

좁은 수평 환형공간에서의 낮은 Prandtl 수 유체의 자연 대류

유 주 식*
(1998년 6월 24일 접수)

Natural Convection of Low-Prandtl-Number Fluids in a Narrow Horizontal Annulus

Joo-Sik Yoo

Key Words: Natural Convection(자연 대류), Hydrodynamic Instability(수력학적 불안정), Multi-cellular Flow(복수 셀 유동), Oscillatory Convection(진동하는 대류), Chaotic Convection(혼돈 대류)

Abstract

Natural convection of low Prandtl number fluids with $Pr \leq 0.2$ in a narrow horizontal annulus is numerically investigated. For $Pr \leq 0.2$, hydrodynamic instability induces oscillatory multicellular flows consisting of multiple like-rotating cells. For a fluid with $Pr \approx 0$, the region in which instability of conduction regime first forms is near the vertical section of annulus, and the multiple cells are distributed uniformly in the lower and upper regions of annulus. As Pr increases, however, the cells are shifted upwards. The like-rotating cells drift downward, as time goes on, and the speed of travel increases with increase of Pr. For a fluid with $Pr=0.1$, a flow with period-4 solution is observed between chaotic states.

기 호 설 명

C	: 유동이 시간적으로 chaotic함을 나타냄	Pn	: 유동이 n/(frequency of the largest peak)의 주기를 갖는 시간주기적인 운동임을 나타냄.
D_i	: 안쪽 실린더의 지름	Pr	: Prandtl 수, ν/χ
\vec{e}_r, \vec{e}_ϕ	: 반경방향과 원주 방향의 단위벡터	p	: 압력
f	: 주파수	R_i, R_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
g	: 중력 가속도	Ra	: Rayleigh 수, $ag(T_i - T_o)L^3/\nu$
Gr	: Grashof 수, $ag(T_i - T_o)L^3/\nu^2$	r	: 반경 방향의 좌표
Gr_c	: 전도영역의 불안정이 시작되는 임계 Grashof 수	r_i, r_o	: 무차원화 된 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
J	: Jacobian	r_c	: 환형의 틈새의 중심의 반경좌표, $(r_i + r_o)/2$
L	: 환형의 폭, $R_o - R_i$	t	: 시간
$N(t)$: $u(r_c, \phi_-, t) > 0$ 이고 $u(r_c, \phi_+, t) < 0$ 인 점 ϕ 의 개수	Δt_s	: 테이타의 sampling time step
$P(f)$: Autospectral density function	T_i, T_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도
		\vec{u}	: 속도 벡터
		u	: 반경 방향의 속도 성분
		$u(t)$: $(r_c, \pi/2)$ 에서의 순간적인 반경 방향

* 회원, 안동대학교 기계공학교육과

의 속도, $u(r_c, \pi/2, t)$
 v : 원주 방향의 속도 성분

그리스문자

- α : 열 팽창 계수
- η : 확장된 반경 방향의 좌표
- θ : 무차원화 된 온도
- x : 열 확산 계수
- ν : 동점성 계수
- ρ_0 : 밀도
- ϕ : 원주 방향의 좌표
- Ψ : 흐름 함수
- ω : 와도

1. 서론

서로 다른 일정한 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 내에서의 자연 대류 현상은, 흥미로운 유동의 형태와 열에너지 저장 시스템, 케이블의 냉각 등의 넓은 응용 분야로 인해 많은 관심은 받아 왔다. 이에 대한 기존의 연구들은 Gebhart 등⁽¹⁾과 최근의 Yoo^(2,3)의 연구에서 포괄적으로 조사되었다. 이 시스템에 있어서의 유동 형태에 대한 일반적인 특성은 Powe 등⁽⁴⁾에 의해 실험적으로 규명되었다. Powe 등⁽⁴⁾은 공기의 유동 형태를 Grashof 수 (혹은 Rayleigh 수)와 두 실린더 사이의 상대적인 간격(D_i/L)을 변수로 하여 4 가지의 기본적인 유동 형태들로 분류하였는데 그 특성들은 다음과 같다. 충분히 작은 Rayleigh 수에서는 D_i/L 에 상관없이 두 개의 초승달 모양의 정상 상태의 2차원 유동을 보인다. 그리고 Rayleigh 수가 증가하여 어떤 임계치(critical value)를 넘어서면 D_i/L 에 따라 다음과 같은 유동의 양상을 보인다 : (1) $D_i/L < 2.8$ 일 때에는 2차원적인 진동하는 대류 (oscillatory convection), (2) $2.8 < D_i/L < 8.5$ 일 때에는 3차원적인 와선 유동 (spiral flow), (3) $D_i/L > 8.5$ 일

때에는 2차원적인 복수 셀의 유동(multicellular flow). Rao 등⁽⁵⁾도 수치적인 방법과 실험을 통하여 유동 형태에 대한 도표를 작성하였는데 전체적인 경향은 Powe 등⁽⁴⁾의 결과와 일치하였다. 그리고 최근 Yoo⁽²⁾는 $Pr=0.7$ 인 공기의 자연대류에서 서로 다른 두 가지 현상의 존재를 수치적으로 규명하였다.

액체 금속과 같은 낮은 Prandtl 수의 유체는 큰 Rayleigh 수에서 조금 더 복잡한 유동의 형태를 보인다.⁽⁶⁻¹⁰⁾ Mack and Bishop⁽⁶⁾과 Custer and Shaughnessy⁽⁷⁾는 $D_i/L=2$ 의 넓은 환형에 대해 $Pr=0.02$ 의 유체의 정상 상태의 자연대류를 조사하였다. 그들은 Ra에 대한 regular perturbation expansion을 사용하여 두 개의 소용돌이(eddy)로 구성되는 정상 상태의 복수 셀 유동(multicellular flow)을 보였다. 반면 Charrier-Mojtabi⁽⁸⁾ 등은 2차원 비정상 상태의 방정식을 고려하여 $D_i/L=2$, $Pr=0.02$ 에서 두 개와 세 개의 소용돌이를 갖는 진동하는 복수 셀 유동을 관찰하였다. 그리고 Fant 등⁽⁹⁾과 Yoo 등⁽¹⁰⁾은 Prandtl 수가 0 혹은 0.02인 경우에 대해 주기적으로 혹은 비주기적으로 진동하는 복수 셀의 유동(oscillatory multicellular flow)을 보였다.

그 외의 여러 가지 형태의 문제들로서, 불균일하게 가열되는 유체층,⁽¹¹⁾ 안쪽 실린더에서의 균일한 열유속,⁽¹²⁾ 차가운 물,⁽¹³⁾ 열전도와 대류의 결합 문제⁽¹⁴⁾ 등에 대한 연구들도 역시 수행되었다.

그런데 지금까지 수행된 수평 환형 내에서의 자연 대류에 관한 연구들은 거의 대부분 넓은 환형에서 일어나는 현상들을 조사하였다. 좁은 환형 내에서의 대류에 관한 연구는 상대적으로 매우 적으며 특히 Prandtl 수의 영향에 대한 체계적인 연구는 아직 수행되지 않았다. 이와는 달리 수직 슬롯⁽¹⁵⁻¹⁸⁾과 아주 긴 수직 환형⁽¹⁹⁻²⁰⁾에서의 자연 대류는 많이 연구되었다. Korpela 등⁽¹⁵⁾과 Korpela⁽¹⁶⁾는 좁은 슬롯에서의 자연 대류의 안정성을 조사하였는데, 전도가 지배적인 흐름(conduction-dominated flow)의 안정성에 있어서는 Prandtl 수가 아주 중요한 역할을 하는 것을 보였다. 기울어진 슬롯에서 $Pr < 0.24$ 에서는 단지

수력학적 불안정(hydrodynamic instability) 만이 일어난다.⁽¹⁶⁾ 그리고 Lee and Korpela⁽¹⁷⁾는 수직 슬롯의 자연 대류를 수치적으로 조사하여 Korpela⁽¹⁵⁾의 결과들을 확인하였다.

Rayleigh-Benard 문제⁽²¹⁾와는 달리 따뜻한 안쪽 실린더를 갖고 있는 수평 환형에서는 유체의 정지 상태가 없다. 낮은 값의 Gr에 대한 전도 영역(conduction regime)에서는 유체가 따뜻한 안쪽 실린더를 따라 올라와서 차가운 바깥쪽 실린더를 타고 흘러내리는 두 개의 초승달 모양의 소용돌이(crescent-shaped eddy)를 구성한다. Walton⁽²²⁾은 WKB 방법을 사용하여 수평 환형에서의 자연대류에서 전도 영역의 안정성을 조사하였다. 그는 $Pr=0.24$ 는 환형에서도 역시 하나의

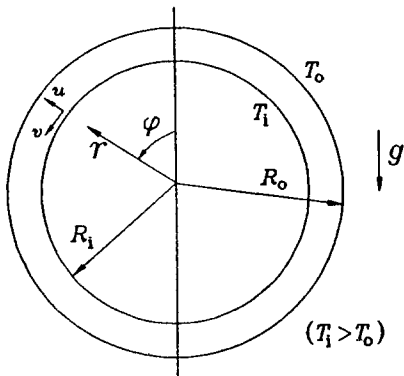


Fig.1 Problem configuration.

임계값임을 보였다. 즉, $Pr > 0.24$ 에서는 불안정성이 환형의 꼭대기(Fig.1; $\phi = 0$)에서 가장 먼저 일어나며, $Pr < 0.24$ 에서는 그 외의 지점에서 불안정성이 시작될 수 있다. 좁은 환형에서의 전도 영역의 불안정성을 특정 지어 주는 데 있어서 Prandtl 수가 아주 중요한 역할을 하는 것이다.

본 연구에서는 좁은 환형($D_i/L = 12$)에서의 낮은 Prandtl 수($Pr \leq 0.2$)의 유체를 고려하여 Prandtl 수와 Grashof 수에 따른 자연대류 유동의 공간적, 시간적 특성을 조사한다. 본 연구에서 관찰한 주요 특성들은 다음과 같다. $Pr \rightarrow 0$ 인 유체에서 전도가 지배적인 흐름의 불안정성

(instability of conduction-dominated flow)은 환형의 수직 부분($\phi = 90^\circ$)에서 가장 먼저 발생한다. 임계 Grashof 수는 Pr 이 감소함에 따라 증가하며 $Pr \rightarrow 0$ 로 감에 따라 어떤 유한한 값으로 접근해 간다. 전도 상태가 깨어진 후에는 같은 방향으로 회전하는 여러 개의 셀을 갖는 진동하는 복수 셀 대류(oscillatory multicellular convection)가 전개된다. $Pr \approx 0$ 인 경우 셀들은 환형의 위와 아래에 고르게 분포한다. 그러나 Pr 이 증가할수록 셀들이 형성되는 영역은 위로 확산된다. 시간이 감에 따라 셀들은 환형의 원주를 따라 아래로 흘러내리며 Pr 이 증가할수록 표류하는 속도가 빨라진다. $Pr=0.1$ 의 유체에서 chaotic convection을 조사하였는데, Gr이 증가함에 따라 진동하는 운동의 복잡성이 점차적으로 계속 증대되지(monotonically increasing) 않고 비주기적인 운동 후에 주기적인 운동이 다시 나타난다는 것을 관찰하였다.

2. 해석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig.1과 같다. 유체는 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i 이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o 이며 $T_i > T_o$ 이다. 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시한다. 그리고 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다(Boussinesq approximation). 에너지 방정식에서 점성소산(viscous dissipation)도 역시 무시한다. 문제를 해석하기 위하여 실린더 좌표계(r, ϕ)를 사용한다. 여기에서 ϕ 는 Fig.1과 같이 실린더의 꼭대기에서 반시계 방향으로 측정되어지는 각도이다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 L , L^2/ν , $V = ag(T_i - T_o)L^2/\nu$, $\rho_0 V^2$, $(T_i - T_o)$ 로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr = \nu/\alpha$, $Gr = ag(T_i - T_o)L^3/\nu^2$ 를 각각 Prandtl 수와 Grashof 수로 정의한다.

무차원화된 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + Gr(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -Gr\nabla p + \nabla^2 \vec{u} + \theta[\cos(\phi)\vec{e}_r - \sin(\phi)\vec{e}_\phi] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr(\vec{u} \cdot \nabla)\theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (3)$$

$$u=v=0, \theta=1 \quad \text{at } r=r_i \quad (4)$$

$$u=v=0, \theta=0 \quad \text{at } r=r_o \quad (5)$$

흐름 함수(streamfunction) Ψ 와 와도(vorticity) ω 를 도입하면 지배 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = GrJ(\Psi, \omega) + \nabla^2 \omega - [\sin(\phi)\frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi)\frac{\partial \theta}{r\partial \phi}] \quad (6)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = GrJ(\Psi, \theta) + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (8)$$

여기에서 와도(ω)와 흐름함수(Ψ) 및 Jacobian $J(f,g)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial}{r\partial r}(rv) - \frac{\partial}{r\partial \phi}(u), \quad u = \frac{\partial \Psi}{r\partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$J(f,g) = \frac{1}{r}(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r}) \quad (9)$$

그리고 두 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 1 \quad \text{at } r=r_i \quad (10)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 0 \quad \text{at } r=r_o \quad (11)$$

각도 방향으로의 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at } \phi=0, \pi \quad (12)$$

식 (6)-(12)의 방정식은 Yoo^(2,3)에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 식(6)과 (8)을 차분화시키는데 있어서는 시간 미분항과 확산(diffusion)항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog방법(Roache⁽²³⁾)을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분(central differencing)을 사용한다. 그리고 유선함수에 대한 Poisson 방정식은 다섯 점 공식을 이용하여 유한한 방정식 계로 바꾼다. 차분화된 방정식에서의 계산 영역은 사각형 모양이 된다. 그리고 이 차분화된 Poisson 방정식은 Buzbee등⁽²⁴⁾의 순환적인 짝홀 제거방법(cyclic even-odd reduction method)을 사용하여 반복 계산(iteration)을 하지 않고 바로 푼다(Direct solver). 이 알고리즘(algorithm)은 매우 빠르고 정확하다. 각도 방향(azimuthal direction)으로는 균일 격자(uniform grid)를 이용하고 반경 방향으로의 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장(coordinate stretching)을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right] \quad \text{with } C=1.5, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (13)$$

본 연구에서 사용한 $(r \times \phi)$ 격자계는 (25×129) 이며 타임 스텝(time step) Δt 는 $10^{-5} \leq \Delta t \leq 10^{-3}$ 의 범위에서 택하였다.

진동하는 대류(oscillatory convection)를 관찰하기 위하여 계산 기간 동안에 다음과 같이 환형의 중심에서의 반경 방향의 속도를 기록한다.

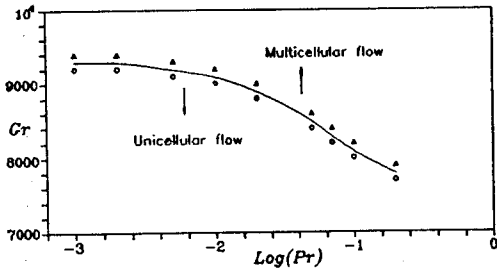


Fig.2 Map of flow regimes on the Pr-Gr plane. '○' and '△' represent unicellular and multicellular flows, respectively.

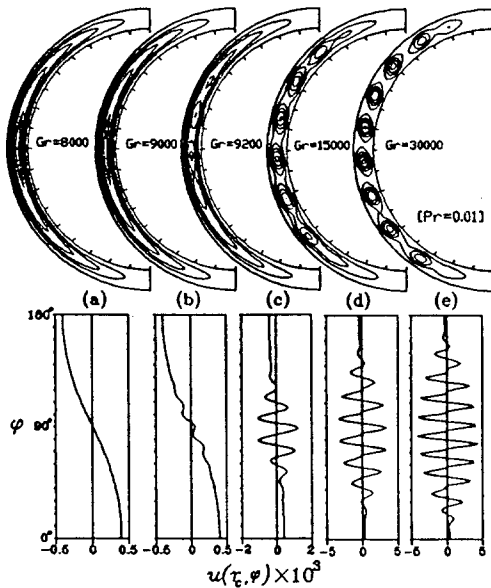


Fig.3 Instantaneous streamlines and distribution of radial velocity at the centerline of annular gap, with $Pr=0.01$: (a) $Gr=8000$; (b) $Gr=9000$; (c) $Gr=9200$; (d) $Gr=1.5 \times 10^4$; (e) $Gr=3 \times 10^4$.

$$u(t) = u(r_c, \pi/2, t) \text{ where } r_c = (r_i + r_o)/2 \quad (14)$$

환형의 수직 부분에서 수력학적 불안정성(hydrodynamic instability)이 일어나기 때문에 점 $(r_c, \pi/2)$ 에서의 속도를 측정하였다. 그리고 낮은 Prandtl 수의 유체에서는 진동하는 복수 셀 유동(oscillatory multicellular flow)이 일어나므로 다음과 같이 정의되는 $N(t)$ 를 기록한다.

$$N(t) = \text{number of points } \phi \text{ at which } u(r_c, \phi_-, t) > 0 \text{ and } u(r_c, \phi_+, t) < 0 \quad (15)$$

$N(t)$ 는 $\phi=0$ 에서 출발하여 환형의 틈(gap)의 중심선 $(r_c, 0 < \phi < \pi)$ 에서의 순간적인 반경방향의 속도가 음(minus)에서 양(plus)으로 변하는 점(ϕ)의 갯수를 나타낸다. Prandtl 수와 Grashof 수가 작을 때의 유동은 매끄러우며(smooth) 이때의 $N(t)$ 는 반시계 방향으로 회전하는 셀의 갯수와 같다.

진동하는 대류에 있어서 속도장의 시간적 거동(temporal behavior)을 보기 위해 $u(t)$ 를 기록하고 유동장의 순간적인 공간적 구조의 복잡성을 측정하기 위해 매 순간마다 $N(t)$ 를 계산하여 기록한다. 그리고 $u(t)$ 의 Power spectrum⁽²⁵⁾을 분석하여 진동하는 대류의 시간적인 거동의 특성을 조사한다. Power spectrum을 구하는데 있어서는 Cooley-Tukey의 FFT algorithm을 이용하며, 데이터의 유한한 시간 간격

$T = (\text{Number of data}) \times \Delta t_s$ 에서 일어나는 side lobe를 제거하기 위해 Hanning window를 씌운다. 이때의 주파수 해상도(frequency resolution)는 $1/T$ 이 되는데 aliasing error를 없애기 위해 FFT를 하기 전에 저주파 대역 필터(low pass filter)를 거침으로써 주파수(frequency)의 범위를 제한한다. anti-aliasing filter cut off frequency는 Nyquist frequency $f_N = 1/2 \Delta t_s$ 의 70%로 택하였다.

3. 결과 및 논의

계산은 $D_i/L=12$ 인 환형에 대해 수행되었으며, $0.001 \leq Pr \leq 0.2$ 의 범위에서 Prandtl 수의 영향을 조사하였다. 수치적인 방법에 대해서는 참고 문헌 Yoo^(2,3)에서 검토되었다.

먼저 단일 셀 유동으로부터 복수 셀 유동으로의 전이가 일어나는 임계 Grashof 수를 Fig.2에 도시하였다. 전도영역의 불안정성이 나타나는 임계 Grashof 수는 Prandtl 수가 감소할수록 증가하며, $Pr \rightarrow 0$ 로 감에 따라 어떤 유한한 한계 값으로 접근해간다. 본 연구에서는 $Pr=0.001$ 일 때 $Gr_c \approx 9300$ 을 얻었는데 이 값은 수직 슬롯(slot)에서 $Pr=0$ 인 경우(15)의 $Gr_c \approx 7932$ 보다 약간 크다. 두 결과의 비교에서 D_i/L 가 커지면 임계 Grashof 수가 감소함을 알 수 있다.

단일 셀 형태의 전도 상태가 불안정하게 되어

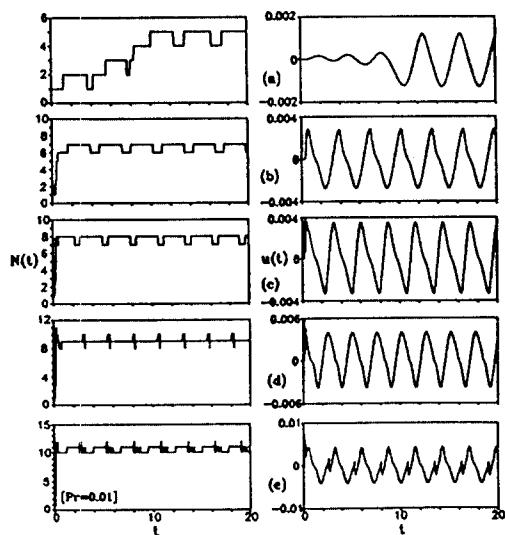


Fig.4 Time evolution of $N(t)$ and $u(t)$ for several Grashof numbers with $Pr=0.01$: (a) $Gr=9200$; (b) $Gr=1.2 \times 10^4$; (c) $Gr=1.5 \times 10^4$; (d) $Gr=2 \times 10^4$; (e) $Gr=3 \times 10^4$. The initial conditions are $\vec{u} = \theta = 0$, and the inner cylinder is suddenly heated to $\theta = 1$.

복수 셀 대류가 일어나는 과정을 보기 위해 Fig.3에 $Pr=0.01$ 에 대해 Gr 의 변화에 따른 유선들과 $r=r_c$ 에서의 속도분포($u(r_c, \phi)$)를 도시하였다. $Gr=8000$ 까지의 작은 Grashof 수에서는 전도 상태가 유지되며 이때의 속도분포는 거의 $u(r_c, \phi) = u(r_c, 0) \cos \phi$ 로 근사화된다. 그러나 Grashof 수가 증가되며 전도 상태가 불안정하게 되어 가장 먼저 $\phi=90^\circ$ 부근의 속도 분포가 꼬여지게(skewed) 된다($Gr=9000$). 이때까지는 아직 단일 셀 유동이 유지되지만 Grashof 수가 더욱 더 증가되면 마침내 진동하는 복수 셀 대류가 일어나게 된다($Gr=9200$, Fig.4). 임계 Grashof 수 부근에서는 환형의 수직부분($\phi=90^\circ$ 부근)에서 전도 상태의 불안정성이 나타나지만 Grashof 수가 증가할수록 이영역은 환형의 전 부분으로 확산된다($Gr=15000, 30000$).

Fig.3의 순간적인 유선들과 속도분포에서 보인 바와 같이 복수 셀 대류가 일어난 후에는 Gr 이 증가함에 따라 유동의 공간적인 구조는 점점 복잡하게 되고 같은 방향으로 회전하는 셀의 갯수도 점차적으로 증가하게 된다.

Fig.4에는 $Pr=0.01$ 인 경우에 $Gr=9200, 12000, 15000, 20000, 30000$ 에서의 $N(t)$ 와 $u(t)$ 의 진동하는 거동을 나타내었다. $Pr=0.01$ 일 때 $Gr=9000$ 까지는 정상 상태의 단일 셀 유동이 유지되지만 $Gr \geq 9200$ 에서 진동하는 복수 셀 대류가 일어난다. Fig.4는 안쪽 실린더를 순간적으로 가열했을 때의 $N(t)$ 와 $u(t)$ 를 나타내고 있다. $Pr=0.01$ 에서 $Gr \leq 15000$ 에서의 유동은 매끄러우며 이 때의 $N(t)$ 는 반시계 방향으로 회전하는 셀의 갯수와 같다. 실린더를 순간적으로 가열했을 때 초기 상태에서, Gr 이 임계 Grashof 수에 가까우면 $N(t)$ 는 1-2-1-2-3-2-3의 진동하는 운동을 겪게 된다(Fig.4(a) $Gr=9200$). 그러나 $Gr \geq 12000$ 에서는 $N(t)$ 는 단계적으로 증가된다(Fig.4(b)-(e)). 그리고 그 후에 주기적으로 4-5, 6-7, 7-8 개의 셀을 갖는 유동이 $Gr=9200, 12000, 15000$ 에 대해 각각 일어난다(Fig.4(a)-(c)). $Gr \geq 20000$ 인 경우 $N(t)$ 는 셀의 갯수와 일치하지는 않는데 순간적인

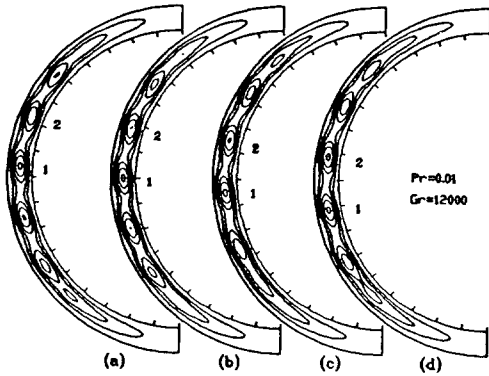


Fig.5 Instantaneous streamlines over one period of oscillation for $Pr=0.01$ and $Gr=1.2 \times 10^4$: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value ; (b) $t=t_1+P/4$; (c) $t=t_1+P/2$; (d) $t=t_1+3P/4$. Two cells are numbered so that their motion can be followed.

유선들을 도시하여 $Gr=20000, 30000$ 에서는 각각 최소한 8개와 10개의 셀들이 존재한다는 것을 보았다. $Gr=9200, 15000, 30000$ 에서의 순간적인 유선들이 Fig.3에 도시되어 있는데 이 유동장들은 외관상 각각 4, 8, 10개의 셀들을 보여주고 있다.

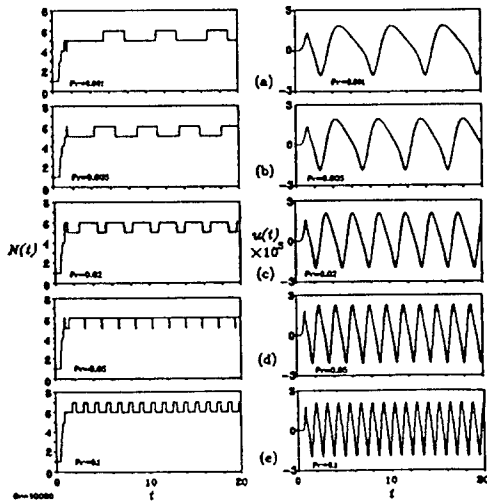


Fig.6 Time evolution of $N(t)$ and $u(t)$ for several Prandtl numbers with $Gr=10^4$: (a) $Pr=0.001$; (b) $Pr=0.005$; (c) $Pr=0.02$; (d) $Pr=0.05$; (e) $Pr=0.1$. The initial conditions are $\vec{u} = \theta = 0$, and the inner cylinder is suddenly heated to $\theta = 1$.

이상의 결과들로부터 $\phi = 90^\circ$ 부근에서 형성된 초기 불안정성은 Gr 이 증가함에 따라 환형의 원주를 따라 전파되며 이에 따라 같은 방향으로 회전하는 셀의 갯수도 점진적으로 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig.4는 시간에 따라 진동하는 대류들을 보여주고 있는데 셀들의 주기적인 운동 양상을 보기 위해 $Pr=0.01, Gr=12000$ 인 경우의 순간적인 유선들을 Fig.5에 도시하였다. 이때의 $N(t)$ 와 $u(t)$ 의 거동은 Fig.4(b)에 도시되어 있다. $Gr=12000$ 에서는 매 순간마다 6-7개의 셀들이 형성된다. 각각의 셀들은 모두 반시계 방향으로 회전하고 있다. 시간이 감에 따라 모든 셀들은 아래로 흘러내리며 하나의 새로운 셀이 셀들의 사슬 꼭대기 부분에서 생성된다. 아래로 흘러내리는 셀이 환형의

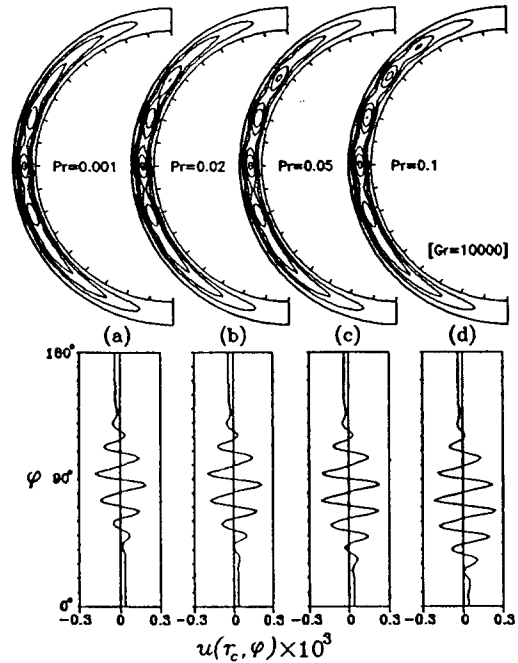


Fig.7 Instantaneous streamlines and distribution of radial velocity at the centerline of annular gap, $u(r_c, \phi)$, with $Gr=10^4$: (a) $Pr=0.001$; (b) $Pr=0.02$; (c) $Pr=0.05$; (d) $Pr=0.1$. The fluctuation of $u(t)$ is shown in Fig.6, and the plotted is the instantaneous streamlines at the time when $du(t)/dt > 0$ and $u(t) = 0$.

수직 부분($\phi = 90^\circ$)으로 접근함에 따라 셀의 힘의 세기(strength)는 점점 강해진다. 그러나 $\phi = 90^\circ$ 부근을 지난 후에는 셀의 힘은 점점 약해지며 환형의 아래 부분에 도착해서는 셀이 없어진다. Fig.5와 같이 셀들이 아래로 흘러내리는 현상은 Yoo등⁽¹⁰⁾의 결과와 일치한다. 그러나 진동하는 운동이 $\phi = 90^\circ$ 부근에서 일어나는 셀의 합체와 분리 현상을 보여주는 Fant등⁽⁹⁾의 결과와는 다르다. 이러한 결과는 Fant등⁽⁹⁾이 지배 방정식에서 원주 방향의 확산 항(azimuthal diffusion term)을 무시하였기 때문인 것으로 생각된다. 셀이 실린더의 원주를 따라 아래로 흘러내리는 현상은 따뜻한 안쪽 실린더를 갖고 있는 수직 환형의 경우와 비교될 수 있다: 수직 환형의 경우에는 셀들은 벽을 따라 위로 올라간다.^(19,20) 그리고 진동 기간 동안에 가장 강한 셀은 환형의 수직 부분($\phi = 90^\circ$)에 있는데 이것은 가장 강한 셀이 슬롯(slot)의 끝 부분에 있는 수직 슬롯의 경우⁽¹⁷⁾와 다른 현상이다.

진동하는 대류에 미치는 Prandtl 수의 영향을 조사하기 위해 $Gr=10000$ 에 대해 Prandtl 수에 따른 $N(t)$ 와 $u(t)$ 의 거동을 Fig.6에 도시하였다.

Fig.6에서 $N(t)$ 는 같은 방향으로 회전하는 셀의 수와 일치한다. 이 경우 모두 시간적으로 주기적인 운동을 보이고 있으며 각각 5-6, 6-7 개의 셀을 갖는 유동이 $Pr \leq 0.05$, $Pr=0.1$ 에서 일어난다. Fig.6에서 진동하는 운동의 주기는 Pr 이 증가할수록 감소한다는 것을 볼 수 있다. 여러 가지 경우의 계산 결과로부터, 진동하는 운동은 일반적으로 Gr 이나 Pr 이 증가할수록 빠르게 일어나며 아울러 유동의 공간적인 구조도 더욱더 복잡해진다는 것을 관찰하였다. Prandtl 수가 유동의 공간적인 구조에 미치는 영향을 Fig.7에 도시하였다. 각각의 경우에 있어서의 $N(t)$ 와 $u(t)$ 의 거동은 Fig.6에 도시되어 있다. Fig.6에서 볼 수 있듯이 $u(t)$ 는 모든 경우에 있어서 단순 주기적인 운동을 보이고 있는데 Fig.7의 유선들은 $du(t)/dt > 0$ 이고 $u(t) = 0$ 인 시간에서의 순간적인 유동장을 도시한 것이다. Prandtl 수가 아주 작을 때 셀들은 환형의 아래($\phi > 90^\circ$)와 윗 부분

($\phi < 90^\circ$)에 균일하게 존재한다. $Pr=0.01$ 인 경우의 Fig.7(a)의 유선과 $u(r_c, \phi)$ 의 분포를 보면 모두 $\phi = 90^\circ$ 선에 대해 거의 대칭임을 알 수 있다. 그러나 Prandtl 수가 증가할수록 불안정성이 나타나는 영역은 윗부분으로 확산된다. $Pr=0.1$ 일 때의 Fig.7(d)의 유선은 $\phi < 90^\circ$ 의 환형의 윗부분에서는 3개의 셀을 분명하게 보여주고 있지만 $\phi > 90^\circ$ 인 환형의 아래 부분에서는 외관상으로도 하나의 셀만을 보여주고 있다. 이와 같은 경향은 Fig.7의 $u(r_c, \phi)$ 의 분포로써 분명하게 알 수 있다. $u(r_c, \phi)$ 를 보면 환형의 아래부분($\phi > 90^\circ$)은 거의 변화가 없지만 Prandtl 수가 증가함에 따라 불안정성이 위로 확산되는 것을 알 수 있다.

Fig.7의 유선과 속도 분포에서, Prandtl 수가 증가하면 불안정성은 위로 확산되며 이에 따라 여러 개의 셀들이 환형의 윗 부분에서 생성된다는 것을 관찰하였다. 따뜻한 실린더를 갖고 있는 환형의 윗 부분은 열적으로 불안정한(thermally unstable) 영역을 구성한다. Prandtl 수가 증가하면 열불안정성(thermal instability)의 영향이 커지게 되며, 큰 Grashof 수에서는 이러한 영향으로 인해 환형의 꼭대기에서는 반대 방향으로 회전하는 하나의 작은 셀이 형성된다(Fig.8). Fig.8은 환형의 꼭대기 부분($\phi = 0$)에 하나의 사각형 모양의 셀을 보여주고 있다. $Pr=0.1$ 일 때 작은 Grashof 수($Gr \leq 15000$)에서는 이 셀이 나타나지 않는다. 그러나 $Gr \geq 20000$ 에서는 이 셀이 나타난다. 초기 단계인 $Gr=20000$ 에서는 주기적으로 이 셀이 나타난다. 즉, 셀이 주기적으로 나타났다가 사라진다. 그러나 큰 Grashof 수($Gr \geq 25000$)에서는 이 셀은 없어지지 않고 진동하는 운동 동안 계속 존재한다.

환형의 꼭대기에서 반대 방향으로 회전하는 셀이 형성되었을 때의 유동의 거동을 보기 위해 $Pr=0.1$, $Gr=30000$ 에서의 순간적인 유선들을 Fig.8에 도시하였다. 이때의 유동의 주요 특성들은 다음과 같다. 같은 방향으로 회전하는 셀들의 사

슬 꼭대기 부분에 있는 셀('셀 1')이 아래로 흘러 내림에 따라(Fig.8(a)) 환형의 꼭대기에 있는 반대 방향으로 회전하는 셀과 '셀 1' 사이의 공간이 넓어지게 되며(Fig.8(b)) 이 공간에 하나의 새로운 셀('셀 2')이 생성된다(Fig.8(c)). 그리고 '셀 1'이 더욱 더 아래로 흘러 내려가면 '셀 1'과 '셀 2' 사이의 점성력(viscous drag)에 의해 반대 방향으로 회전하는 새로운 셀('셀 3')이 두 셀 사이에 생성되어(Fig.8(d)) 자라난다(Fig.8(e)). 그러나 '셀 1'이 더욱 더 아래로 흘러 내려가면 '셀 3'은 약해지고 마침내 없어지게 되며 '셀 2'가 Fig.8(a)의 '셀 1'의 역할을 하게 되고 이렇게 하여 주기적인 운동의 한 사이클이 완료된다. 이와 같은 운동 기간 동안에 환형의 꼭대기에서 반대 방향으로 회전하는 셀은 주기적으로 수축되었다가(Fig.8(c)) 확대된다(Fig.8(a)).

Grashof 수가 커짐에 따라 정상상태의 대류는 불안정해져서 시간에 따라 진동하는 대류가 일어난다. 정상 상태가 깨어지는 초기의 대류는 일반적으로 시간 주기적인 거동을 보이지만 더욱 더 큰 Grashof 수에서는 그 시간 주기적인 운동도 깨어져서 불규칙한 거동을 보이는 비주기적인 운동상태(non-periodic convection, chaotic convection or turbulent convection)에 이르게 된다. 즉 유체의 운동을 일으키는 구동력의 크기가 증대됨에 따라 시간에 대한 유동장의 상태는 일반적으로 다음과 같이 변화한다: steady convection →time-periodic convection →chaotic convection. 비선형 시스템에서 일어나는 이와 같은 비주기적인 운동으로의 천이 현상은 'Forced pendulum', 'Fluids near the onset of turbulence', 'Chemical reactions', 'Population dynamics' 등의 여러 가지 문제에 대해 많이 연구되어 온 흥미있는 과제이다(26). 유체 역학 문제에 있어서는 'Bénard problem' 과 'Taylor problem' 에 대해 이러한 현상을 많이 연구해 왔는데 특히 Yoo and Kim⁽²⁷⁾은 공간적으로 주기적인 온도 분포를 갖는 두 평행 평판 사이의 자연대류에서 카오스로 이르는 여러 가지의 경로(route to chaos)를 보였다. 수평 환형에서의 자연 대류에 대해서는 아직 아무도 이러한 현상을 조사하지 않았다. 여기에서는

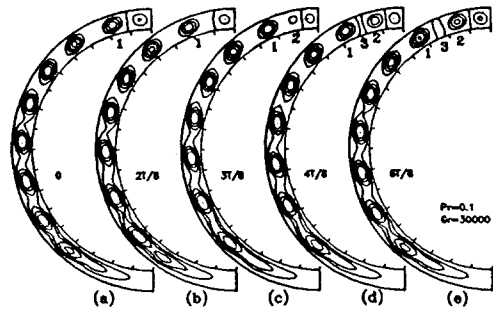


Fig. 8 Time sequence of streamfunction field over one period of oscillation for $Pr=0.1$ and $Gr=3 \times 10^4$: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value ; (b) at $t=t_1+2T/8$; (c) at $t=t_1+3T/8$; (d) at $t=t_1+4T/8$; (e) at $t=t_1+6T/8$.

$Pr=0.1$ 인 경우에 대하여 이러한 특성을 조사한다. 이러한 현상을 조사하기 위해서는 매우 긴 시간 동안 정확한 계산을 하여야 하는데, 본 연구에서는 타임 스텝(time step) $\Delta t = 10^{-4}$ 로 하여 $t=20$ 까지 계산하였다. 데이터의 샘플링 타임 스텝 $\Delta t_s = 2 \times 10^{-3}$ 이며 후반부의 연속된 데이터 2^{12} 개를 사용하여 Power spectrum 을 해석하였다. Fig.9에 몇 가지 경우에 있어서의 $u(t)$ 와 Power spectrum을 도시하였다. 관찰된 결과는 다음과 같다.

- (1) $Gr=65000$ 까지는 단순 주기적인 운동이 유지된다.
- (2) $Gr=75000$: 가장 큰 피크(peak)의 주파수 (frequency)는 $f \approx 3.17$ 이고 모든 피크들은 $f/3$ 와 그의 하모닉(harmonics)으로 구성된다.
- (3) $Gr=85000$: Power spectrum은 broad-band하며 가장 큰 피크의 주파수는 $f \approx 2.56$ 이다. 이때의 운동은 비주기적이다.
- (4) $Gr=90000$: 주기적인 운동이 다시 일어난다. 가장 큰 피크의 주파수는 $f \approx 1.83$ 이고 모든 피크들은 $f/4$ 와 그의 하모닉(harmonics)으로 구성된다
- (5) $Gr=92000$: 비주기적인 운동이 다시 일

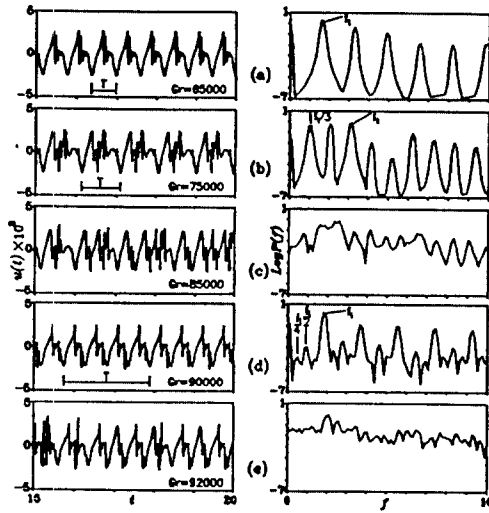


Fig. 9 Time histories and power spectra of radial velocities at the centerline of annular gap, at $Pr=0.1$: (a) $Gr=6.5 \times 10^4$ (P) ; (b) $Gr=7.5 \times 10^4$ (P3) ; (c) $Gr=8.5 \times 10^4$ (C) ; (d) $Gr=9 \times 10^4$ (P4) ; (e) $Gr=9.2 \times 10^4$ (C). In the plot of $u(t)$, 'T' represents the period of oscillation for each value of Gr : (a) $T=1/f_1$; (b) $T=3/f_1$; (d) $T=4/f_1$.

어난다. Power spectrum은 broadband하며 가장 큰 피크의 주파수는 $f \approx 2.08$ 이다.

(6) 더 큰 Grashof 수 $Gr=105$ 에서의 운동도 역시 비주기적이며 Power spectrum은 broadband noise를 보인다.

이상에서 관찰한 분기현상(bifurcation phenomena)을 요약하면 다음과 같다: $P \rightarrow P3 \rightarrow C \rightarrow P4 \rightarrow C$. 여기에서 보이는 하나의 흥미 있는 현상은, Gr 이 증가함에 따라 진동하는 운동의 복잡성이 점차적으로 계속 증대되지 않고 비주기적인 운동 후에 주기적인 운동이 다시 나타난다는 것이다 (Fig.9(d)의 P4-window). 비주기적인 운동으로 도달하는 경로는 명확하지 않지만 아마도 진동하는 운동의 주기가 점점 더 길어짐으로써 인해서 chaotic convection에 도달하는 것으로 생각된다.

4. 결론

서로 다른 일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 사이의 좁은 환형 ($D_i/L=12$)에서 일어나는 낮은 Prandtl 수 ($Pr \leq 0.2$)의 유체의 자연대류 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상(unsteady) stream-function-vorticity 방정식을 풀었다. $Pr \rightarrow 0$ 인 유체($Pr=0.001$)에서 전도 상태의 불안정성은 환형의 수직 부분 ($\phi=90^\circ$)에서 가장 먼저 발생한다. 임계 Grashof 수는 Pr 이 감소함에 따라 증가하며 $Pr \rightarrow 0$ 로 감에 따라 어떤 유한한 값으로 접근해 간다. 불안정성이 나타나는 영역은 Gr 이 증가함에 따라 환형의 원주를 따라 전파된다. 이에 따라 전도 상태가 깨어진 후에는 같은 방향으로 회전하는 여러 개의 셀을 갖는 진동하는 복수 셀 대류(oscillatory multicellular convection)가 전개된다. Grashof 수가 증가함에 따라 셀의 갯수는 점진적으로 증가한다. $Pr \approx 0$ 인 경우 셀들은 환형의 위와 아래에 고르게 분포한다. 그러나 Pr 이 증가할수록 셀들이 형성되는 영역은 위로 확산된다. 시간이 감에 따라 셀들은 환형의 원주를 따라 아래로 흘러내리며 Pr 이 증가할수록 표류하는 속도가 빨라진다. $Pr=0.1$ 일 때 환형의 꼭대기 ($\phi=0$)에 반대 방향으로 회전하는 사각형 모양의 셀이 나타나며 chaotic convection 사이에 P4-window가 존재한다.

참고문헌

- (1) Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L. and Sammakia, B., 1988, "Buoyancy-induced Flows and Transport," Hemisphere Publishing Corporation, pp. 764-771.
- (2) Yoo, J.-S., 1996, "Dual Steady Solutions in Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders," Int. J. of Heat and Fluid flow, Vol.17, pp.587-593
- (3) Yoo, J.-S., 1998, "Mixed Convection of Air

- between Two Horizontal Concentric Cylinders with a Cooled Rotating Outer Cylinder," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp.293-302.
- (4) Powe, R.E., Carley, C.T. and Bishop, E.H., 1969, "Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli," *J. Heat Transfer*, Vol.91, pp.310-314.
- (5) Rao, Y.F., Miki, Y., Fukuda, K., Takata, Y. and Hasegawa, S., 1985, "Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.28, pp.705-714.
- (6) Mack, L.R. and Bishop, E.H., 1968, "Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders for Low Rayleigh Numbers," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.21, pp.223-241.
- (7) Custer, J.R. and Shaughnessy, E.J., 1977, "Thermoconvective Motion of Low Prandtl Number Fluids Within a Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol.99, pp.596-602.
- (8) Charrier-Mojtabi, M.C., Mojtabi, A. and Caltagirone, J.P., 1979, "Numerical Solution of a Flow Due to Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol.101, pp.171-173.
- (9) Fant, D.B., Prusa, J. and Rothmayer, A.P., 1990, "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol.112, pp.379-387.
- (10) Yoo, J.-S., Choi, J.Y. and Kim, M.-U., 1994, "Multicellular Natural Convection of a Low Prandtl Number Fluid Between Horizontal Concentric Cylinders," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol.25, pp.103-115.
- (11) Prud'homme, M., Robillard, L. and Vasseur, P., 1987, "A Study of Laminar Natural Convection in a Nonuniformly Heated Annular Fluid Layer," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.30, pp.1209-1222.
- (12) Kumar, P., 1988, "Study of Natural Convection in Horizontal Annuli," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.31, pp.1137-1148.
- (13) Ho, C.J. and Lin, Y.H., 1988, "Laminar Natural Convection of Cold Water Enclosed in a Horizontal Annulus With Mixed Boundary Conditions," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.31, pp.2113-2121.
- (14) Kolesnikov, P.M. and Bubnovich, V.I., 1988, "Non-Stationary Conjugate Free-Convective Heat Transfer in Horizontal Cylindrical Coaxial Channels," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, pp.1149-1156.
- (15) Korpela, S.A., Gozum, D. and Baxi, C.B., 1973, "On the Stability of the Conduction Regime of Natural Convection in a Vertical Slot," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 16, pp.1683-1690.
- (16) Korpela, S.A., 1974, "A Study on the Effect of Prandtl Number on the Stability of the Conduction Regime of Natural Convection in an Inclined Slot," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol.17, 215-222.
- (17) Lee, Y. and Korpela, S.A., 1983, "Multicellular Natural Convection in a Vertical Slot," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.126, pp.91-121.
- (18) Chait, A. and Korpela, S.A., 1989, "The Secondary Flow and its Stability for Natural Convection in a Tall Vertical Enclosure," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 200, pp.189-216.
- (19) Choi, I.G. and Korpela, S.A., 1980, "Stability of the Conduction Regime of Natural Convection in a Tall Vertical Annulus," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 99, pp.725-738.
- (20) Le Quéré, P. and Pêcheux, J., 1989, "Numerical Simulations of Multiple Flow Transitions in Axisymmetric Annulus Convection," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 206, 517-544.
- (21) Busse, F.H., "Transition to Turbulence in

- Rayleigh- Bénard Convection. In Topics in Applied Physics," Vol. 45, Edited by H.L. Swinney and J.P. Gollub. Springer-Verlag, 1981, pp.97-137.
- (22) Walton, I.C., 1980, "The Stability of Free Convection in a Horizontal Cylindrical Annulus," Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.33, pp.125-139.
- (23) Roache, P.J., 1972, "Computational Fluid Dynamics," Hermosa, pp.53-64.
- (24) Buzbee, B.L., Golub, G.H. and Nielson, C.W., 1970, "On Direct Methods for Solving Poisson,s Equations," SIAM J. Numer. Anal., Vol.7, pp.627-656.
- (25) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., 1986, "Random data : Analysis and Measurement Procedures," John Wiley and Sons, New York, pp.325-424
- (26) Schuster, H.G., 1984, "Deterministic Chaos," Physik-Verlag, pp.1-136.
- (27) Yoo, J.-S. and Kim, M.-U., 1991, "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," Fluid Dynamics Research, Vol.7, pp.181-200.