

CFD에로의 Fuzzy 추론 응용에 관한 연구

- 반복계산을 위한 퍼지제어의 유효성 -

Fuzzy Reasoning on Computational Fluid Dynamics

- Feasibility of Fuzzy Control for Iterative Method -

이연원 · 정용옥 · 박외철 · 이도형 · 배대석

Y. W. Lee, Y. O. Jeong, W. C. Park, D. H. Lee and D. S. Bae

Key Words : Fuzzy Reasoning(퍼지추론), CFD(전산유체역학), SOR(이완법)

Abstract : Numerical simulations for various fluid flows require enormous computing time during iterations. In order to solve this problem, several techniques have been proposed. A SOR method is one of the effective methods for solving elliptic equations. However, it is very difficult to find the optimum relaxation factor, the value of this factor for practical problems used to be estimated on the basis of expertise.

In this paper, the implication of the relaxation factor are translated into fuzzy control rules on the basis of the expertise of numerical analysers, and fuzzy controller incorporated into a numerical algorithm. From two cases of study, Poisson equation and cavity flow problem, we confirmed the possibility of computational acceleration with fuzzy logic and qualitative reasoning in numerical simulations. Numerical experiments with the fuzzy controller resulted in generating a good performance.

1. 서론

퍼지이론은 1965년 캘리포니아대학 L. A. Zadeh 교수에 의해 제안되어진 것으로서 정보처리 및 제어분야에서 연구가 계속 이루어져 실용화가 급속히 진전되기 시작한 기술분야이다. 퍼지이론은 인간의 대국적, 개괄적인 지적정보처리의 근사적인 모델로 제시될 수 있으며, 인간의 주관적인 판단 및 사고, 의사결정의 문제, 인간의 감성 및 정서의 문제 등을 수식화하는 것을 가능케 하여 인간주관의 불확실성, 인식의 불명료화에 의한 명시적인 형식화의 어려움을 해결할 수 이론으로 알려져 있다¹⁻³⁾.

퍼지추론의 열 및 흐름의 계산에로의 응용은 Fujita 등⁴⁾, Yamaoka 등⁵⁾의 일본인 학자들에 의해 주도되어지고 있으며, 국내에는 전혀 시도된 바가 없는 것으로 판단되어진다. 본 연구의 목적은 퍼지

추론의 기본지식을 습득하여 향후 응용 가능한 여러 분야의 응용에 대한 지식의 축적에 있으며, 구체적으로는 반복법의 가속제어의 부분에 퍼지이론을 적용한 독자적인 퍼지컨트롤러의 개발에 있다.

2. 퍼지이론

논리의 기계인 컴퓨터와 논리 외에 감정이나 의사를 가진 인간의 사고 사이에는 유사점도 있고 상이점도 있다. 이것들을 잘 조합하면 훌륭한 시스템이 될 것이다. 퍼지집합이 양자를 중재할 수 있는지의 여부는 그 응용성의 정도에 따른다. 퍼지집합의 특징은 인간의 사고방법이나 주관적인 애매량(자연언어 포함)을 비교적 무리 없이 표현할 수 있는 점이다.

2.1 퍼지이론의 사고방식

퍼지이론이란 퍼지네스라는 불확실성의 양상을 취급하는 수학적 이론을 말한다. 퍼지네스란 개념의 정의나 언어의 의미에서 볼 수 있는 애매성을 말한

접수일 : 1998년 11월 13일

이연원, 이도형, 배대석 : 부경대학교 기계·자동차공학부

정용옥 : 부경대학교 화학공학과

박외철 : 부경대학교 산업시스템안전공학부

다. 예를 들면, “노인”, “키가 크다”, “작은 수” 등의 표현에 포함되는 불확실성이 퍼지네스라는 것이다. 이것은 종래 불확실성을 취급하는 확률과는 질적인 차이가 있다¹⁾.

2.2 애매성의 정량화

대부분의 자연언어는 그 의미, 내용이 애매하고 다의적이다. 특히 형용사에 관해서는 그 지시 대상이 특정되지 않고 폭을 가진다는 점에서 애매하다. “키가 크다”, “노인” 등 의미의 애매성을 양의 면에서 표현하기 위하여 퍼지 집합론에서는 애매성의 정도를 부여하는 함수, 멤버쉽 함수(membership function)를 도입한다. 정도는 그레이드(grade)라고도 한다. Fig. 1에 키의 크기에 대한 멤버쉽 함수를 나타낸다.

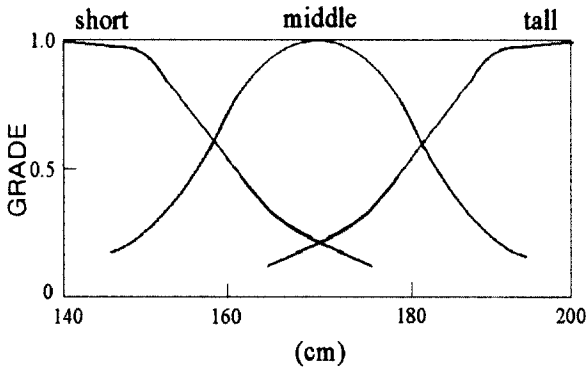


Fig. 1 Membership function of the height

2.3 퍼지이론의 CFD 적용

열 및 유체의 물리를 정식화한 편 미분방정식을 차분 방정식으로 변환하여, 수치적으로 풀 경우의 문제점은 3가지로 귀착된다. 첫째, 대류의 차분 표현인 $V \cdot \text{div}V$ 의 차분 근사 평가문제 둘째, 물리법칙을 기술하는 차분 방정식을 계산함에 있어서 연립 1차 방정식 $Ax=b$ 의 반복해법 셋째, 비 선형 제어문제, 즉 풀고자 하는 방정식 계를 제어하여 효율 좋게 안정성을 확보하는 문제 등이다. 이와 같은 부분이 퍼지 적용대상이 될 수 있으며 본 논문에서는 둘째번 문제를 주 대상으로 하고자 한다.

Navier-Stokes 방정식을 기초방정식으로 하는 유체의 수치해석 코드는 Euler법 등에 의한陽의스킵의 처리프로세스가 약 10%이고, $Ax=b$ 를 SOR 등의 반복법으로 구하는 프로세스가 약 90%를 차지하여, 반복 계산 시 많은 계산시간을 필요로 하기 때문에 실용계산의 고속화가 요구되어 지고 있다³⁾.

3. 해석대상

3.1 Poisson 방정식의 Dirichlet 문제

반복해법의 중요성을 조사하기 위해서 성질을 잘 알고있는 단위정방영역 $S=\{0,1\} \times \{0,1\}$ 의 Poisson 방정식의 Dirichlet 문제를 첫 번째 퍼지제어 대상으로 한다.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad (1)$$

$$f(x,y) = \exp\{-(x-1/2)^2-(y-1/2)^2\}$$

$$\text{경계조건 : } U(0,y)=U(1,y)=U(x,0)=U(x,1)=0$$

S의 한 변을 h개로 등분할 하면, 격자 점은

$$x(i) = ih, y(j) = jh$$

$$0 \leq i, j \leq N, h=1/N \quad (2)$$

로 정해진다. 이 방정식을 2차 정확도를 가진 중앙차분을 이용하고, SOR(Successive OverRelaxation)법을 적용하여 차분 식으로 변환하면,

$$U_{(i,j)}^{(k+1)} = \omega [U_{(i-1,j)}^{(k+1)} + U_{(i+1,j)}^{(k)} + U_{(i,j-1)}^{(k+1)} + U_{(i,j+1)}^{(k)} + h^2 f(i,j)]/4 + (1-\omega)U_{(i,j)}^{(k)} \quad (3)$$

이 얻어진다. 여기서 k는 k회의 반복을 나타낸다. 또 수렴판정조건은 오차 norm에 의하여 다음과 같다.

$$\|e^{(k)}\| = \|U^{(k)} - U^{(k-1)}\|_2 / \|U^{(k)}\|_2 < \epsilon \quad (4)$$

여기서 norm의 정의는

$$\|U\|_2 \equiv \sqrt{(U, U)} = [\sum_i |U(i)|^2]^{1/2} \text{이고, } \epsilon \text{은 } 1.0 \times 10^{-6} \text{이다.}$$

SOR법에 의한 식(3)의 수렴율은 완화계수 ω 에 의존하여, 최적의 완화계수 ω 의 추정이 중요하게 된다. 본 논문의 목적은 퍼지제어를 이용하여 반복 수를 최소화하는 것이다. 여기서 사용된 격자 수는 21×21 이다.

3.2 이차원 Cavity 유동

정방 이차원 Cavity 유동의 해석을 위한 계산영역에 대하여, 수평한 위 경계 벽이 일정속도로 움직이고 다른 벽은 정지상태이다. 해석을 위한 연속식 및 운동방정식을 흐름함수 ψ 와 와도 ξ 에 의한 방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\xi \quad (8)$$

여기서 모든 물리량은 경계 벽의 속도 및 정방형의 한변의 길이로 무차원화 되어있고, 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{정지벽}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 1 \quad (\text{이동벽}) \quad (10)$$

여기서 n은 외향 법선 방향을 나타낸다. 위 식(6)-(8)은 중앙차분법에 의해 간단히 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i,j}^{k+1} - \xi_{i,j}^k}{\Delta t} \\ &= -u_{i,j}^k \frac{\xi_{i+1,j}^k - \xi_{i-1,j}^k}{2\Delta x} - v_{i,j}^k \frac{\xi_{i,j+1}^k - \xi_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left[\frac{\xi_{i+1,j}^k - 2\xi_{i,j}^k + \xi_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\xi_{i,j+1}^k - 2\xi_{i,j}^k + \xi_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ & + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\xi_{i,j} \end{aligned} \quad (12)$$

$\Delta x = \Delta y = h$ 이면

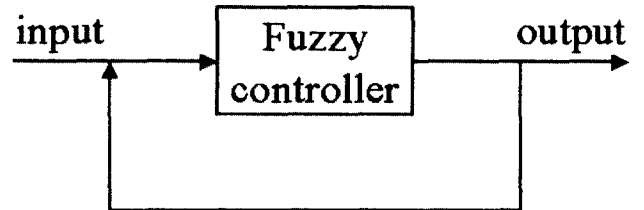
$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}^{k+1} = \omega \{ (\Psi_{i+1,j}^k + \Psi_{i-1,j}^{k+1} + \Psi_{i,j+1}^k + \Psi_{i,j-1}^{k+1}) \\ + h^2 \xi_{i,j}^k \} / 4 + (1 - \omega) \Psi_{i,j}^k \end{aligned} \quad (13)$$

Reynolds 수의 증가에 따라 중앙차분보다 고차의

QUICK 스킴 등의 風上차분법의 사용이 바람직 하나 여기서의 목적은 퍼지추론의 유용성의 확인에 있으므로 단순한 중앙차분을 이용하였다. 수렴판정은 식(4)을 이용하였다. Reynolds 수는 2000이며, 격자수는 65×65 이다.

4. 퍼지제어기

반복법에 의해서 연립 1차 방정식을 풀 경우, 그 계산효과를 높이기 위하여 퍼지제어기를 작성한다. 이 제어기는 반복에 의한 오차를 감시하여, 완화계수를 조정해나가면서 해를 수렴시켜 나가게 된다. 반복법의 효율화를 위한 제어기 작성은 2장의 수학적 이해 및 수치계산의 경험에 의한다. 대상으로부터 출력, ||e|| 등을 인식하여, ω 를 정하는 숨意(implication)는 “반복에 의한 오차 norm이 크고, 평균 수렴률이 약간 느리고, 또한 완화계수가 작다면, 완화계수는 현재의 값보다 크게 설정하는 것이 좋다.” “반복에 의한 오차 norm이 작고, 평균 수렴률이 약간 빠르고, 또한 완화계수가 크면, 완화계수는 현재의 값을 유지하는 것이 좋다.” 등이다. 이러한 제어규칙을 정량적으로 표현하기 위해서는 퍼지추론 규칙을 이용한다.



- Input : 1) Error norm, ||e||
2) Convergent rate, $R_k(G)$
3) Present relaxation factor, ω
- Output : New relaxation factor, ω

Fig. 2 Fuzzy control system of relaxation factor

4.1 제어기의 입출력

Fig. 2은 퍼지제어기의 입출력관계를 도식적으로 나타낸 것이다. 제어기의 입력으로서는 오차 norm, 평균수렴률 및 현재의 완화계수 등을 이용하고 출력은 새로운 완화계수가 된다. 오차 norm, ||e||에 대한 퍼지집합은 Fig. 3과 같이 sm(small)과 la(large)로 각각 나타낸다. 평균수렴률은 高橋⁶⁾의 개념을 채택하여 다음과 같이 하였다.

$$R_k(G) = \frac{\log_{10}||e(k)|| - \log_{10}||e(k-n)||}{n} \quad (14)$$

여기서 n은 샘플링 주기를 나타내며 3을 채택하였다. 평균수렴률에 대한 퍼지집합은 Fig. 4와 같이 fa(fast), sl(slow), ms(medium slow), mf(medium fast)로 정의하였다. 완화계수 ω 는 SOR법에서 $1 < \omega < 2$ 로 주어지나 1에 가까울수록 Gauss-Seidel 법에 가까워져 수렴이 늦어지는 경향이 있고, 2에 지나치게 가까이 갈수록 오차의 감소가 진동적으로 되어 수렴이 늦어지는 경향이 있다⁶⁾. 따라서 완화계수에 대한 퍼지집합은 Fig. 5와 같이 SM(small), LA(large), MS(medium small), ML(medium large)로 정의하였다.

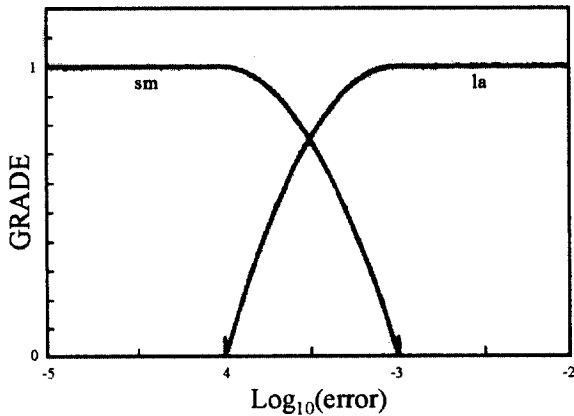


Fig. 3 Membership function of error norm

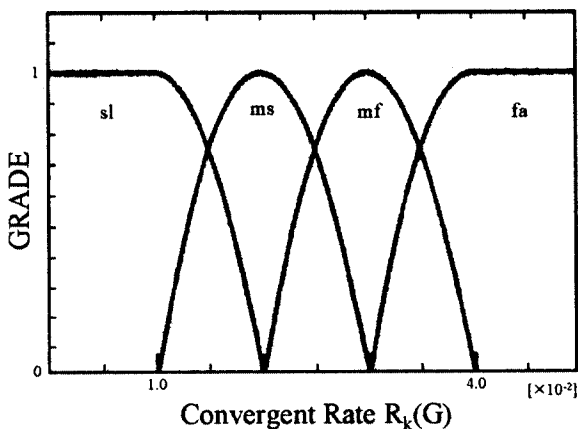


Fig. 4 Membership function of convergence rate

4.2 제어규칙

퍼지제어 규칙을 작성시 오차 norm 의 크기에 관계없이 동일한 제어를 하는 것으로 생각하여 오차 노름은 관측하지 않고 평균수렴률, 완화계수 값을

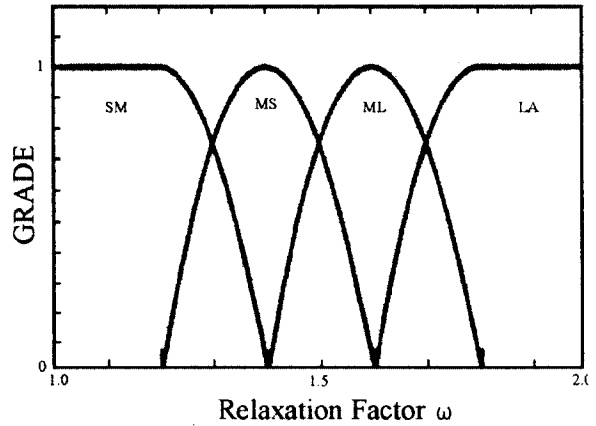


Fig. 5 Membership function of relaxation factor

입력으로 사용하여 출력을 선정하도록 Table1에 나타내었다. 또한, 완화계수의 수정 양이 크면 피드백 되는 양도 크게되어, 지나치지 않도록 하기 위하여 Fujita 등⁴⁾의 제안을 도입하여 다음과 같이 하였다.

$$\omega^{(k+1)} = 1.00 + (\omega^{(k)} - 1)^c \quad (15)$$

여기서, VL = very large => c=0.80
 LA = large => c=0.85
 SM = small => c=1.15
 VS = very small => c=1.20
 UT = untouched => c=1.00

4.3 계산예 및 결과

제안된 퍼지제어기의 유효성을 검증하기 위하여 식(1)의 Poission 방정식의 Dirichlet 문제를 계산하여 그 수렴과정을 Fig. 6에 나타내었다. 격자점수가 21×21인 경우 완화계수의 최적치, 즉 SOR법으로 해를 구할 때 반복행렬의 spectral radius를 최소화 하는 완화계수 ω_{opt} 는 $\omega_{opt} = 2/(1+\sin \pi \Delta x)$ 로 주어지고 1.73의 값을 갖는다. 이 경우는 53회에서 수렴한다. 이 값보다 작은 1.30일 경우, 퍼지제어를 하지 않는 경우 232회에서 수렴하였지만, 퍼지제어를 한 경우는 80회에 수렴하여 약 3배 정도의 빠른 수렴을 나타내었다. 최적값보다 큰 1.99인 경우는 수렴시킬 수 없었으며, 수렴판정을 1.0×10^{-5} 으로 완화시킬 경우 983회에 수렴하였다. 그러나 퍼지제어를 사용한 경우는 수렴에 문제가 없었으며 94회에 수렴하였다. 이러한 결과로부터 완화계수의 최적치를 사용하지 않아도 퍼지제어를 이용하여 완화계수를 제어하면 최적값에 가까운 반복회수로 계산할 수 있음을 알 수 있다.

Table 1 Fuzzy control rules

input		output	
ell	$R_k(G)$	$\omega^{(k)}$	$\omega^{(k+1)}$
la sm	sl	SM	VL
		MS	VL
		ML	VL
		LA	VS
	ms	SM	VL
		MS	VL
		ML	LA
		LA	SM
	mf	SM	LA
		MS	LA
		ML	UT
		LA	TU
fa	SM	UT	
	MS	UT	
	ML	UT	
	LA	UT	

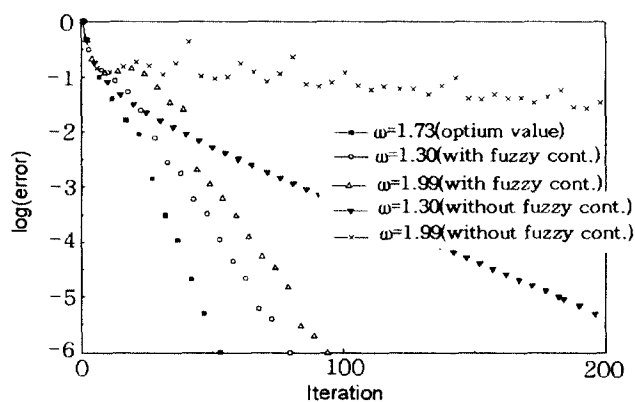


Fig. 6 Convergent process of Poisson equation

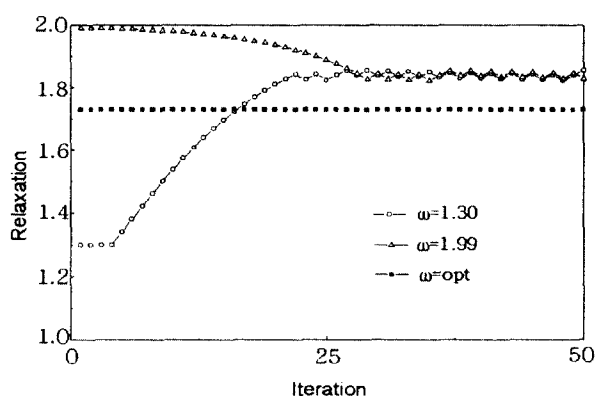


Fig. 7 Fuzzy control of relaxation factor

Fig. 7은 퍼지제어에 의해 완화계수가 제어되어 가는 양상을 나타내주는 그림이다. 약 25회 정도에서 최적값에 가까운 값으로 제어되어 좋은 수렴성

을 주고 있음을 알 수 있다. 퍼지제어기에 이용된 멤버쉽함수(등급)의 조정에 의하여 보다 나은 결과를 추적하는 것이 가능하다고 생각되나 미세한 조정이 목적이 아니고 퍼지제어의 유효성을 확인하는 것이 목적이므로 차후의 과제로 남긴다.

Fig. 8은 어느 특정시간에서 cavity 유동문제의 흐름함수 방정식의 수렴과정을 나타낸다. Poisson 방정식 문제와는 달리 최적의 완화계수를 알 수 없는 이 경우에도 퍼지제어가 수렴을 촉진시킨다는 사실을 알 수 있다. Fig. 9는 수렴한 경우의 유선을 나타내고 있으며 2차 와(渦)가 잘 예측되어져 있고 다른 연구자의 결과와도 잘 일치하고 있다.

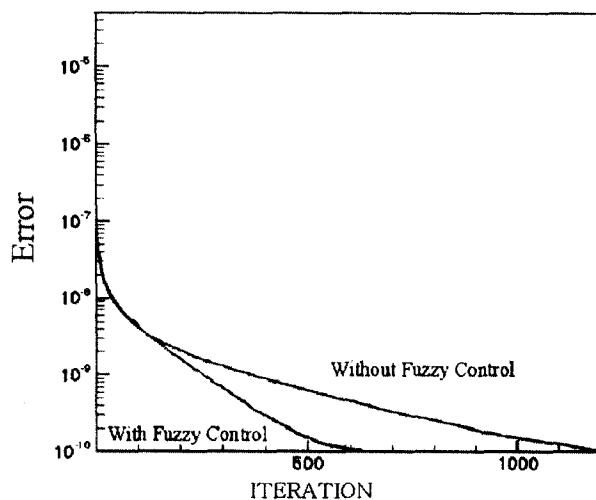


Fig. 8 Convergent process of cavity flow

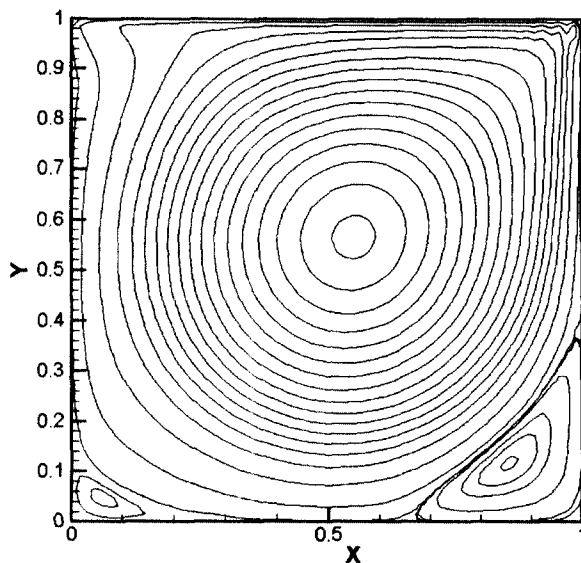


Fig. 9 Stream function plot

5. 결 론

퍼지추론을 응용하여 반복계산을 제어할 수 있는 독자적인 퍼지컨트롤러를 개발하여 제어한 결과 퍼지제어를 사용하지 않은 경우에 비해 수치계산의 고속화를 가능케 하며, 퍼지추론의 CFD에로의 응용의 유효성을 확인할 수 있었다. 퍼지이론은 애매한 대상을 명확하게 취급하는 이론이라는 것을 고려하면, 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm) 및 Chaos 기술 등과 융합하여 전산유체공학분야에도 적극적으로 응용할 가치가 있음을 확신한다.

후 기

본 연구의 일부는 1996년도 부경대학교 중점연구소 지원사업비에 의해 수행되었습니다. 관계자분 들에게 감사드립니다. 또한, 연구 수행 중 도움을 준 렉스로스세기 이형구 부장(당시 대학원생)에게 감사드립니다.

참고문헌

1. 퍼지기술연구회, "퍼지시스템 入門", 기전연구사, 1992
2. 박민용, 최항식 역, "퍼지 시스템의 응용입문", 대영사, 1990
3. 矢川元基, "フアジイ 推論", 培風館, 1992
4. Fujita Y. et al, "Feasibility of Fuzzy Control in Improving Efficiency of Iterative Method", JSME J., Vol. 60, No. 577, 1994
5. Yamaoka K. et al, "A Study on the Acceleration of Computations with Fuzzy Logic and Qualitative Reasoning", JSME J., Vol. 59, No. 561, 1993
6. 高橋 一, "シミュレーション技法へのあいまいさの應用", 日本シミュレーション學會誌, 第7卷 第2号, pp. 64~72, 1988