

효과적인 열응력 해석을 위한 사각형 추가 변형률 요소의 개발

고진환* · 이병채**

(1998년 12월 14일 접수)

Development of a Quadrilateral Enhanced Assumed Strain Element for Efficient and Accurate Thermal Stress Analysis

Jin-Hwan Ko and Byung-Chai Lee

Key Words : Thermal Stress Analysis (열응력 해석), Enhanced Assumed Strain Element (추가 변형률 요소), Displacement Based Element (변위법에 근거한 요소), Functional (범함수)

Abstract

A new quadrilateral plane stress element is developed for efficient and accurate analysis of thermal stress problems. It is convenient to use the same mesh and the same shape functions for thermal analysis and stress analysis. But, because of the inconsistency between deformation related strain field and thermal strain field, oscillatory responses and considerable errors in stresses are resulted in. To avoid undesired oscillations, strain approximation is enhanced by supplementing several assumed strain terms based on the variational principle. Thermal deformation is incorporated into the generalized mixed variational principle for displacement, strain and stress fields, and basic equations for the modified enhanced assumed strain method are derived. For the stress approximation of bilinear elements, the 5 β version of Pian and Sumihara is adopted. The numerical results for several problems show that the present element behaves well and reduces oscillatory responses. It also results in almost the same magnitude of error as compared with the quadratic element.

1. 서론

기계 시스템의 거동을 해석하기 위해서 유한 요소법, 경계 요소법 등 수치적인 방법의 사용이 점점 증가하고 있고 이와 병행하여 새로운 수치적인 방법의 개발이나 기존 방법의 성능개선에도 많은 연구가 진행되고 있다. 열응력 해석은 구조에 온도 분포가 주어졌을 때 온도차에 의한 응력을 구하는 해석이며 대개 수치적인 해석방법을 사용하고 있다. 본 논문은 유한 요소법에 의한 열응력 해석에 사용되는 요소의 성능향상에 관한 내용을 다루었다.

유한 요소법으로 열응력 해석을 할 때 보통 선형 요소 사용을 선호한다. 해의 정확도 면에서 보

면 선형 요소가 2차 요소보다 성능이 떨어지나 계산량을 고려한 경제적인 면에서는 보다 우수하며 같은 자유도에 대해서는 선형 요소가 경계의 형상을 더 잘 모델링 할 수 있고⁽¹⁾ 모델링과 프로그램 구현이 단순하다. 그래서 선형 요소의 여러 가지 장점을 유지하면서 해의 정확도를 향상시키기 위한 노력이 많이 행해지고 있고 이것이 열응력 해석에 좋은 특성을 갖는 선형 요소의 개발이 필요한 일차적인 이유가 된다.

기존의 변위법에 근거한 요소(displacement based element)로 유한 요소 해석을 하게 되면 응력-변형률, 변형률-변위 행렬로부터 바로 계산한 열응력에는 큰 오차를 나타냈고 이런 문제점을 해결하기 위해서는 온도장에 의해 구해진 열변형률의 근사 차수를 전체 변형률의 근사 차수와 일치하게 해야 한다고 알려져 있다.^(2,3) 최근 연구에서 변위법에 근거한 요소를 사용하는 경우 변형률로부터 구한 열응력이 요소내부에서 변동 특성을 보이며⁽⁴⁾ 이

* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

것은 온도에 의해 생긴 열변형률이 전체 변형률과 차수가 일치하지 않기 때문이라고 분석되었다. 본문에서는 기술의 편의상 변위법에 근거한 요소를 변위법 요소로 표기하였다.

본 논문에서는 일치성 문제를 해결하기 위해 요소의 변위 외에 변형률을 독립 변수로 가정하는 추가 변형률법을 도입하여 전체 변형률이 완전한 다항식이 되도록 함으로써 전술한 일치성 문제를 해결하였다. 그리고 범함수와 수식화에는 Yeo⁶⁾가 제안한 응력을 외현적으로 구할 수 있는 수정 추가 변형률법을 사용하였다.

2. 열변형률의 일치성 문제

2.1 변위법 요소의 일치성

열응력 해석을 할 때 가장 많이 사용되는 요소는 열변형률의 적용이 쉬운 변위법 요소이고, 이 변위법 요소로 해석할 때 요소내의 응력 회복에 있어 문제점이 발생한다는 것이 최근 연구에서 지적되었다.⁽¹⁻³⁾

열응력 해석 시의 문제점은 응력 회복과 범함수에 기여하는 열변형률이 다른 점에 기인하며 이 문제점은 열변형률이 전체 변형률에 비해 고차인 다항식으로 근사되기 때문에 발생하는 것으로 알려져 있다. 수식을 통해 일치성 문제가 생기는 원인에 대해 설명하면 다음과 같다.

먼저 변위법 요소의 전체 변형률은 다음 식과 같이 주어진다.

$$\epsilon^u = \nabla^s u \tag{1}$$

여기서 $\nabla^s u$ 는 변위장의 대칭 구배이다. 그리고 직교 이방성 물질의 자유 팽창에 의한 열변형률 ϵ_0 는 다음과 같다.

$$\{\epsilon_0\} = \{\alpha_{Tx} \cdot T, \alpha_{Ty} \cdot T, \alpha_{Tz} \cdot T, 0, 0, 0\}^T \tag{2}$$

여기서 α_T 는 열 팽창 계수이고 T 는 온도 차이다. 열 응력 해석에 변위법 요소를 사용하는 경우 변위와 온도를 같은 보간 함수로 요소 범위에서 보간하고, 전체 변형률은 변위장을 미분하여 구한다. 따라서 변형률은 형상 함수보다 한단계 낮은 차수를 갖게 되고 열변형률은 온도장을 바로 포함하고 있기 때문에 형상 함수의 차수와 같게 보간된다. 이 경우 범함수에는 열변형률이 포함되

어 있는 다음과 같은 적분항이 있게 된다.

$$\int \delta \{\epsilon^u\}^T D \{\epsilon_0\} dV \tag{3}$$

여기서 D 는 물성치 행렬이고 이 때 선형 요소의 경우, 위 식의 열변형률 다항식에서 전체 변형률의 차수와 일치되는 않는 부분이 포함되어 있는 적분의 값은 영이 된다. 그러므로 전체 변형률의 차수에 일치하는 부분만 범함수에 기여를 한다는 것을 알 수 있다. 그리고 2차 요소의 경우 역시 비슷한 결과를 보인다. 이 때 열응력은 범함수에서 구해진 변위와 열변형률에 의해 구해지고 응력 회복식은 다음과 같다.

$$\sigma = D(\epsilon^u - \epsilon_0) \tag{4}$$

위 식을 보게 되면 범함수의 경우와는 다르게 열변형률은 고차의 부분을 포함하여 모든 부분이 응력을 구할 때 기여를 한다. 따라서 열응력을 구할 때의 기여하는 열변형률과 범함수에 실제로 기여하는 열변형률은 다르게 된다. 이런 다항식의 일치성 결여에 의해 열응력의 변동 특성이 생긴다. 실제 예로 4절점 변위법 평면 요소에 대해 설명하면 다음과 같다.

4절점 변위법 평면 요소에서는 변위와 온도장이 쌍 선형(bilinear)인 함수에 의해 보간된다. 그러므로 변위 u 와 온도 T 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \tag{5}$$

$$T = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \tag{6}$$

포아송 비와 y 방향의 열 팽창 계수가 0이라고 가정하면 x 방향의 응력만 생기고 영 계수 E 에 대해 σ_x 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_{Tx} T \right\} \\ &= E \{ (a_1 - \alpha_{Tx} b_0) + (a_3 - \alpha_{Tx} b_2) y - \alpha_{Tx} b_1 x - \alpha_{Tx} b_3 xy \} \end{aligned} \tag{7}$$

위 식을 보면 x 방향으로 선형인 부분과 쌍 선형인 부분이 전체 변형률 $\partial u / \partial x$ 과 일치하지 못함을 알 수 있다. 그래서 온도가 x 방향으로 선형인 문제가 주어지는 경우에는 b_1 부분이 일치성이 없는 이유로 열 응력 해석 결과에 선형 변동 특성이 생기게 된다.

Table 1 Polynomials of compatible displacement in 4-node plane element.

u	1	ξ	η	$\xi\eta$				
v					1	ξ	η	$\xi\eta$
$\frac{\partial u}{\partial \xi}$		1		η				
$\frac{\partial v}{\partial \eta}$							1	ξ
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$			1	ξ		1		η

2.2 기존의 방법들과 추가 변형률법의 도입

열변형률과 전체 변형률과의 일치성 결여에 의한 변동 특성을 지적한 Prathap&Naganarayana⁽⁴⁾는 두 가지 방법을 사용하여 이런 문제점을 해결하려고 하였다.

첫 번째 방법은 열변형률을 일치성을 만족하는 새로운 열변형률로 바꾸어서 열응력을 구할 때 사용하는 것이다. 예를 들어 3절점 보 요소의 경우에 온도와 변위를 2차 라그랑지 보간 함수로 근사하면 전체 변형률과 열변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon = a_0 + a_1\xi \tag{8}$$

$$\epsilon_0 = b_0 + b_1\xi + b_2(1-3\xi^2) \tag{9}$$

이 때 b_2 부분은 전체 변형률과의 일치성이 없다. 그러므로 일치성을 만족하는 새로운 열변형률은 다음과 같이 b_2 를 제외한 다른 부분이 된다.

$$\bar{\epsilon}_0 = b_0 + b_1\xi \tag{10}$$

위 방법은 요소나 문제에 따라 전체 변형률이 다른 경우에는 그때 마다 열변형률을 다르게 변화시켜야 하기 때문에 실제 적용하기에는 어려움이 있다.

제안한 두 번째 방법은 버블 함수(bubble function)를 도입하여 전체 변형률을 변형시키는 것이다. 4절점 평면 요소에서 버블 함수를 변위장 보간 시에만 추가 시키면 이 요소의 비적합 부분에 의해 다음과 같이 된다.

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4(1-y^2) + a_5(1-x^2) \tag{11}$$

이 때 응력은 다음과 같이 된다.

$$\sigma_x = E\{(a_1 - \alpha_{Tx}b_0) + (-2a_5 - \alpha_{Tx}b_1)x + (a_3 - \alpha_{Tx}b_2)y - \alpha_{Tx}b_3xy\} \tag{12}$$

그러나 이 경우에는 전체 변형률에 대하여 쌍 선형인 부분이 일치하지 못한 이유로 온도 분포가 쌍 선형인 문제가 주어진다면 변동 특성이 나타나게 된다.

본 논문에서는 열변형률과의 일치성을 만족시키는 방법으로 변위 외에 변형률을 독립 변수로 추가하여 전체 변형률장을 조절할 수 있는 추가 변형률법을 도입하여 변동 특성을 완화하도록 한다.

Simo&Rifai⁽⁵⁾에 의해 제안된 추가 변형률법은 Hu-Washizu 변분 원리에 근거하고 있으며 변위, 변형률, 응력 등을 근사한다. 이 방법의 근본적인 특징은 전체 변형률의 가정에 있다. 전체 변형률의 형태는 다음과 같다.

$$\epsilon = \epsilon'' + \epsilon^* = \nabla^s u + \epsilon^* \tag{13}$$

여기서 ϵ^* 는 추가된 변위장이고 요소 사이의 연속 조건을 만족하지 않아도 된다. 추가된 변형률 부분은 유한 요소 수식화를 할 때 보통 다음과 같이 가정된다.

$$\epsilon^* = \frac{j_0}{|J|} T_0^{-T} M \alpha_e \equiv M' \alpha_e \tag{14}$$

여기서 M , α_e 는 자연 좌표계 (ξ, η) 에서의 보간 함수와 인수이며, j_0 는 자연 좌표계의 원점에서 구한 자코비안 행렬의 행렬식 값이고, $|J|$ 는 자연 좌표계에서의 행렬식 값이다. T_0^{-T} 는 자연 좌표계에서 정의된 변형률 보간 함수 M 을 전체 좌

표계의 물리적 성분으로 변환하는 행렬이며, T_0 는 자연 좌표계의 원점에서 구한 j_0 의 성분으로 표현된다.

$$T_0 = \begin{bmatrix} j_{110}^2 & j_{210}^2 & 2j_{110}j_{210} \\ j_{120}^2 & j_{220}^2 & 2j_{120}j_{220} \\ j_{110}j_{120} & j_{110}j_{220} & j_{110}j_{220} + j_{120}j_{210} \end{bmatrix} \quad (15)$$

4절점 평면 요소에 대해 M 의 최적 보간항들을 찾기 위해서 Table 1의 적합 변위의 다항식을 검토한다. 전체 변형률을 완전한 선형 다항식으로 만들기 위해 적합 변형률에 추가되는 최적 보간식을 찾으면 다음과 같다고 알려져 있다.⁽⁷⁾

$$M = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (16)$$

추가된 다항식에 의해 전체 변형률이 모두 완전한 선형 다항식을 갖게 된다. 이로 인해 전체 변형률과 열변형률의 다항식이 같아지게 되므로 변동 특성의 원인이 되는 일치성 문제를 해결할 수 있게 된다.

3. 추가 변형률 요소의 범함수와 수식화

3.1 범함수 도입

추가 변형률 요소는 공학적인 통찰을 통해 만들어진 요소이지만 최근 Hu-Washizu 혼합 변분 원리로부터 이 요소를 유도함으로써 수학적 근거를 확실히 하였다.⁽⁵⁾ 선형 탄성 문제의 범함수는 다음과 같다.

$$\Pi^e_{HW} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T D \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon^u d\Omega - W^e(u) \quad (17)$$

만약 변위 u 가 요소 사이에서의 적합 조건을 만족하고 변위 경계 조건을 만족한다면 외력에 의한 일 $W^e(u)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$W^e(u) = \int_{\Omega} b^T u d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{f}^T u d\Gamma \quad (18)$$

여기서 b 는 체적력이고 Γ_f 는 외력 \bar{f} 가 작용되고 있는 경계의 일부이다.

그러나 위의 범함수로부터 유도되는 변분식은 응력을 외현적으로 구할 수 없다. 이런 이유로 추가 변형률과 응력간의 다음과 같은 직교 조건을 부과하여 응력을 초기 단계에서 소거시킨다.

$$\int_{\Omega} \sigma^T \epsilon^* d\Omega = 0 \quad (19)$$

그리고 탄성 변형률을 범함수에 대입하고 직교 조건을 부여하면 독립항으로 도입된 응력이 소거된 기존의 추가 변형률범함수로서 열응력 해석을 위한 범함수가 유도된다

$$\begin{aligned} \Pi^e_{EAS} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^{*T} D \epsilon^* d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon^{*T} D \epsilon^u d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \epsilon_0^T D \epsilon^* d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^{*T} D \epsilon^u d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \epsilon^{*T} D \epsilon_0^T d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0^T D \epsilon_0 d\Omega - W^e(u) \end{aligned} \quad (20)$$

위 식에서 보듯이 응력이 직교 조건을 통해 소거되었기 때문에 변위와 변형률처럼 직접적으로 산출할 방법이 없다. 그런 이유로 구성 방정식을 이용하여 열응력을 회복한다. 그러나 이렇게 회복된 응력은 직교 조건식 (19)를 만족하지 못하게 되어 변분적인 일관성을 잃어버리게 된다. 이런 일관성의 결여 때문에 유한요소 해석 시 성능의 저하가 생긴다고 알려져 있다.⁽⁶⁾

그런 이유로 본 논문에서는 일관성 문제를 해결하여 해의 성능을 향상시킨 수정 추가 변형률 요소를 사용하기로 한다. Yeo⁽⁶⁾에 의해 개발된 수정 추가 변형률 요소의 범함수는 응력을 외현적으로 구함으로써 위의 변분적인 일관성 문제를 해결하였다고 한다.

$$\begin{aligned} \Pi^e_{MEAS} &= -\frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega + (1 + \mu) \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon^u d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T D \epsilon d\Omega - \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \epsilon^{*T} D \epsilon^* d\Omega - W^e(u) \end{aligned} \quad (21)$$

그리고 추가 변형률 요소를 이용한 열응력 해석을 위해서는 온도 조건에 의한 열변형률에 대한 고려가 있어야 하므로 열응력 해석할 때 탄성 변형률은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}^u + \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (22)$$

식 (21)에 열변형률이 포함된 탄성 변형률을 나타내는 식 (22)를 대입하면 응력을 외현적으로 구할 수 있는 응력 산출식이 나오며, 열응력 해석을 할 수 있는 범함수가 만들어진다.

$$\begin{aligned} \Pi^e_{TEAS} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} D \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{uT} D \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T D \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{uT} D \boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{uT} D \boldsymbol{\varepsilon}_0^T d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T D \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega - \mu \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T D^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega \right. \\ & + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \left. \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{uT} D \boldsymbol{\varepsilon}^u d\Omega \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{uT} D \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T D \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \right] - W^e(u) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 인수 μ 는 임의의 값을 가질 수 있는 인수이다. 위 식을 유한 요소 수식화에 의해 요소 단위의 식으로 만들고, 변위, 응력, 변형률에 의해 변분을 취하게 되면 식이 여러 개가 나오며, 이 중에서 중복된 식을 제외한 독립적인 식을 뽑아낼 수 있다.

3.2 유한 요소의 수식화

본 절에서는 추가 변형률법의 유한 요소 수식화를 유도한다. 응력, 변형률, 온도 및 변위는 다음과 같이 근사하고 추가 변형률에 대한 근사식 (14)를 이용한다.

$$\boldsymbol{u}_e = N \boldsymbol{d}_e \quad (24)$$

$$\boldsymbol{T} = N \boldsymbol{T}_e \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}_0 P \boldsymbol{\beta}_e \equiv \boldsymbol{P}' \boldsymbol{\beta}_e \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^u = \nabla_s N \boldsymbol{d}_e \equiv \boldsymbol{B} \boldsymbol{d}_e \quad (27)$$

여기서 N 은 자연 좌표계에서 정의된 변위 근사 함수 행렬이고 $\boldsymbol{d}_e, \boldsymbol{T}_e$ 와 $\boldsymbol{\beta}_e$ 는 절점 변위, 절점 온도 및 응력 근사 인자이다. 특히 $\boldsymbol{\alpha}_e$ 와 $\boldsymbol{\beta}_e$ 는 한 요소 내에서 독립적으로 정의되기 때문에 요소 단위에서 소거 될 수 있는 인자들이다. 그리고 식 (26)의 응력 근사 함수 \boldsymbol{P} 는 식 (16)의 최적 추가 변형률과 등가 관계가 있는 Pian&Sumihara의 5 β (PS5 β)를 사용한다.⁽⁶⁾

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

식 (14)와 식 (24)에서 (27)까지를 식 (23)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi^e_{TEAS} = & \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_e^T \bar{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\alpha}_e + \boldsymbol{\alpha}_e^T \bar{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\alpha}_e + \frac{1}{2} \boldsymbol{d}_e^T \bar{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{d}_e \\ & - \boldsymbol{d}_e^T \bar{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{\alpha}_e^T \bar{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{\beta}_e - \boldsymbol{d}_e^T \boldsymbol{f}_e - \mu \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_e^T \bar{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{\beta}_e \right. \\ & \left. - \boldsymbol{\beta}_e^T \bar{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d}_e + \boldsymbol{\beta}_e^T \bar{\boldsymbol{X}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{d}_e^T \bar{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{d}_e - \boldsymbol{d}_e^T \bar{\boldsymbol{S}} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{M}^T D \boldsymbol{M} d\Omega, \quad \bar{\boldsymbol{W}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{M}^T D \boldsymbol{B} d\Omega,$$

$$\bar{\boldsymbol{K}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T D \boldsymbol{B} d\Omega, \quad \bar{\boldsymbol{P}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{P}^T D^{-1} \boldsymbol{P} d\Omega,$$

$$\bar{\boldsymbol{Q}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{B} d\Omega, \quad \bar{\boldsymbol{V}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{M}^T \boldsymbol{P} d\Omega,$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma, \quad \bar{\boldsymbol{S}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T D \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega,$$

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{M}^T D \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega, \quad \bar{\boldsymbol{X}} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega \quad (30)$$

이고 행렬 $\bar{\boldsymbol{S}}, \bar{\boldsymbol{T}}, \bar{\boldsymbol{X}}$ 는 열변형률과 관련된 등가량들이다. 이 때 식 (29)를 절점 변위, 응력 및 변형률 인자에 대하여 변분을 취하면 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$\bar{\boldsymbol{W}}^T \boldsymbol{\alpha}_e + \bar{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{S}} - \mu \{ \bar{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{Q}}^T \boldsymbol{\beta}_e - \bar{\boldsymbol{S}} \} - \boldsymbol{f}_e = 0 \quad (31)$$

$$\bar{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{\alpha}_e + \bar{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{T}} - \bar{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{\beta}_e = 0 \quad (32)$$

$$\mu \{ \bar{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{\beta}_e - \bar{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{X}} \} + \bar{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{\alpha}_e = 0 \quad (33)$$

인수 μ 는 임의의 값을 가질 수 있으므로 식 (31)은 다음과 같이 두 식으로 나타내어질 수 있다.

$$\bar{\boldsymbol{W}}^T \boldsymbol{\alpha}_e + \bar{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{f}_e = 0 \quad (34)$$

$$\bar{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{d}_e - \bar{\boldsymbol{Q}}^T \boldsymbol{\beta}_e - \bar{\boldsymbol{S}} = 0 \quad (35)$$

같은 이유로 식 (33)도 다음의 두 식으로 나타내어질 수 있다.

$$\bar{P}\beta_e - \bar{Q}d_e + \bar{X} = 0 \quad (36)$$

$$\bar{V}^T \alpha_e = 0 \quad (37)$$

위와 같이 변분에 의해 생성된 5개의 식 중에서 독립적인 식으로 (32), (34), (36) 세 식을 뽑을 수 있다.⁽⁶⁾ 그리고 식 (32)와 식 (36)을 이용하여 α_e, β_e 를 요소 단위에서 다음 식으로부터 소거한다.

$$\alpha_e = \bar{R}^{-1} \{ \bar{V}\beta_e + \bar{T} - \bar{W}d_e \} \quad (38)$$

$$\beta_e = \bar{P}^{-1} (\bar{Q}d_e - \bar{X}) \quad (39)$$

이 때 최적 추가 변형률과 앞에서 제시한 응력 항을 대입하면 식 (30)의 행렬 \bar{V} 는 소거된다. 따라서 식 (38)을 식 (34)에 대입하면 다음과 같은 절점 변위에 대한 유한요소 방정식이 유도된다.

$$\{ \bar{K} - \bar{W}^T \bar{R}^{-1} \bar{W} \} d_e = \bar{S} + f_e - \bar{W}R^{-1}T \quad (40)$$

식 (40)은 추가 변형률 요소를 사용하여 열응력 해석을 할 수 있는 유한 요소식이 되고, 식 (39)를 식 (26)에 넣으면 다음과 같은 응력 산출식을 얻을 수 있다.

$$\sigma = P\beta_e = P\{ \bar{P}^{-1} (\bar{Q}d_e - \bar{X}) \} \quad (41)$$

따라서 기존의 선형 요소가 가지고 있는 변동 특성을 완화하고, 변분적인 일관성이 있으며, 열응력 해석이 가능한 추가 변형률 요소의 수식화가 정립되었다. 이 수식화는 변위와 응력을 요소 단위로 구할 수 있으므로 프로그램 적용에 용이한 장점도 가지고 있다.

4. 수치 예제 및 고찰

요소 내부 응력과 절점 응력을 통해 유한 요소의 성능을 비교한다. 요소 내부 응력은 변위법 요소인 경우 구성 방정식을 통해, 추가 변형률 요소는 응력 식 (41)을 통해 구하며 절점 응력은 완전 적분의 적분점과 감차 적분의 적분점에서의 응력을 후처리하여 구한다.

절점 응력을 구하는 방법은 다양하지만 간단한 방법을 사용하여 요소 간의 성능을 비교해 본다. 가장 보편적인 방법은 요소의 절점에서 응력을 계산하여 절점에서 평균을 하는 것이지만 절점에서 응력은 적분점의 값보다는 정확하지 못하다

고 알려져 있다. 그런 이유로 절점의 응력을 직접 구하는 방법보다 정확한 응력값을 갖는 적분점의 응력을 사용하는 방법을 사용하기로 한다. 본 논문에서는 적분점의 응력을 사용하는 방법 중에 Zienkiewicz&Zhu⁽⁸⁾가 제안한 방법을 쓰기로 한다. 절점 응력 회복의 여러 가지 방법 중에서 위 방법을 선택한 것은 계산량과 프로그램 구현이 간단하기 때문이다. 본 논문에서 사용되는 요소와 방법들은 다음과 같다

Q4 (FI, RI) - 4절점 변위법 평면 요소

Q8 - 8절점 변위법 평면 요소

TEAS - 추가 변형률 평면 요소로서 응력 산출식 (41)에 의해 응력을 구하며 본 논문에서 제안한 방법이다.

Q8 (1/4) - 요소 개수가 선형 요소의 1/4인 경우

여기서 FI(Full integration)는 완전적분점을 이용한 적분을 나타내며, RI(Reduced integration)는 감차 적분점을 이용한 경우를 나타낸다.

4.1 수치 예제

4.1.1 양단 고정 보

(1) 축 방향 선형 온도 분포

첫 번째 예제는 축 방향 선형 온도 분포가 있는 양단 고정 보 예제로 열응력이 상수가 되고 열변형은 선형이 된다. 예제의 형상을 Fig. 1에 나타냈으며 치수, 재료 상수, 온도는 다음과 같다.

영 계수 : $E = 1000$

열 팽창 계수 $\alpha_T = 0.001$

치수 : $a = 4, b = 2$

온도 : $T(x) = 50 * x$

이 때 엄밀해는 다음과 같다.⁽⁹⁾

$$\sigma_x = -E\alpha_T \bar{T} = 100$$

$$\epsilon_x = -\alpha_T * (\bar{T} - T) = -0.001 * (100 - T(x))$$

여기서 \bar{T} 는 평균 온도이다. 예제 1에 대한 유한요소 해석 결과를 Fig. 2에 나타내었다. 그림에서 요소 내부 응력을 보면 Q4가 선형 변동 특성을 가지고 있음을 볼 수 있다. 그러나 제안된 요소를 포함한 나머지 요소들은 이런 변동 특성이 없으며 요소 내부 응력이 모두 엄밀해에 근접함을 볼 수 있다.

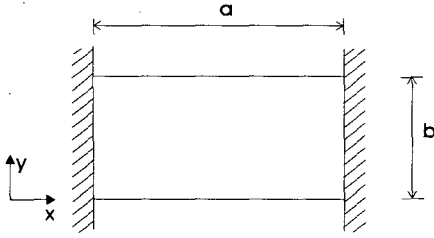


Fig. 1 Fixed end beam.

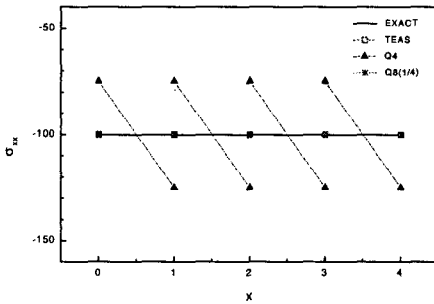


Fig. 2 Stress result in element of example 1.

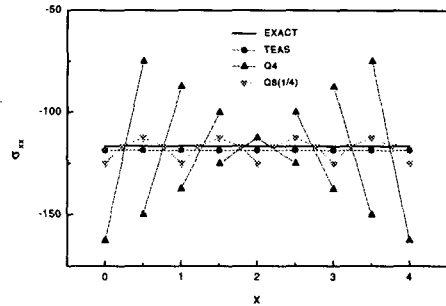


Fig. 3 Stress result in element of example 2.

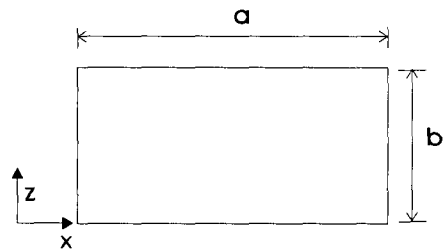


Fig. 4 Free end beam.

(2) 축 방향 2차 온도 분포

두 번째 예제는 2차 온도 분포가 있는 예제로서 역시 열응력이 상수가 되나 열변형은 2차이다. 형상은 Fig. 1에 있고 치수, 재료 상수, 온도는 다음과 같다.

$$E = 1000 ; \alpha_T = 0.001$$

$$a = 4, \quad b = 2$$

$$T(x) = 50(x-2)^2 + 50$$

이 때 엄밀해는 다음과 같다.⁽⁹⁾

$$\sigma_x = -E\alpha_T \bar{T} = 116.6667$$

$$\epsilon_x = -\alpha_T (\bar{T} - T) = -0.001(116.6667 - T(x))$$

예제 2에 대한 해석 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 그림을 보면 Q4인 경우는 요소 내부 응력이 선형 변동을 하고 있고, Q8인 경우는 2차 변동을 하게 되는데 이것은 일치성을 만족하지 않는 열변형률 때문이라고 할 수 있다. 그러나 TEAS는 이런 변동 특성이 없고 엄밀해에 매우 가까운 결과를 보였다.

4.1.2 두께 방향 온도 분포를 가지는 보

이 예제는 두께 방향의 온도 변화에 의해 굽힘 변형이 생기게 되는 예제로서 굽힘 변형에 대한 요소의 특성을 알 수 있는 예제이다. 예제 그림은 Fig. 4에 있고 치수, 재료 상수, 온도는 다음과 같다.

$$E = 1000 ; \alpha_T = 0.001$$

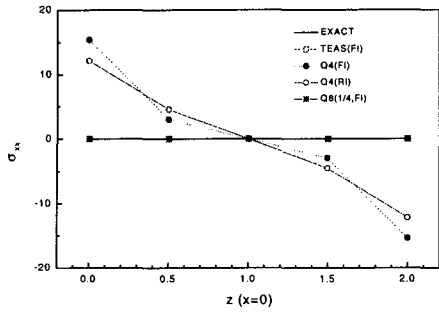
$$a = 4, \quad b = 2$$

$$T(z) = 100 \times z$$

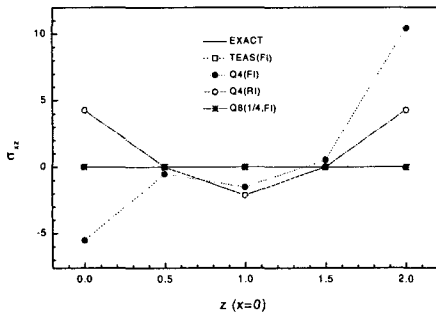
이 때 엄밀해는 다음과 같다.⁽⁹⁾

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$$

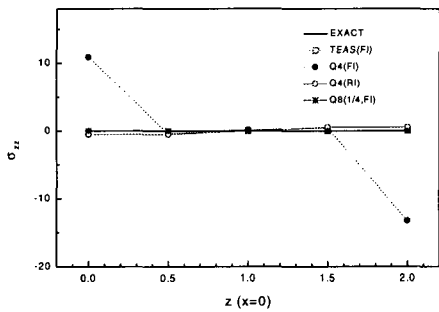
Fig. 5에 예제 3에 대한 수치 결과를 나타내었다. 그림에서 Q4는 완전 적분점을 사용하여 절점 응력을 구하는 경우나 감차 적분점을 이용하는 경우 모두 결과가 좋지 않다는 것을 알 수 있다. 그래서 굽힘 변형 특성이 강한 예제의 해석에 4절점 요소를 사용하는 것이 해의 신뢰성을 상당히 저해한다고 할 수 있다. 반면에 Q8과 TEAS 요소는 엄밀해와 거의 같음을 볼 수 있다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5 Stress result values of example 3.

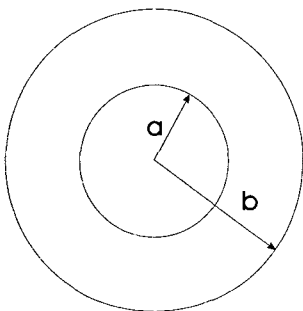


Fig.6 Hollow cylinder.

4.1.3 평면상의 조화 온도 분포가 있는 원판

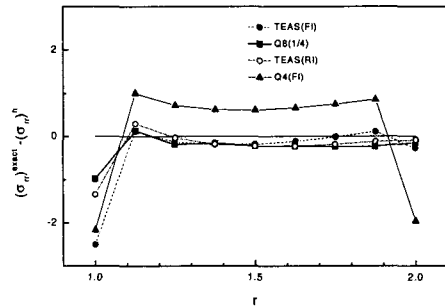
및 실린더

온도가 반경과 각도 방향으로 모두 변화하며 응력 역시 반경과 각도 방향으로 변화한다. σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ 과 $\sigma_{r\theta}$ 모두 영이 아닌 값을 가지며 형상은 Fig. 6에 나타내었다. 치수, 재료 상수, 온도는 다음과 같다.

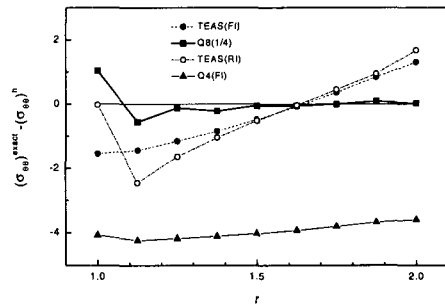
$$E=1000 ; \alpha_r = 0.001 ; \nu = 0.3$$

$$a=1, b=2$$

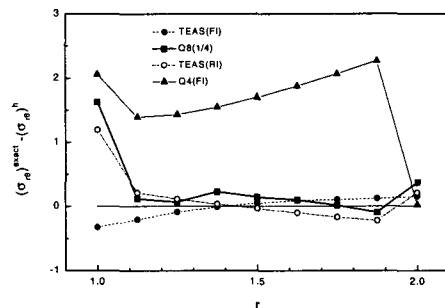
$$T(r,\theta) = \left(\frac{100}{r} + 100r\right) \times (\cos\theta + \sin\theta)$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 7 Stress result values of example 4.

이 때 엄밀해는 다음과 같다.⁽⁹⁾

$$\sigma_{rr} = \frac{r}{10} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \left(1 - \frac{4}{r^2}\right) (100(\cos\theta + \sin\theta))$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{r}{10} \left(3 - \frac{5}{r^2} - \frac{4}{r^4}\right) (100(\cos\theta + \sin\theta))$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{r}{10} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \left(1 - \frac{4}{r^2}\right) (100(\sin\theta - \cos\theta))$$

Fig. 7 과 Table 2 을 보면 TEAS 가 복잡한 온도 조건을 갖는 예제에 대해서도 Q8(1/4)과 근접한 결과를 보여 주며, Q4 에 비해서는 정확성이 많이 향상된 것을 알 수 있다.

4.2 계산량 및 계산 시간에 대한 고찰

계산량에 가장 영향을 미치는 부분이 강성 행렬 만드는 부분과 해를 구하기 위해 행렬을 분해 (decomposition) 하는 부분이다. 먼저 강성 행렬을 만드는데 걸리는 시간은 다음과 같다.⁽¹¹⁾

$$T_s = \bar{T}_0 N_e N_v^2 N_e$$

여기서 N_e 는 적분점의 개수, N_v 는 하나의 요소에 할당된 변위 변수의 개수이고, N_e 는 요소의 개수에 요소의 차수를 나눈 값이다.

이 때 행렬을 분해 하는 시간은 다음과 같다.

$$T_d = \frac{1}{2} \bar{T}_0 N_n \bar{B}^2$$

Table 2 Maximum error [(exact sol.)-(analysis sol.)]

	Gauss pt.	σ_{rr}	$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{r\theta}$
TEAS	1x1	1.34	2.45	1.31
	2x2	3.51	2.13	3.98
Q8	2x2	1.35	1.42	1.20

여기서 N_n 는 등가 절점 즉 변위 변수의 총 개수이고 \bar{B} 는 밴드 폭의 반이다.

위의 공식을 이용하여 Q4 와 Q8 의 시간 비교를 하면 다음과 같다. 요소 개수와 적분점의 개수가 같은 Q8 인 경우, T_s 는 Q4 요소의 4 배 정도가 소요되며 T_d 는 6.7 배 정도가 소요된다. 그리고 요소 개수가 1/4 배이고 감차 적분(2x2)을 하는 Q8 인 경우, T_s 는 Q4 요소의 1 배 정도로 비슷하고 완전 적분인 경우는 2 배 이상 소요된다. 그리고 직사각형 모양으로 요소 분할을 하는 경우 T_d 는 1.69 배 정도 소요된다고 한다.⁽¹¹⁾ 따라서 요소 개수가 4 배가 되어도 Q4 가 시간이 덜 걸린다는 것을 알 수 있다.

다음은 Q4 와 TEAS 의 계산시간을 요소 분할을 늘려가면서 수치 실험하여 비교하였다. 실제로 TEAS 에서 계산이 추가되는 부분은 강성 행렬을 만드는 부분과 구해진 변위로부터 응력을 구하는 부분이다. 그래서 요소 개수가 같은 경우 연립 방정식을 풀어 해를 구하는 부분의 시간은 동일하다. 예제 4 에 대한 수치 실험 결과를 Table 3 에 나타내었다. Table 3 에서 보면 TEAS 가 Q4 보다 약 1.8 배 정도 시간이 소요됨을 알 수 있다. 해석기의 종류, 적분점의 개수, 전 처리기의 선택에 따라 계산량이 달라질 수 있는 까닭에 정확하게 계산량을 비교하는 데는 어려움이 있으나 이 결과로부터 대체적인 경향을 파악할 수 있다.

따라서 본 논문에서 비교하고자 하는 TEAS 의 계산량은 전 처리기, 해석기의 종류와 적분점의 개수가 같고 균등한(regular) 요소 분할의 경우 1/4 요소 개수를 갖는 Q8 과 거의 비슷함을 알 수 있다. 그러므로 본 논문에서 제안한 추가 변형률 요소는 정확성의 향상과 더불어 계산량 면에서도 효율적인 요소임을 알 수 있다.

Table 3 Computing time (sec.)

No. of Element	Making stiffness matrix		Recovering stress	
	TEAS	Q4	TEAS	Q4
1600	22.91	14.33	5.38	0.99
8000	114.68	71.62	27.36	5.16
16000	231.41	143.00	54.00	10.38

5. 결론

열응력 해석 문제의 경우 변위법 요소를 사용하면 요소 내부 열응력값이 변동하는 특성을 갖게 되는데 이것은 전체 변형률과 열변형률과의 일치성 결여 때문으로 알려져 있다. 본 논문에서는 추가 변형률 요소를 도입하여 전체 변형률이 완전한 선형 다항식을 갖도록 함으로써 일치성 결여 문제를 해결하였고, 응력을 외현적으로 구할 수 있는 수식화를 정립하였다. 여러 가지 수치 예제 결과에서 새로 개발된 요소는 변동 특성을 완화함으로써 해의 정확성의 향상시켰으며 계산량 면에서도 효율적임을 알 수 있었다. 특히 굽힘 변형이 있는 예제에서는 기존의 선형 요소에 비해 크게 정확성을 향상시켰음을 알 수 있었다.

본 연구에서는 추가 변형률법을 4절점 평면 요소에만 적용을 하였지만 3차원 요소와 쉘 요소로의 확장도 가능하며, 연구 개발 중에 있다.

참고문헌

- (1) Macneal, R. H., 1994, *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcel Dekker, Inc.
- (2) Ojalvo, I. V., 1974, "Improved Thermal Stress Determination by Finite Element Methods," *AIAA Jnl.*, 12, pp.1131~1132.
- (3) Pitt, J. and Hartl, H., 1980, "Improved Stress Evaluation Under Thermal Load for Simple Finite Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 15, pp.1507~1515.
- (4) Prathap, G. and Naganarayana, B. P., 1995, "Consistent Thermal Stress Evaluation in Finite Elements," *Computer & Structures*, 54, pp.415~426.
- (5) Simo, J. C. and Rifai, M. S., 1990, "A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Models," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 29, pp.1595~1638.
- (6) Yeo, S. T., 1996, "A Study on Improving the Performance of Enhanced Assumed Strain Elements," Ph. D. Thesis, KAIST.
- (7) Andelfinger, U. and Ramm, E., 1993, "EAS-Elements for Two-Dimensional Three-Dimensional, Plate and Shell Structure and Their Equivalence to HR-Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36, pp.1311~1337.
- (8) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 33, pp.1331~1364.
- (9) Boley, B. A. and Weiner, J. H., 1960, *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons Inc.