

## 표준공액구배법과 수정공액구배법을 이용한 2차원 열전도 문제의 역해석

최의락\* · 김우승\*\*  
(1998년 4월 28일 접수)

### An Inverse Analysis of Two-Dimensional Heat Conduction Problem Using Regular and Modified Conjugate Gradient Method

Eui-Rak Choi and Woo-Seung Kim

Key Words: Two-Dimensional Inverse Problem(2차원 역해석 문제), Heat Conduction(열전도), Conjugate Gradient Method(공액구배법)

#### Abstract

A two-dimensional transient inverse heat conduction problem involving the estimation of the unknown location,  $(X^*, Y^*)$ , and timewise varying unknown strength,  $G(\tau)$ , of a line heat source embedded inside a rectangular bar with insulated boundaries has been solved simultaneously. The regular conjugate gradient method, RCGM and the modified conjugate gradient method, MCGM with adjoint equation, are used alternately to estimate the unknown strength  $G(\tau)$  of the source term, while the parameter estimation approach is used to estimate the unknown location  $(X^*, Y^*)$  of the line heat source. The alternate use of the regular and the modified conjugate gradient methods alleviates the convergence difficulties encountered at the initial and final times (i.e.  $\tau=0$  and  $\tau=\tau_f$ ), hence stabilizes the computation and fastens the convergence of the solution. In order to examine the effectiveness of this approach under severe test conditions, the unknown strength  $G(\tau)$  is chosen in the form of rectangular, triangular and sinusoidal functions.

#### 기 호 설 명

$g$  : 열원의 세기(W/m)  
 $G$  : 열원의 무차원 세기 ( $=L_1 g/k(T_{ref}-T_i)$ )  
 $J$  : 식(4)로 정의되는 범함수  
 $J'$  : 식(13),(21)로 주어지는 범함수의 구배  
 $k$  : 열전도계수 (W/mK)  
 $L_1$  : 해석 영역의 가로 길이

$L_2$  : 해석 영역의 세로 길이  
 $M$  : 온도 측정 센서의 총 개수  
 $P_G^k, P_{X^*}^k, P_{Y^*}^k$  : 식(2),(10),(15)로 주어지는 감소 방향  
 $R_G^k$  : 식(16)으로 주어지는 감소 방향의 미분값  
 $T_i$  : 초기 온도  
 $T_{ref}$  : 기준 온도  
 $X$  :  $x$  방향으로의 무차원 변수 ( $=x/L_1$ )  
 $X^*$  :  $x$  방향으로의 무차원 위치  
 $X_m$  :  $x$  방향으로의 센서의 무차원 위치  
 $Y$  :  $y$  방향으로의 무차원 변수 ( $=y/L_1$ )

\* 한양대학교 대학원 기계공학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학과

- $Y^*$  :  $y$  방향으로의 무차원 위치  
 $Y_m$  :  $y$  방향으로의 센서의 무차원 위치  
 $Z_m$  : 수치 계산에 의한 무차원 측정 온도

## 그리스문자

- $\alpha$  : 열확산계수 ( $m^2/s$ )  
 $\beta_G^k, \beta_X^k, \beta_Y^k$  : 식(2),(9),(14)에서의 단계 크기  
 $\gamma_G^k$  : 식(11),(17)로 주어지는 공액계수  
 $\delta$  : Dirac delta function  
 $\epsilon$  : 식(22)로 주어지는 수렴 조건  
 $\epsilon_1$  : 식(25)로 주어지는 표준공액구배법의 수렴 조건  
 $\epsilon_2$  : 식(27)로 주어지는 수정공액구배법의 수렴 조건  
 $\Theta$  : 무차원 온도, ( $= (T - T_i) / (T_{ref} - T_i)$ )  
 $\Theta_m$  : 센서 위치에서의 무차원 온도  
 $\lambda(X, Y, \tau)$  : 식(5)로부터 정의된 부가 함수  
 $\sigma$  : 온도 측정 오차의 표준 편차  
 $\tau$  : 무차원 시간 ( $= at/L^2$ )  
 $\tau_f$  : 무차원 최종 시간

## 상첨자

- $k$  : 공액구배법에서의 반복 횟수

## 1. 서 론

최근 들어 열 관련 설계와 공학 시스템의 열적 조건의 모사에 있어 역해석(inverse analysis)이라는 새로운 연구 방향이 발전되어 왔다. 이러한 역해석 방법들은 우주선, 로켓 발사장치, 엔진 등과 관련된 비정상 열전달 과정의 실험적인 연구와 물질의 열역학적 물성치의 결정 등의 여러 분야에서 주목받아 왔다.<sup>(1)</sup> 직접 문제(direct problem)가 초기조건과 경계조건에 의해 해를 구할 수 있는 well-posed 문제인데 반해 역해석 문제(inverse problem)는 측정된 온도 데이터의 조그마한 변화에도 해가 큰 변동을 갖는 ill-posed 문제이므로 측정에 의한 오차가 포함된 경우 역해석 문제를 해석하는 것이 쉽지 않다.<sup>(2)</sup> 전도열

전달에 있어서의 역해석의 기본적인 바탕은 Beck<sup>(3)</sup> 등에 의해 이루어졌으며 효율적인 역해석 방법을 개발하기 위한 많은 노력과 다양한 문제에서의 역해석이 시도되었다. Haji-Sheikh<sup>(4)</sup> 등은 Monte Carlo법을 이용하여 전도 열전달에서의 역해석을 수행하였으며, Jarny<sup>(5)</sup> 등은 다차원 열전도 문제에서 다양한 조건에 대한 공액구배법을 이용한 역해석을 취급하였고, Reinhardt<sup>(6)</sup>는 연속법(sequential method)을 이용하여 열전도 문제에서의 역해석을 수행하고 연속법의 오차와 해의 안정성에 대해 연구하였다. Sawaf<sup>(7)</sup> 등은 Levenberg-Marquardt법을 이용하여 2차원 열전도 문제에서 온도에 선형적인 열전도계수와 열용량을 추정하는 등 다양한 역해석 방법을 시도하였다. Huang<sup>(8,9)</sup> 등은 공액구배법(conjugate gradient method)을 이용하여 룰주조 과정에서 룰표면의 열적 상황과 내연기관 실린더 내의 열유속을 추정하였고, Subramaniam<sup>(10)</sup> 등은 Monte Carlo법을 이용하여 복사열전달에서의 산란도를 추정하였다. 그리고 Zabarar<sup>(11)</sup>는 2차원 상변화 문제에서 원하는 상변화 속도를 얻기 위한 경계면에서의 열유속과 온도를 추정하였고, Silva Neto<sup>(12)</sup> 등은 공액구배법을 이용하여 1차원 열전도에서 해석 영역 내부에 존재하는 미지 열원의 세기와 그 위치를 추정하였다.

본 연구에서는 Silva Neto<sup>(12)</sup> 등이 수행한 1차원에서의 미지 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 미지 위치  $X^*$ 의 추정을 위한 역해석을 2차원에 대한 역해석으로 확장하여 미지 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 미지의 위치 ( $X^*, Y^*$ )를 동시에 추정하고자 한다. Silva Neto<sup>(12)</sup> 등은 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 미지 위치  $X^*$ 를 개별적으로 추정하고 이 과정을 반복적으로 수행하여 역해석 하였으며, 열원의 세기  $G(\tau)$ 에 대한 초기 가정값의 영향을 줄이기 위하여 몇 번의 반복 과정 후 열원의 세기를 특정한 시간에서의 값으로 다시 초기화하였다. 그러나 본 연구에서는 2차원 영역에서의 열원의 위치 추정에 있어서 열원의 위치와 세기를 연계하여 동시에 추정하고, 열원의 세기 추정을 위한 초기 가정값의 영향을 최소화하는 방법으로 수정공액구배법(modified conjugate gradient method, MCGM)을 사용하였다.

함수 추정 문제에서 초기 가정값의 영향을 최소화하기 위한 방법으로 다음 두 가지가 이용되

어 왔다. 첫 번째 방법은 원하는 추정 시간보다 충분히 길게 최종시간  $\tau_f$ 를 선정하여 표준공액구배법(regular conjugate gradient method, RCGM)을 이용해 역해석을 수행한 후, 필요한 시간까지의 결과만을 선택하여 역해석 결과를 얻는 방법이며, 두 번째 방법은 초기 가정에 의하여 몇 번의 반복적인 함수 추정을 실행한 후 최종 시간  $\tau_f$ 에 가까운 이전의 시간에서의 추정된 값을 다시 초기 가정값으로 정의하여 추정을 계속하는 방법이다. 이 두 방법 모두 좋은 해를 얻을 수 있다. 그러나 첫 번째 방법에 있어서는 몇 번의 반복 후에, 그리고  $\tau_f$ 가 얼마일 때의 값을 초기 가정값으로 다시 선정해야 하는가 라는 문제점이 존재하며 실제 열원의 일계 도함수가  $\tau = \tau_f$  부근에서 연속적이며 그 값이 크지 않은 경우는 좋은 결과를 얻을 수 있지만 불연속적인 경우에는 좋은 결과를 기대하기 어렵다. 본 연구에서는 표준공액구배법과 함께 수정공액구배법을 연계하여 사용함으로써 초기 가정값의 영향을 최소화하는 보다 일반적인 역해석 방법을 이용하여 2차원 열전도 문제에서의 미지 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 미지의 위치  $(X^*, Y^*)$ 를 추정하고자 한다.

## 2. 이론

본 연구에서 고려된 역해석 대상은 다음과 같

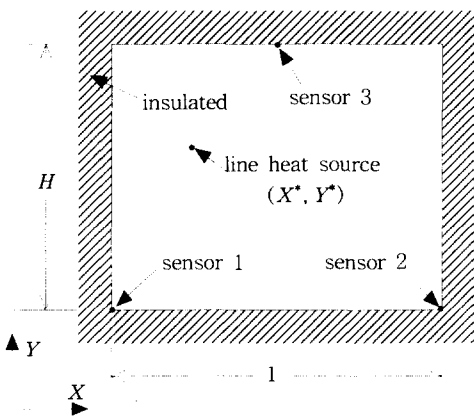


Fig. 1 Dimensionless location of a line heat source and temperature sensors.

다. Fig.1과 같은 단면 길이가  $X$ 축으로 1,  $Y$ 축으로  $H$ 인 직사각형의 해석 영역의 초기 온도는  $T_0$ 로 일정하게 주어져 있다. 직사각형 내부에는 미지의 위치  $(X^*, Y^*)$ 에 존재하는 미지의 세기  $G(\tau)$ 를 갖는 열원으로부터 열이 발생되며, 경계면은 단열되어 있다. 본 연구에서는 수치적으로 측정된 비정상 온도를 이용하여 2차원 영역에서의 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 위치  $(X^*, Y^*)$ 를 동시에 추정하고자 한다.

### 2.1 직접 문제

본 연구에서 고려한 역해석 대상에 대한 지배방정식과 경계 및 초기 조건을 무차원으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + G(\tau) \tag{1a}$$

$$\delta(X - X^*)\delta(Y - Y^*) = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0, \quad X = 0, \quad 0 < Y < H, \quad \tau > 0 \tag{1b}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0, \quad X = 1, \quad 0 < Y < H, \quad \tau > 0 \tag{1c}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0, \quad Y = 0, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \tag{1d}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0, \quad Y = H, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \tag{1e}$$

$$\Theta(X, Y, \tau) = 0, \quad \tau = 0 \tag{1f}$$

직접문제에서는 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 열원의 위치  $(X^*, Y^*)$ 는 주어지므로 일반적인 수치해법으로 풀 수 있다.

### 2.2 역해석 문제

역해석 문제의 수학적 형태는 식 (1)로 주어진 직접문제와 유사하다. 그러나 직접 문제와는 달리 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 열원의 위치  $(X^*, Y^*)$ 가 미지값으로 주어지며, 열원의 세기와 미지 위치에 대한 정보를 얻기 위해 단열 경계면에 설치된 센서들에서 수치적으로 계산된 비정상 온도 데이터를 이용하였다. 본 연구에서 열원의 세기  $G(\tau)$ 의 추정은 함수 추정 문제(function estimation problem)이며, 미지 위치  $(X^*, Y^*)$ 의 추정은 파라미터 추정 문제(parameter estimation

problem)이다. 열원의 세기  $G(\tau)$ 를 추정하기 위해 수정공역구배법과 표준공역구배법을 상호보완적으로 적용하였다.

### 2.2.1 미지 위치 $(X^*, Y^*)$ 의 추정

열원의 미지 위치  $(X^*, Y^*)$ 의 추정은 파라미터 추정을 위한 공역구배법을 이용하였으며 다음과 같다.

$$X^{*k+1} = X^{*k} - \beta_{X^*}^k P_{X^*}^k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2a)$$

$$Y^{*k+1} = Y^{*k} - \beta_{Y^*}^k P_{Y^*}^k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2b)$$

여기서  $P_{X^*}^k$ 와  $P_{Y^*}^k$ 는 감소 방향(direction of descent)이고,  $\beta_{X^*}^k$ 와  $\beta_{Y^*}^k$ 는 단계 크기(step size)이며 부록에 나타나 있다.

### 2.2.2 열원의 세기 $G(\tau)$ 의 추정

미지 열원의 세기 추정은 함수 추정 문제로 다음과 같은 세 가지 보조문제를 필요로 한다.

#### 직접 문제

직접 문제는 식 (1)로 주어지며  $G(\tau)$ ,  $(X^*, Y^*)$ 는 첫 반복에서는 초기 가정값을 이용하며, 그 이후에는 반복 계산에 의해 추정된 값을 이용하여 계산한다.

#### 민감도 문제(sensitivity problem)

민감도 문제는 직접 문제에  $\Theta(X, Y, \tau)$  대신  $\Theta(X, Y, \tau) + \Delta\Theta(X, Y, \tau)$ , 그리고  $G(\tau)$  대신  $G(\tau) + \Delta G(\tau)$ 를 대입하여 구성된 방정식으로부터 직접 문제를 빼서 얻을 수 있으며 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \Delta\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Delta\Theta}{\partial Y^2} + \Delta G(\tau) \quad (3a)$$

$$\delta(X - X^*)\delta(Y - Y^*) = \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial X} = 0, \quad X=0, \quad 0 < Y < H, \quad \tau > 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial X} = 0, \quad X=1, \quad 0 < Y < H, \quad \tau > 0 \quad (3c)$$

$$\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial Y} = 0, \quad Y=0, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \quad (3d)$$

$$\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial Y} = 0, \quad Y=H, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \quad (3e)$$

$$\Delta\Theta(X, Y, \tau) = 0, \quad \tau = 0 \quad (3f)$$

#### 부가 문제(adjoint problem)

역해석 문제는 다음과 같은 범함수(functional)  $J$ 를 최소화시키는 최적화 문제로 해를 추정한다.

$$J[G(\tau), X^*, Y^*] \quad (4)$$

$$= \int_{\tau=0}^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Theta_m(\tau) - Z_m(\tau)]^2 d\tau$$

여기서  $M$ 은 온도측정 센서의 개수를 나타낸다.

부가 문제를 얻기 위해서 식 (1a)에 부가 함수(adjoint function)  $\lambda(X, Y, \tau)$ 를 곱하고 전체 시간과 공간에 대해 적분한 후 범함수  $J$ 를 더하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$J = \int_{\tau=0}^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Theta_m(\tau) - Z_m(\tau)]^2 d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau_f} \int_{Y=0}^{Y=H} \int_{X=0}^{X=1} \lambda \left[ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + G(\tau)\delta(X - X^*)\delta(Y - Y^*) - \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \right] dXdYd\tau \quad (5)$$

범함수  $J$ 의 변동량  $\Delta J$ 는 식 (5)의  $G(\tau)$ ,  $\Theta(X, Y, \tau)$ 에 각각  $\Delta G(\tau)$ ,  $\Delta\Theta(X, Y, \tau)$  만큼의 변동량을 주어 얻어낸 결과식에서 다시 식 (5)를 뺀 후 2차 미분항을 무시하면 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta J = \int_{\tau=0}^{\tau_f} \sum_{m=1}^M 2[\Theta_m(\tau) - Z_m(\tau)]\Delta\Theta_m d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau_f} \int_{Y=0}^{Y=H} \int_{X=0}^{X=1} \lambda \left[ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \Delta G(\tau)\delta(X - X^*)\delta(Y - Y^*) - \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial \tau} \right] dXdYd\tau \quad (6)$$

식 (6)의 우변을 부분적분하고 민감도 문제에서의 초기 조건과 경계 조건을 적용한 결과식에서  $\Delta J$ 가 최소화되기 위한 조건을 구하면 다음과 같이 부가 함수  $\lambda(X, Y, \tau)$ 에 대한 부가 문제를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Y^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + 2 \sum_{m=1}^M [\Theta_m(\tau) - Z_m(\tau)] \delta(X - X_m)\delta(Y - Y_m) = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X} = 0, \quad X=0, \quad 0 < Y < H, \quad \tau > 0 \quad (7b)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X} = 0, \quad X=1, \quad 0 < Y < H, \quad \tau > 0 \quad (7c)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y} = 0, \quad Y=0, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \quad (7d)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y} = 0, \quad Y=H, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0 \quad (7e)$$

$$\lambda(X, Y, \tau) = 0, \quad \tau = \tau_f \quad (7f)$$

부가 문제는 식 (1)로 주어지는 일반적인 초기치 문제와는 달리 최종시간  $\tau = \tau_f$ 에서의 조건이 주어지 있지만  $\tau^* = \tau_f - \tau$ 로 변환하면 일반적인 초기치 문제로 다룰 수 있다. 부가 문제를 얻은 후 범함수  $J$ 의 변동량  $\Delta J$ 는 다음과 같다.

$$\Delta J = \int_{\tau=0}^{\tau_f} \lambda(X^*, Y^*, \tau) \Delta G(\tau) d\tau \quad (8)$$

### 2.3 표준공액구배법

열원의 미지 위치 추정에서의 열원의 세기  $G(\tau)$ 를 추정하기 위한 표준공액구배법의 과정은 다음과 같다.

$$G^{k+1} = G^k - \beta_G^k P_G^k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$P_G^k = J_G^k + \gamma_G^k P_G^k, \quad \gamma_G^0 = 0 \quad (10)$$

$$\gamma_G^k = \frac{\int_0^{\tau_f} [J_G^k(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^{\tau_f} [J_G^{k-1}(\tau)]^2 d\tau} \quad (11)$$

여기서  $P_G^k$ 는 열원의 미지 세기  $G(\tau)$ 에 대한  $k$ 번째 계산에서의 감소 방향이고,  $\gamma_G^k$ 는 공액 계수(conjugate coefficient)이며,  $\beta_G^k$ 는  $k$ 번째 반복에서  $k+1$ 번째 반복으로의 단계 크기이다. 그리고 범함수  $J$ 의 구배  $J_G^k(\tau)$ 는 식 (8)과 다음의 미분 가능한 연속함수의 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\Delta J(\Delta G(\tau)) = \int_{\tau=0}^{\tau_f} J_G(\Delta G(\tau)) \Delta G(\tau) d\tau \quad (12)$$

그러므로 식 (8)과 (12)로부터  $G(\tau)$ 에 대한 범함수  $J$ 의 구배  $J_G(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$J_G(\Delta G(\tau)) = \lambda(X^*, Y^*, \tau) \quad (13)$$

단계 크기  $\beta_G^k$ 는 열원의 미지 세기  $G(\tau)$ 와 미지 위치  $(X^*, Y^*)$ 를 동시에 추정하는 경우와 열원의 미지 세기  $G(\tau)$ 만을 추정하는 경우에 각각 다른 형태를 취하며, 각각에 대한 식은 부록에 나타나 있다.

표준공액구배법은 식 (7f)와 (13)에 의해  $J_G^k(\tau_f) = 0$ 이므로 식 (10)으로부터  $P_G^k(\tau_f) = 0$ 이 되고, 결과적으로 식 (9)로부터  $G^{k+1}(\tau_f) = G^0(\tau_f)$ 가 되어 최종시간  $\tau_f$ 에서의 초기 가정값의 영향이 지속되지만 최초 시간  $\tau=0$ 에서의 추정 대상을 잘 추정하는 특징을 가지고 있다. 한편 표준공액구배법을 적용함에 있어서 최종 시간에서 추정된 열원의 세기값이 실제 열원의 세기와 비교해 많은 차이가 있는 경우 최종 시간  $\tau_f$  근처뿐만 아니라 전체적인 해의 추정에도 영향을 미치게 된다.

### 2.4 수정공액구배법(MCGM)

열원의 세기  $G(\tau)$ 를 추정하기 위한 수정공액구배법의 과정은 다음과 같다.

$$G^{k+1} = G^k - \beta_G^k P_G^k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$P_G^k(\tau) = \int_0^{\tau} R_G^k(t) dt \quad (15)$$

$$R_G^k = J_G^k + \gamma_G^k R_G^k, \quad \gamma_G^0 = 0 \quad (16)$$

$$\gamma_G^k = \frac{\int_0^{\tau_f} [J_G^k(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^{\tau_f} [J_G^{k-1}(\tau)]^2 d\tau} \quad (17)$$

여기서  $R_G^k$ 는 감소 방향의 미분계수(derivative of the direction of descent)이다.

수정공액구배법에서 이용되는 범함수  $J$ 의 구배  $J_G$ 를 유도하기 위해 다음과 같이 열원의 세기  $G(\tau)$ 를 미분 가능한 연속함수라고 가정한다.

$$G(\tau) = \int_{t=0}^{\tau} \frac{dG(t)}{dt} dt \quad (18)$$

그리고 다음 관계식을 이용하였다.

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau_f}^{\tau} \lambda(X^*, Y^*, \tau^*) d\tau^* = \lambda(X^*, Y^*, \tau) \quad (19)$$

식 (19)를 식 (8)에 대입하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta J \left( \frac{d\Delta G}{dt} \right) &\equiv \Delta J \\ &= - \int_{\tau=0}^{\tau_f} \frac{d\Delta G(\tau)}{dt} \int_{\tau_f}^{\tau} \lambda(X^*, Y^*, \tau^*) d\tau^* d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)을 식 (12)와 비교하면 다음과 같이 수정공역구배법에서의 구배  $J'_G$ 를 얻을 수 있다.

$$J'_G \equiv J' \left( \frac{d\Delta G}{dt} \right) = \int_{\tau_f}^{\tau} \lambda(X^*, Y^*, t) dt \quad (21)$$

수정공역구배법에서의 단계 크기  $\beta_G^k$ 는 열원의 미지 세기  $G(\tau)$ 만의 추정을 위한 표준공역구배법의 단계 크기와 같은 형태를 가진다.

수정공역구배법에서는 식 (15)와 (16)에 의해  $P_G^k(0) = 0$ 이므로 식 (14)로부터  $G^{k+1}(0) = G^0(0)$ 이므로  $\tau=0$ 에서 초기 가정값의 영향이 남게 된다. 그리고 추정 대상을 미분 가능한 연속함수 형태로 추정하므로 사각파나 삼각파 등과 같이 미분 불가능한 형태를 갖는 열원에 대해서는 그 세기를 잘 추정하지 못한다<sup>(1,13)</sup>. 그러나 수정공역구배법에서는  $G(\tau_f)$ 의 추정이 가능하므로 표준공역구배법을 적용하기 이전 과정으로서 최종 시간  $\tau_f$ 에서의 열원의 세기  $G(\tau_f)$ 를 추정하는데 적용 가능하다. 그러므로 수정공역구배법의 특징을 이용하여 표준공역구배법이 최종 시간에서의 열원의 세기  $G(\tau_f)$ 를 정확하게 추정하지 못하는 단점을 보완할 수 있다.

## 2.5 수렴조건

일반적으로 측정 오차가 없는 경우에는 다음과 같은 수렴 조건이 이용될 수 있다.

$$J(G^{k+1}, X^{*k+1}, Y^{*k+1}) < \varepsilon \quad (22)$$

여기서  $\varepsilon$ 은 임의의 작은 값이다. 그러나 온도 측정에 오차가 포함된 경우에는  $\Theta_m(\tau) - Z_m(\tau)$

$= \sigma$ 로 두어 다음과 같은 형태의 수렴 조건을 이용하였다.

$$\varepsilon \equiv \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M \sigma^2 d\tau = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Theta_m(\tau) - Z_m(\tau)]^2 d\tau \quad (23)$$

여기서 측정 오차의 표준편차  $\sigma$ 가 일정하다는 가정 하에 다음과 같은 수렴 조건을 얻을 수 있다.

$$J(G^{k+1}, X^{*k+1}, Y^{*k+1}) < \varepsilon = M\sigma^2\tau_f \quad (24)$$

그러나 추정된 열원의 위치가 실제 열원의 위치와 차이가 크거나 사각파 형태의 열원에 대해  $\tau = \tau_f$ 에서 초기 가정에 의한 영향이 많이 남아 있는 경우에는 범함수  $J$ 가 위의 수렴조건을 만족시키지 못하며 수렴 속도는 현저히 떨어지게 되어 반복 횟수만이 증가하게 된다. 이러한 경우를 고려하여 열원의 미지 위치 추정 후 열원의 세기  $G(\tau)$ 만의 추정 과정의 표준공역구배법에서 다음의 수렴조건을 추가로 이용하였다.

$$\left| \frac{J^{k+1} - J^k}{J^{k+1}} \right| < \varepsilon_1 \quad (25)$$

여기서  $\varepsilon_1$ 의 값은 0.0001로 택하였다. 그리고 위치 추정을 위한 표준공역구배법에서는 다음과 같이  $\Delta X^*$ 와  $\Delta Y^*$ 가 격자 간격의 10% 이내의 값을 가질 경우 수렴된 것으로 간주하고, 열원의 세기  $G(\tau)$ 의 추정만을 실행한다.

$$\Delta X^* \equiv |X^{*k+1} - X^{*k}| < 0.1\Delta X \quad (26a)$$

$$\Delta Y^* \equiv |Y^{*k+1} - Y^{*k}| < 0.1\Delta Y \quad (26b)$$

여기서  $\Delta X$ 와  $\Delta Y$ 는 각각  $X$ 와  $Y$ 방향으로의 격자 간격이다.

한편, 열원의 세기만의 추정을 위한 수정공역구배법의 수렴조건은 다음과 같다.

$$\left| \frac{J^{k+1} - J^k}{J^{k+1}} \right| < \varepsilon_2 \quad (27)$$

본 연구에서  $\varepsilon_2$  값은 0.01로 하였다.

2.6 수치 절차

본 역해석을 위한 수치 절차는 다음과 같다.

- Step 1. 미지의 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 위치  $(X^*, Y^*)$ 를 가정.
- Step 2. 추정된 위치 또는 초기 가정된 위치에 대해 수정공역구배법에 대한 수렴 조건인 식 (27)을 만족할 때까지 열원의 세기만을 추정하기 위한 수정공역구배법을 반복실행. (범함수  $J$ 에 대한 수렴조건인 식(24)를 만족한 경우 Step 6 실행)
- Step 3. Step 2에서 추정된 미지 열원의 세기를 이용하여 미지 위치 추정을 위한 표준공역구배법을 1회 실행.
- Step 4. Step 2와 Step 3을 위치에 대한 수렴 조건인 식 (26)을 만족할 때까지 반복 실행.
- Step 5. 수렴된 위치와 추정된 미지 열원의 세기를 이용하여 수정공역구배법에 대한 수렴조건인 식 (27)을 만족할 때까지 미지 열원의 세기만을 추정하기 위한 수정공역구배법을 반복 실행.
- Step 6. 추정된 열원의 세기  $G(\tau)$ 를 새로운 초기 가정값으로 하여 열원의 세기만을 추정하기 위한 표준공역구배법을 반복 실행하고, 범함수  $J$ 에 대한 수렴조건인 식 (24)가만족된 경

우 수치 계산 종료.

3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 2차원 열전도 문제에서의 역해석을 수행하기 위해 공역구배법을 상호 보완적으로 이용하였으며, 미지 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 열원의 미지 위치  $(X^*, Y^*)$ 의 추정에 대한 역해석의 정확도를 검증하기 위해 Silva Neto와 Ozisik<sup>(12)</sup>이 이용한 일계 도함수가 불연속인 삼각파와 사각파 그리고 미분 가능한 연속함수인 사인파 형태의 열원에 대해 역해석을 수행하였다.

측정오차가 포함된 측정 온도 데이터는 다음과 같이 수치적으로 계산된다.

$$Z_{m,i} = \theta_{m,i} + \sigma e_{m,i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

$$, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

여기서  $\theta_{m,i}$ 는 실제 열원의 위치와 세기를 이용하여 수치적으로 계산된 엄밀해이며,  $M$ 과  $N$ 은 각각 온도측정 센서의 총 개수와 총 시간단계의 개수이다.  $\sigma$ 는 측정오차의 표준편차(standard deviation)이며,  $e_{m,i}$ 는 정규 분포에 의한 무작위값으로 IMSL의 서브루틴 DRNNOR을 이용하여

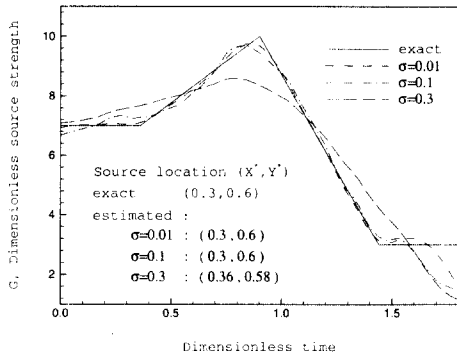


Fig. 2 Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a triangular function at the location (0.3,0.6) by using Silva Neto's method.

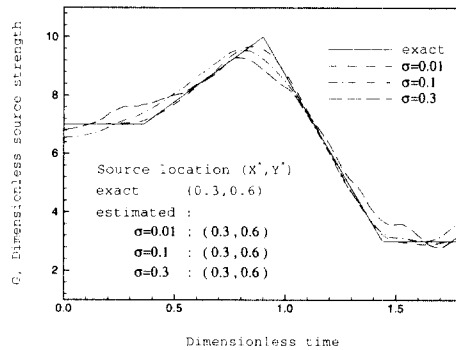


Fig. 3 Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a triangular function at the location (0.3,0.6) by using the present method.

계산하였다. 본 연구에서는 무작위 값이 99%의 신뢰도를 갖도록 하기 위해 다음 범위의 값을 선택하였다.

$$-2.576 < e_{m,i} < 2.576 \quad (29)$$

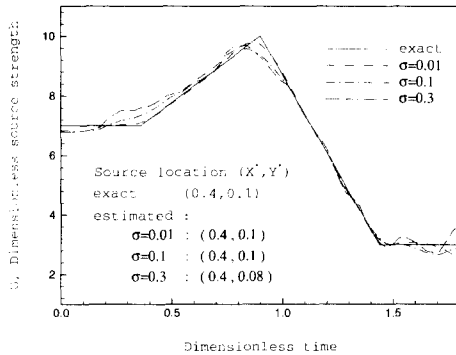


Fig. 4 Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a triangular function at the location (0.4,0.1) by using the present method.

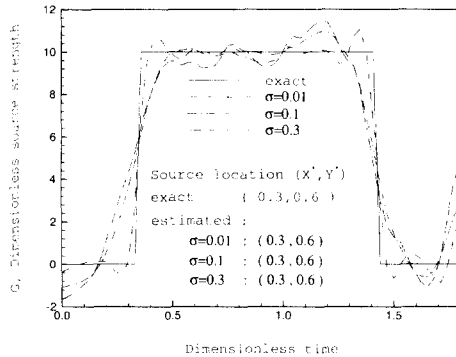


Fig. 5 Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a rectangular function at the location (0.3,0.6) by using the present method.

본 연구에서는 결정하고자 하는 미지수의 개수와 같은 3개의 센서를 이용하였고, 각 센서들의 위치는 역해석 대상의 형상을 고려하여 Fig. 1과 같이 (0,0), (1,0) 그리고 (0.5, H)로 하였고, 동일한 시간에 각각의 센서는 동일한 측정 오차를 갖는다고 가정하였다.

Fig. 1은 열원과 센서들의 위치를 나타낸다. 역해석 대상은 경계면이 단열된 상태에서 초기에 온도  $T_i$ 로 일정하며,  $\tau > 0$ 인 조건에서 열원으로부터  $G(\tau)$ 의 세기로 에너지가 가해진다. 열원의 세기  $G(\tau)$ 와 열원의 위치  $(X^*, Y^*)$ 는 역해석을 통해 추정되어야 할 대상으로, 본 역해석에서는  $G(\tau)$ 와  $(X^*, Y^*)$ 에 대한 초기 가정값으로 각각 1과 (0.5, 0.5H)를 이용하였고, H는 '1'로 설정하였다. 그리고 측정온도  $Z_m(\tau)$ 에 포함되는 오차에 대한 표준편차 값으로  $\sigma=0.01$ ,  $\sigma=0.1$  그리고  $\sigma=0.3$ 을 이용하였다.

Fig. 2는 최종시간  $\tau = \tau_f$ 에서 추정된 값  $G(\tau_f)$ 가 초기 가정값  $G^0(\tau_f)$ 로 고정되는 단점을 보완하기 위하여 Silva Neto와 Ozisik<sup>(12)</sup>이 이용한 방법으로 삼각과 형태의 열원에 대해 역해석한 결과이다. 실제 열원의 위치는 (0.3, 0.6)으로  $\sigma=0.01$ 과  $\sigma=0.1$ 인 경우에는 열원의 미지 위치

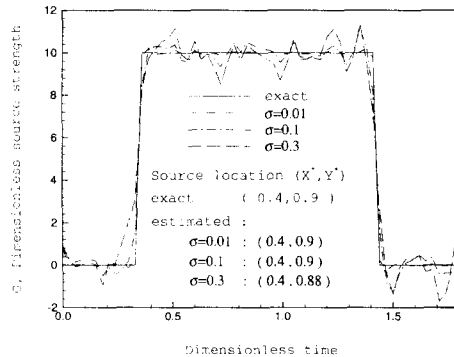


Fig. 6 Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a rectangular function at the location (0.3,0.6) by using the present method



를 정확히 추정하였다. 그러나  $\sigma=0.3$ 인 경우에는 정확한 추정이 이루어지지 않았다. 추정된 열원의 세기  $G(\tau)$ 는  $\tau=\tau_f$ 와  $\tau_f$ 에 가까운 시간 영역에서 실제 열원의 세기와 비교하여 많은 차이를 보인다. 이는 RCGM에서  $\tau=\tau_f$ 에서 추정된 열원의 세기값이 초기 가정값으로 고정되며, 이로 인하여  $\tau=\tau_f$  주변 영역에도 영향을 미치는 단점에 기인한 것으로 참고문헌<sup>(12)</sup>에서 사용한 방법이 이러한 현상을 효과적으로 해결하지 못하기 때문이다.

Fig. 3은 본 연구에서 이용한 방법으로 삼각과 형태의 열원에 대해 역해석을 수행한 것이다. 열원의 위치는  $\sigma=0.3$ 인 경우에 대해서도 정확한 추정이 이루어졌으며, Fig. 2와 비교할 때 열원의 세기  $G(\tau)$ 도 본 연구에서 사용한 방법으로 역해석한 경우가 참고문헌<sup>(12)</sup>에서 제안한 방법을 이용했을 때보다 더 정확함을 볼 수 있다.

Fig. 4는 (0.4,0.1)에 위치한 삼각과 형태의 열원에 대해 역해석한 결과로 Fig. 3에서와 유사한 결과를 보여준다.  $\sigma=0.3$ 인 경우 열원의 위치에 대한 추정이 정확하지 않다. 이는 열원의 위치 (0.4,0.1)이 (0.3,0.6)에 비해 센서 3으로부터 멀리 떨어져 있기 때문이다. 그러나 열원의

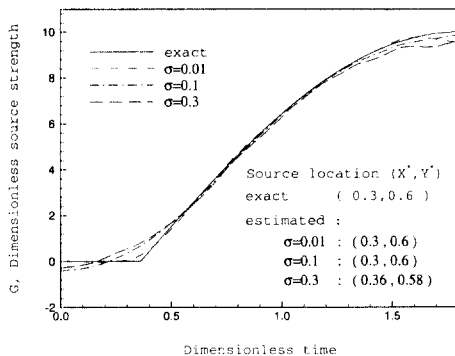
세기  $G(\tau)$ 는 실제 열원의 세기값과 잘 일치한다.

Fig. 5와 Fig. 6은 사각과 형태의 열원이 (0.3,0.6)과 (0.4,0.9)에 위치하였을 때에 대해 각각 역해석한 결과이다. 두 경우 모두 열원의 위치에 대해서는 비교적 정확한 추정이 이루어졌으나, Fig. 5에서의 추정된 열원의 세기는 Fig. 6에서 추정된 열원의 세기에 비해 정확하지 않다. 이는 열원이 (0.3,0.6)에 위치할 때보다 (0.4,0.9)에 위치했을 때 센서 3이 열원의 세기 변화에 더 민감하여 열원의 세기에 대해 더욱 정확한 정보를 얻을 수 있기 때문이다.

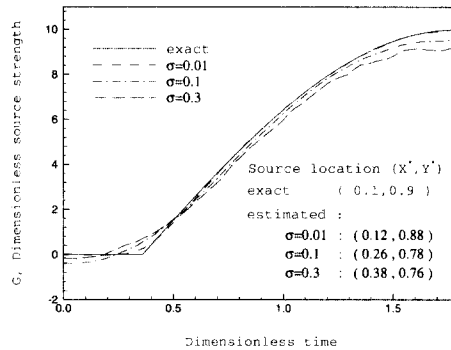
Fig. 7과 Fig. 8은 사인파 형태의 열원이 각각 (0.3,0.6)과 (0.1,0.9)에 위치한 경우에 대해 역해석한 결과이다. Fig. 8을 살펴보면 열원의 위치가 (0.1,0.9)일 때 추정된 열원의 위치는 매우 부정확하다. 그 이유는 열원이 센서로부터 멀리 떨어져 있어 센서들이 열원의 위치 변화나 세기의 변화에 대한 민감도가 작기 때문이다.

#### 4. 결론

본 연구에서 수행한 표준공역구배법과 수정공역구배법을 이용한 2차원 열전도 문제의 역해석을 통해 미지 열원의 세기와 위치 추정에 있어



**Fig.7** Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a sinusoidal function at the location (0.3,0.6) by using the present method.



**Fig.8** Estimation of the strength of a line heat source varying with time as a sinusoidal function at the location (0.1,0.9) by using the present method.

서 만족할 만한 결과를 얻었으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 미지 위치의 추정이 열원의 세기 추정과 연계하여 동시에 이루어지는 경우가 독립적으로 열원의 위치를 추정하는 것보다 효과적인 역해석이 이루어지며, 정확한 위치 추정이 이루어지기 위해서는 위치 추정을 위한 과정 중에 열원의 세기만을 위한 추정이 이루어져야함을 알 수 있다.

(2) 초기 가정값의 영향을 최소화하기 위해 본 연구에서 이용한 수정공역구배법이 역해석에서 일반적인 방법으로써 이용 가능함을 알 수 있다. 즉 위치 추정과정에서는 위치 추정의 반복과정중에 수정공역구배법을 반복하고 위치에 대한 추정이 끝난 후 열원의 세기값을 추정된 열원의 세기  $G(\tau_f)$ 로 다시 초기화함으로써 초기 가정값에 의한 영향을 줄일 수 있다.

(3) 본 연구에서 초기 가정의 영향을 줄이기 위해 적용한 역해석 방법은 대류 및 복사를 포함하는 열전달 문제의 역해석 문제에 적용가능하며, 효율적이고 정확한 해를 얻을 수 있다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 '95 국제공동연구과제(956-1000-001-2)의 일부로서 수행되었으며, 이에 관계자 제위께 감사드립니다. 또한 미국 측의 공동 연구자이며, 본 논문에 조언을 준 North Carolina 주립대학의 M. N. Ozisik 교수님에게도 감사를 표합니다.

## 참고문헌

- (1) Oleg. M. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problem (*Springer-Verlag*, 1995)
- (2) M. N. Ozisik, Heat Conduction, 2nd ed. (*Wiley Interscience*, 1993)
- (3) J. V. Beck, B. Blackwell and C. R. St. Clair, Jr., Inverse Heat Conduction (*Wiley Interscience*, 1985)
- (4) A. Haji-Sheikh and F. P. Buckingham, "Multidimensional Inverse Heat Conduction Using the Monte Carlo Method", *Transactions of the ASME*, vol.115, February 1993.
- (5) Jarny, M. N. Ozisik and J. P. Bardou, "A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 11, pp. 2911-2919, 1991.
- (6) H. J. Reinhardt, "Sequential Method of Solving The Inverse Heat Conduction Problem", *Numerical Heat Transfer*, part B, vol. 24, pp. 455-474, 1993.
- (7) B. Sawaf and M. N. Ozisik, "An Inverse Analysis to Estimate Linearly Temperature Dependent Thermal Conductivity Components and Heat Capacity of an Orthotropic Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, No. 16, pp. 3005-3010, 1995.
- (8) C. H. Huang, T. M. Ju and A. A. Tseng, "The Estimation of Surface Thermal Behavior of the Working Roll in Hot Rolling Process", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 38, No. 6, pp. 1019-1031, 1995.
- (9) C. H. Huang and J. Y. Wu, "Two Dimensional Inverse Problem in Estimating Heat Fluxes of an Enclosure with Unknown Internal Heat Sources", *J. Appl. Phys.*, 76(1), July 1994.
- (10) S. Subramaniam and M. P. Menq, "Solution of the Inverse Radiation Problem for Inhomogeneous and Anisotropically Scattering Media Using Monte Carlo Technique", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34, No 1, pp. 253-266, 1991.
- (11) N. Zabararas, Y. Ruan and O. Richmond, "Design of Two-Dimensional Stefan Processes with Desired Freezing Front Motions", *Numerical Heat Transfer*, part B, vol. 21, pp. 307-325, 1992.
- (12) A. J. Silva Neto and M. N. Ozisik, "Simultaneous Estimation of Location and Timewise-varying Strength of A Plane Heat Source", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 24,

pp. 467-477, 1993.

- (13) C. H. Huang and M. N. Ozisik, "Conjugate Gradient Method for Determining the Unknown Strength of an Internal Plane Heat Source", *J. Franklin Institute*, 1992.

## 부 록

- A.1 열원의 미지 위치  $(X^*, Y^*)$ 의 추정을 위한 단계 크기  $\beta_{X^*}^k$ 와  $\beta_{Y^*}^k$

$$\begin{aligned} \beta_{X^*}^k = & (A_5A_6A_7 + A_1A_3A_8 + A_4A_5A_9 \\ & - A_3A_4A_7 - A_5^2A_8 - A_1A_6A_9) / \\ & P_{X^*}^k (A_1A_2A_3 + 2A_4A_5A_6 - A_1A_6^2 \\ & - A_2A_5^2 - A_3A_4^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{Y^*}^k = & (A_4A_6A_7 + A_4A_5A_8 + A_1A_2A_9 \\ & - A_2A_5A_7 - A_1A_6A_8 - A_4^2A_9) / \\ & P_{Y^*}^k (A_1A_2A_3 + 2A_4A_5A_6 - A_1A_6^2 \\ & - A_2A_5^2 - A_3A_4^2) \end{aligned}$$

- A.2 열원의 미지 위치  $(X^*, Y^*)$ 와 열원의 미지 세기  $G(\tau)$ 의 동시 추정을 위한 표준공역구배법에서의 단계 크기  $\beta_{G^*}^k$

$$\begin{aligned} \beta_{G^*}^k = & (A_2A_3A_7 + A_5A_6A_8 + A_4A_6A_9 \\ & - A_6^2A_7 - A_3A_4A_8 - A_2A_5A_9) / \\ & (A_1A_2A_3 + 2A_4A_5A_6 - A_1A_6^2 \\ & - A_2A_5^2 - A_3A_4^2) \end{aligned}$$

여기서, 하첨자로 표시된  $A$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Delta\Theta_m(\tau)]^2 d\tau \\ A_2 &= \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial X^{*k}} \right]^2 d\tau \\ A_3 &= \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial Y^{*k}} \right]^2 d\tau \end{aligned}$$

$$A_4 = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Delta\Theta_m(\tau) \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial X^{*k}}] d\tau$$

$$A_5 = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Delta\Theta_m(\tau) \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial Y^{*k}}] d\tau$$

$$A_6 = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial X^{*k}} \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial Y^{*k}} \right] d\tau$$

$$A_7 = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [(\Theta_m - Z_m)\Delta\Theta_m(\tau)] d\tau$$

$$A_8 = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [(\Theta_m - Z_m) \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial X^{*k}}] d\tau$$

$$A_9 = \int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [(\Theta_m - Z_m) \frac{\partial\Theta_m(\tau)}{\partial Y^{*k}}] d\tau$$

- A.3 열원의 미지 세기  $G(\tau)$ 만의 추정을 위한 표준공역구배법과 수정공역구배법에서의 단계 크기  $\beta_{G^*}^k$

$$\beta_{G^*}^k = \frac{\int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [(\Theta_m - Z_m)\Delta\Theta_m(P_G^k)] d\tau}{\int_0^{\tau_f} \sum_{m=1}^M [\Delta\Theta_m(P_G^k)]^2 d\tau}$$