기가 1인 복소 파라메터를 갖는 선형시스템으로 변환하여 복소 파라메터를 갖는 선형 시스템에서 차수 축소를 수행한다.

R^n은 n차원 실 벡터 공간(real vector space)이고 $R^{n\times m}$ ($C^{n\times m}$)은 요소가 실수(복소수)인 $n\times m$ 차원 행렬을 나타낸다. A^*는 A의 복소공액 전치행렬을 A^T는 A의 전치행렬을 각각 의미한다. 0는 영행렬을 I는 단위행렬을 나타내고 문맥상 쉽게 차원을 알 수 있는 경우 차원을 표시하지 않는다. $diag(A, B)$는 대각요소가 행렬 A와 행렬 B로 구성된 대각 행렬이고 $\sigma_{\max}(\cdot)$는 최대 특이치, $\lambda(\cdot)$는 고유치, $tr(\cdot)$는 trace를 의미하고 $\|\cdot\|_\infty$는 H_∞ 노옴을 나타낸다.

Ⅱ. 문제설정과 예비지식

다음과 같은 상태변수에 시간지연을 갖는 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_hx(t-h)+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)+C_hx(t-h)+Du(t)\end{aligned} \qquad (1)$$

여기에서 $x(t)\in R^n$는 상태변수, $u(t)\in R^m$는 제어입력, $y(t)\in R^p$는 출력이고 A, A_h, $\cdots$, D는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이고 $h>0$는 지연시간이다.

본 연구에서는 n차원 상태공간에서 표시된 시간지연 시스템을 균형화된 상태공간 구현을 통하여 $k<n$ 차원의 상태공간 모델로 표현된 차수 축소된 시간지연 시스템을 구하고 원래 시간지연 시스템과의 모델 오차의 상한치를 제시하고자 한다.

먼저 시간지연 시스템 (1)과 연관된 가상적인 복소 파라메터 불확실성을 갖는 선형시스템을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_zx(t)+Bu(t)\\ y(t) &= C_zx(t)+Du(t)\end{aligned} \qquad (2)$$

여기에서 $A_z=A+zA_h$, $C_z=C+zC_h$이고 z는 $|z|=1$인 복소수이다.

시간지연 시스템이 (2)의 형태로 표현되었을 때 A_z, C_z의 정의로부터 시간지연 시스템 (1)의 표현을 얻을 수 있으며 역으로 (1)의 형태에서 (2)의 형태도 얻을 수 있다. 시간지연 시스템 (1) 혹은 (2)를 간편하게 나타내기 위하여 전달함수를 $G(s)$라 할 때 다음의 표시방법을 사용한다.

$$G(s)=\left[\begin{array}{c|c} A_z & B \\ \hline C_z & D\end{array}\right]$$

시간지연 시스템 (1)에서 차수 축소를 수행하는 대신에 복소 파라메터 시스템 (2)에서 차수 축소를 행하기 위해서는 시스템 (1)(혹은 (2))이 안정성, H_∞ 노옴 유계조건 등의 어떤 제어공학적 성질을 만족할 때 시스템 (2)(혹은 (1))도 역시 동일한 제어공학적 성질을 만족하여야 한다. 시간지연 시스템 (1)이 지연 시간 h의 크기에 무관하게 H_∞ 노옴이 임의의 어떤값으로 유계되었을 때 복소 파라메터 불확실성을 갖는 시스템 (2)에서도 $|z|=1$인 어떠한 복소 파라메터에 대해서도 H_∞ 노옴이 동일한 크기로 유계됨을 먼저 보인다. 이를 위하여 이산형 시스템의 extended strictly positive real(ESPR) 조건[9]을 기술한다.

보조정리 1 : 다음의 (i)과 (ii)는 등가이다.

(i) 이산형 시스템 (A_G, B_G, C_G, D_G)는 안정하고 ESPR이다.

(ii) 다음의 선형 행렬부등식을 만족하는 대칭 양한정 행렬 R이 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A_G^T R A_G - R & A_G^T R B_G - C_G^T \\ B_G^T R A_G - C_G & B_G^T R B_G - D_G - D_G^T \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

보조정리 2 : 시간지연 시스템 (1)에서 다음의 (i)과 (ii)는 등가이다. 또한 (i)(혹은 등가적으로 (ii))이 성립하면 $\| G(s) \|_\infty \le \gamma$를 만족한다.

(i) $|z|=1$인 모든 복소수 z에 대해서 다음의 행렬 부등식 (4)를 만족하는 대칭 양한정 행렬 X가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A_z^* X + X A_z & XB & C_z^* \\ B^* X & -\gamma I & D^* \\ C_z & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

(ii) 선형 행렬부등식 (5)를 만족하는 대칭 양한정 행렬 X와 S가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + S & XA_h & XB & C^T \\ A_h^T X & -S & 0 & C_h^T \\ B^T X & 0 & -\gamma I & D^T \\ C & C_h & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

(증명) 행렬 부등식 (4)를 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z^{-1} [A_h^T X \ \ 0 \ \ C_h^T] + \begin{bmatrix} XA_h \\ 0 \\ C_h \end{bmatrix} z [I \ \ 0 \ \ 0] < 0 \tag{6}$$

$A_G = 0,\ B_G = \begin{bmatrix} XA_h \\ 0 \\ C_h \end{bmatrix}^T,\ C_G = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

$D_G = 1/2 \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix}$ 이라 정의한다.

$|z|=1$인 모든 복소수 z에 대해서 (4)가 성립하므로 $z=0$일때도 (4)가 성립한다. 즉 $D_G + D_G^T < 0$ 이다. 그리고 모든 복소수 $|z|=1$에서 선형 행렬 부등식 (6)이 성립하고 $D_G + D_G^T < 0$ 이므로 이산형 시스템 $(A_G, B_G, -C_G, -D_G)$는 안정하고 ESPR이다. 따라서 보조정리 1의 조건 (ii)로부터 선형 행렬 부등식 (7)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 S가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} -S^{-1} & C_G^T \\ C_G & B_G^T S^{-1} B_G + D_G + D_G^T \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow B_G^T S^{-1} B_G + D_G + D_G^T + C_G S C_G^T < 0 \tag{7}$$

행렬 부등식 (7)을 Schur 보수정리를 사용하여 다시 정리하면 (5)를 얻는다.

$$\begin{aligned} \| G(s) \|_\infty &= sup_w \sigma_{\max}(G(jw)) \\ &\le sup_w sup_{|z|=1} \sigma_{\max}(D + C_z (jwI - A_z)^{-1} B) \end{aligned}$$

의 관계를 만족하고 행렬부등식 (4)는 $sup_w sup_{|z|=1} \sigma_{\max}(D + C_z (jwI - A_z)^{-1} B) \le \gamma$을 보장한다. 증명 끝.

선형 행렬 부등식 (4)는 $|z|=1$인 모든 복소수 z에 대한 복소 파라메터 시스템의 H_∞ 노옴 유계조건이고 선형 행렬 부등식 (5)는 시간 지연 시스템 (1)이 지연 시간의 크기에 무관하게 H_∞ 노옴이 유계될 조건이다. 더구나 부등식 (4)를 만족하는 양한정 행렬 X가 존재할 때 적절한 S에 대해 동일한 X를 사용하여 부등식 (5)가 만족된다.

III. 균형화된 상태공간 구현과 모델 차수 축소

이 절에서는 시간 지연 시스템의 가제어성 그래미안 (controllability Gramian)과 가관측성 그래미안 (observability Gramian)을 정의하고 균형화된 상태공간 구현을 소개한다. 또한 균형화된 상태공간 구현으로부터 모델 차수 축소 방법을 제시한다.

보조정리 3 (가관측성 그래미안) :

(i) 다음의 ①과 ②는 등가이다.

① 모든 복소수 $|z|=1$에서 $A_z^* Q + Q A_z + C_z^* C_z < 0$를 만족하는 대칭 양한정 행렬 Q가존재한다.

② 선형행렬 부등식 (8)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 Q와 R이 존재한다.

$$L_o := \begin{bmatrix} A^T Q + QA + R + C^T C & QA_h + C^T C_h \\ A_h^T Q + C_h^T C & C_h^T C_h - R \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

(ii) ①의 조건이 만족되면 시간지연 시스템 (1)에서 $u(t) \equiv 0,\ t \ge 0$일 때 출력 에너지는 다음과 같이 유계된다.

$$\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt < x(0)^T Q x(0) + \int_{-h}^0 x(t)^T R x(t) dt \tag{9}$$

(증명) (i) 보조정리 2의 증명에서와 같이 ESPR의 조건을 사용하여 증명하며 증명 생략.

(ii) 양한정 함수 $V(x)=x^TQx+\int_{t-h}^{t}x^TRxdt$ 를 정의한다. 시간지연 시스템 (1)이 안정하여 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$이 므로 다음 (10)의 항등식을 얻는다.

$$\int_0^\infty y^Tydt= \int_0^\infty (y^Ty+\frac{dV(x)}{dt})dt + x(0)^TQx(0)+\int_{-h}^{0}x^TRxdt \tag{10}$$

$\frac{dV(x)}{dt}$ 를 시스템 (1)의 궤적을 따라 미분하여 구하고 이를 (10)에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^Tydt= &\int_0^\infty [\,x(t)^T\ x(t-h)^T]\,L_o\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}dt \\ &+x(0)^TQx(0)+\int_{-h}^{0}x^TRxdt \\ &< x(0)^TQx(0)+\int_{-h}^{0}x^TRxdt\end{aligned} \tag{11}$$

을 얻는다. 증명 끝.

보조정리 4 (가제어성 그래미안) :

(i) 다음의 ①과 ②는 등가이다.

① 모든 복소수 $|z|=1$에서 $A_zP+PA_z^*+BB^*<0$를 만족하는 대칭 양한정 행렬 P가 존재한다.

② 선형행렬 부등식 (12)를 만족하는 대칭 양한정 행렬 P와 S가 존재한다.

$$L_c:=\begin{bmatrix}AP+PA^T+A_hSA_h^T+BB^T & P\\ P & -S\end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

(ii) 시간지연 시스템 (1)을 $x(-\infty)=0$에서 $x(0)=x_0$이 되게하는 입력 에너지는 다음의 하한치를 가진다.

$$\int_{-\infty}^{0}u^T(t)u(t)dt > x_0^TP^{-1}x_0+\int_{-h}^{0}x^T(t)S^{-1}x(t)dt$$

(증명) (i) 증명 생략

(ii) $V(x)=x^TP^{-1}x+\int_{t-h}^{t}x^TS^{-1}xdt$라 정의하면 $x(-\infty)=0$에서 $x(0)=x_0$이 되게하는 모든 $u(t)$, $t\le 0$, 에 대해 다음의 항등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}&x_0^TP^{-1}x_0+\int_{-h}^{0}x^TS^{-1}xdt \\ &=\int_{-\infty}^{0}\left(u^Tu-u^Tu+\frac{dV(x)}{dt}\right)dt \\ &=\int_{-\infty}^{0}(u^Tu-u^Tu+\dot{x}^TP^{-1}x+x^TP^{-1}\dot{x} \\ &\quad +x^TS^{-1}x-x(t-h)^TS^{-1}x(t-h))dt \\ &=\int_{-\infty}^{0}u^Tudt+\int_{-\infty}^{0}\begin{bmatrix}P^{-1}x\\ x(t-h)\\ u\end{bmatrix}^T M\begin{bmatrix}P^{-1}x\\ x(t-h)\\ u\end{bmatrix}dt\end{aligned} \tag{13}$$

여기에서

$$M=\begin{bmatrix}AP+PA^T+PS^{-1}P & A_h & B\\ A_h^T & -S^{-1} & 0\\ B^T & 0 & -I\end{bmatrix}$$

따라서 선형 행렬 부등식 (12)가 만족되면 $\int_{-\infty}^{0}u^Tudt > x_0^TP^{-1}x_0+\int_{-h}^{0}x^TS^{-1}xdt$를 얻는다. 증명 끝.

보조정리 3과 4에서 정의된 대칭 양한정 행렬 Q와 P를 각각 시간지연 시스템의 가관측성, 가제어성 그래미안이라고 정의한다. 그러나 Q와 P가 선형 행렬 부등식의 해로 정의가 되어 일의성(unique)을 갖지 못한다. 그러므로 균형화된 상태공간 구현도 일의성을 갖지 않음을 예측할 수 있다. 그러나 대칭 양한정 행렬 P, Q로부터 다음의 조건을 만족하는 변환행렬 T는 항상 존재한다.

$$\Sigma= T^TQT=T^{-1}PT^{-T}=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),\quad \sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n \tag{14}$$

변환행렬 T를 이용하여 시간지연 시스템 (1)을 (15)과 같이 좌표변환한다.

$$G(s)=\left[\begin{array}{c|c}T^{-1}A_zT & T^{-1}B\\ \hline C_zT & D\end{array}\right] =\left[\begin{array}{c|c}A_{bz} & B_b\\ \hline C_b & D\end{array}\right] \tag{15}$$

이 경우 $A_{bz}^*\Sigma+\Sigma A_{bz}+C_{bz}^*C_{bz}<0$ 이고 $A_{bz}\Sigma+\Sigma A_{bz}^*+B_bB_b^*<0$ 임을 알 수 있다. 이런 이유로 시간 지연 시스템 (15)를 시간 지연 시스템 (1)의 균형화된 상태공간 구현이라 정의한다.

시간 지연 시스템 (1)이 위의 방법을 통하여 이미 균형화되었다고 가정하고 다음과 같이 분할된 시스템으로 표현한다.

$$G(s)=\left[\begin{array}{cc|c}A_{z11} & A_{z12} & B_1\\ A_{z21} & A_{z22} & B_2\\ \hline C_{z1} & C_{z2} & D\end{array}\right] \tag{16}$$

여기에서

$A_{z11}\in C^{k\times k}$, $A_{z12}\in C^{k\times(n-k)}$, $A_{z21}\in C^{(n-k)\times k}$,

$A_{z22} \in C^{(n-k)\times(n-k)}$, $B_1 \in R^{k\times m}$, $B_2 \in R^{(n-k)\times m}$,
$C_{z1} \in C^{p\times k}$, $C_{z2} \in C^{p\times(n-k)}$
이다. 또 균형화된 시스템 (16)으로부터 다음과 같이 차수가 k인 차수 축소 시스템을 고려한다.

$$G_k(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{z11} & B_1 \\ \hline C_{z1} & D \end{array}\right] \tag{17}$$

정리 5 :

(i) 차수 축소된 시간지연 시스템 (17)은 안정하고 균형화되어 있다.

(ii) 차수 축소 오차는 다음과 같이 유계된다.

$$\| G(s) - G_k(s) \|_\infty \le 2 \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j$$

(증명) (i) 시간지연 시스템 (16)이 모든 복소수 $|z|=1$에서 $A_z^*\Sigma + \Sigma A_z + C_z^* C_z < 0$와 $A_z\Sigma + \Sigma A_z^* + BB^* < 0$를 만족하므로 (1,1) 블록행렬은 $A_{z11}^*\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{z11} + C_{z1}^* C_{z1} < 0$와 $\Sigma_1 A_{z11}^* + A_{z11}\Sigma_1 + B_1 B_1^* < 0$를 만족한다. 여기서 $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$이다. 따라서 축소된 시간지연 시스템 (17)은 안정하고 균형화되었다.

(ii) 차수 축소된 시스템의 가제어성 그래미안과 가관측성 그래미안이 $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$으로 주어지고 또한 균형화 되었으므로 일반성을 잃지 않고 $k=n-1$이라고 가정하고 $\| G(s) - G_{n-1}(s) \|_\infty \le 2\sigma_n$임을 보인다.

오차 시스템 $E(s) = G(s) - G_{n-1}(s)$는 다음과 같이 표현된다.

$$E(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{z11} & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A_{z11} & A_{z12} & B_1 \\ 0 & A_{z21} & A_{z22} & B_2 \\ \hline -C_{z1} & C_{z1} & C_{z2} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \overline{A}_e & \overline{B}_e \\ \hline \overline{C}_e & 0 \end{array}\right] \tag{18}$$

(18)의 오차시스템을 다음과 같이 좌표변환을 한다.

$$E(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{z11} & 0 & 1/2\,A_{z12} & B_1 \\ 0 & A_{z11} & -1/2\,A_{z12} & 0 \\ A_{z21} & -A_{z21} & A_{z22} & B_2 \\ \hline 0 & -2\,C_{z1} & C_{z2} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & 0 \end{array}\right] \tag{19}$$

여기에서

$A_e = M^{-1}\overline{A}_e M$, $B_e = M^{-1}\overline{B}_e$, $C_e = \overline{C}_e M$,

$M = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$이다.

$P_e = diag(\Sigma_1, \sigma_n^2\Sigma_1^{-1}, 2\sigma_n)$라 선정하였을 때 모든 $|z|=1$인 복소수 z에 대해

$$A_e P_e + P_e A_e^* + B_e B_e^* + \frac{1}{4\sigma_n^2} P_e C_e^* C_e P_e < 0$$

가 성립한다. 보조정리 2 로부터 $\| E(s) \|_\infty = \| G(s) - G_{n-1}(s) \|_\infty \le 2\sigma_n$. 증명 끝.

모델오차가 σ_i, $i=k+1, \cdots, n$에 의해 유계되고 또한 (14)로부터 $\sigma_i = (\lambda_i(PQ))^{1/2}$이므로 모델 오차를 가능한 줄이기 위해서는 선형 행렬 부등식 (8)과 (12)를 만족하는 해중에서 $J = tr(PQ)$를 최소로하는 해를 구한다. 그러나 제약조건 (8)과 (12)는 컨벡스하지만 가치함수 J가 컨벡스 하지가 않아 전역적인 최소치를 구하기가 어렵다. 통상 반복법에 의해 최적화를 수행하지만 전역적인 최적치를 얻는 보장이 없고 반복 계산으로 인하여 시간이 많이 걸린다. 본 연구의 수치예에서는 제약조건 (8)과 (12)를 만족하면서 $tr(P+Q)$를 최소화하는 준최적 해를 구한다.

Ⅳ. 수치예

시간지연 시스템 (1)에서 상태공간 구현이 다음과 같은 가상적인 시스템을 예로 든다.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C_h^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

선형 행렬부등식 (8)과 (12)의 조건하에서 $tr(P+Q)$를 최소화하는 P와 Q를 구하여 (14)를 이용하여 $\Sigma = diag(0.6589, 0.1584, 0.0131)$를 얻었다. 2차의 시간지연 시스템으로 근사하기 위하여 균형화된 상태공간 구현을 얻고 3번째 상태변수를 절삭하면 다음과 같은

차수 축소된 시간지연 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_r x + A_{hr} x(t-h) + B_r u \\ y &= C_r x \end{aligned} \quad (20)$$

여기에서

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.2834 & 0.8365 \\ -0.8167 & -1.5064 \end{bmatrix},$$
$$A_{hr} = \begin{bmatrix} -0.0102 & -0.0411 \\ -0.0118 & -0.0474 \end{bmatrix},$$
$$B_r = \begin{bmatrix} -0.5863 \\ -0.6757 \end{bmatrix}, \; C_r = [-0.6109 \; 0.6907]$$

2차 시스템으로의 근사오차는 정리 5의 결과에 의해 0.0262 보다 적음을 보장한다. $h=1$초일 때 3차 시스템과 2차 시스템의 보드 크기 선도를 그림1에 도시하였다. 그림 1에서 실선은 3차 시스템의 보드선도이고 점선은 축소된 시스템의 보드선도이다. 그림 2에서는 오차시스템의 보드 크기선도를 나타내었다.

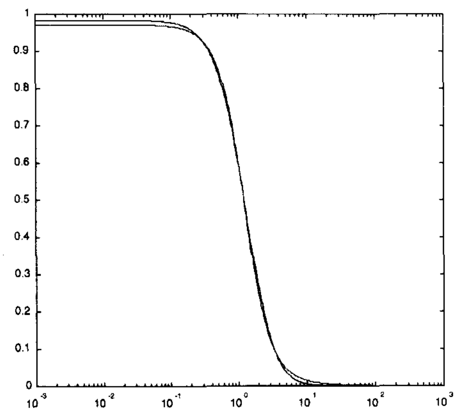

그림. 1. 보드 크기선도

Fig. 1. Bode Magnitude Plot.

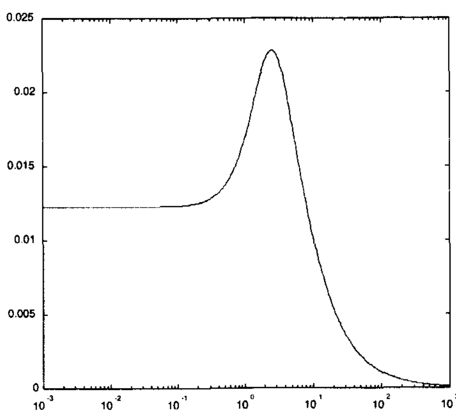

그림 2. 오차시스템의 보드 크기선도

Fig. 2. Bode Magnitude Plot of the Error System.

V. 결 론

본 연구에서는 선형 행렬 부등식의 해를 이용하여 상태변수에 시간지연을 갖는 선형시스템의 모델 축소 방법을 제시하였다. 가제어성/가관측성 그래미안을 선형 행렬 부등식의 해로 정의하고 각각의 그래미안이 입력에너지와 출력에너지와 관련이 있음을 보였다. 가제어성/가관측성 그래미안을 이용하여 시간지연 시스템의 균형화된 상태공간 구현을 얻었고 이를 바탕으로 축소된 모델을 얻었다. 모델 근사 오차의 상한치를 얻기 위해 시간지연 시스템을 단위원 위에 위치하는 복소 파라메터 불확실성을 갖는 선형시스템으로 표현하고 실수의 파라메터를 갖는 선형시스템의 모델 축소에 관한 연구결과를 이용하였다. 모델 오차가 적은 축소된 모델을 얻기 위해서 컨벡스하지 않은 최적화 문제를 풀어야하지만 최적해를 구하기 어려우므로 준 최적해를 이용한 모델 축소방법을 이용하여 가상적인 시스템에 대한 모델 축소를 수치예로 예시하였다.

참 고 문 헌

[1] B. C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-26, No. 1, pp.17-32, 1982.

[2] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-27, No.2, pp.382-387, 1982.

[3] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds", Int. J. Control, Vol.39, No.6, pp.1115-1193, 1984.

[4] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems", Int. J. Control, Vol.50, pp.1379-1405, 1989.

[5] G. D. Wood, P. J. Goddard and K. Glover, "Approximation of linear parameter varying systems", Proceedings of the 35th CDC, pp.406-411, Kobe, Japan, Dec. 1996.

[6] C. L. Beck, J. Doyle and K. Glover, "Model reduction of multidimensional and uncertain

systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-41, No.10, pp.1466-1477, 1996.

[7] J. H. Lee, S. W. Kim and W. H. Kwon, "Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-39, No.1, pp.159-162, 1994

[8] M. Mahmoud and N. F. Al-Muthairi, "Quadratic stabilization of continuoustime systems with state delay and norm bounded time varying uncertainties", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-39, No.10, pp.2135-2139, 1994.

[9] W. Sun, P.P. Khargonekar and D. Shim, "Solution to the positive real control problem for linear time invariant systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-39, No.10, pp.2034-2046, 1994.

저 자 소 개

柳 爽 桓(正會員)　第 35卷 S編 第 3號 參照