

## 공력설계를 위한 수치최적설계기법의 연구

김설송\* · 최재호\* · 김광용\*\*

### A Study on Numerical Optimization Method for Aerodynamic Design

Xue-Song Jin\*, Jae-Ho Choi\*, Kwang-Yong Kim\*\*

*Key Words: Numerical Optimization Method(수치최적설계기법), Simplex Method(심플렉스 방법), Hook-Jeeves Method(후크-지브스 방법), Steepest Descent Method(최급강하법), Conjugate Gradient Method(복합구배법), DFP method(DFP 방법), Golden Section Method(황금분할법), Cubic Interpolation Method(3차 다항식보간법)*

#### ABSTRACT

To develop the efficient numerical optimization method for the design of an airfoil, an evaluation of various methods coupled with two-dimensional Navier-Stokes analysis is presented. Simplex method and Hook-Jeeves method are used as direct search methods, and steepest descent method, conjugate gradient method and DFP method are used as indirect search methods and are tested to determine the search direction. To determine the moving distance, the golden section method and cubic interpolation method are tested. The finite volume method is used to discretize two-dimensional Navier-Stokes equations, and SIMPLEC algorithm is used for a velocity-pressure correction method. For the optimal design of two-dimensional airfoil, maximum thickness, maximum ordinate of camber line and chordwise position of maximum ordinate are chosen as design variables, and the ratio of drag coefficient to lift coefficient is selected as an objective function. From the results, it is found that conjugate gradient method and cubic interpolation method are the most efficient for the determination of search direction and the moving distance, respectively.

#### 1. 서론

전산유체역학은 단순히 설계자에게 유동해석 정보만을 제공하는데 그치지 않고 최적설계기법과 결합한 자동설계기법에 해석수단을 제공하는 방향으로 연구되고 있다. 이러한 최근의 연구경향에 따라 본 연구는 전산유체역학과 결합한 수치최적설계기법을 익형설계에 적용하여 여러 가지 수치최적설계기법의 효율성과

정확성을 비교·검토하여 효과적인 최적설계방법을 결정하는 데 그 목적을 두었다.

최적설계기법은 크게 역설계기법(inverse design method)<sup>(1)</sup>과 수치최적설계기법(numerical optimization method)<sup>(2)</sup>으로 나뉠 수 있다. 역설계기법은 설계자가 설정한 유동특성을 만족하도록 형상을 설계하는 방법이고, 수치최적설계기법은 유동해석과 최적화알고리즘을 결합한 방법이다.

본 연구에서는 2차원 Navier-Stokes 방정식을 사용한 유동해석코드를 해석수단으로 하여 여러 최적설계기법들의 특성과 장·단점을 비교·검토하였다. 2차원

\* 인하대학교 대학원 기계공학과

\*\* 인하대학교 기계공학과

익형의 최적설계를 위해 최대 캠버와 최대 캠버를 갖는 코드방향 길이 및 두께를 설계변수로 선택하였고, 익형의 항력계수와 양력계수의 비를 목적함수로 정의하여 이를 최소화하였다.

## 2. 최적설계기법

설계변수  $X_i(i=1,2,\dots,M)$ 에 대한 비선형, 제한 최적화 문제를 수식적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{목적함수} : & F(\vec{X}) \\ \text{제한조건} : & g_j(\vec{X}) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, M \\ & \vec{X}'_i \leq \vec{X}_i \leq \vec{X}''_i \end{aligned} \quad (1)$$

일반적으로 비선형 최적화문제는 일반함수의 해석적 방법과 달리 반복과정에 의하여 최적설계변수  $\vec{X}_{opt}$ 를 찾아가는 방법으로 이루어진다.

$$\vec{X}^k = \vec{X}^{k-1} + \alpha \vec{S}^k \quad (2)$$

여기서  $k$ 는 반복과정의 횟수이다.  $\vec{S}^k$ 는 설계변수  $\vec{X}^{k-1}$ 에서의 탐색방향벡터이고,  $\alpha$ 는 탐색방향으로의 이동거리이다.

일반적으로 최적변수탐색방법은 직접탐색법(direct search method)과 도함수를 이용한 간접탐색법(indirect search method)으로 구분될 수 있다.

직접탐색법은 초기점에서 다음 점으로 이동하는 과정의 방향벡터를 결정하는 데 있어서 목적함수의 도함수값에 의존하지 않고 각 위치에서의 목적함수의 크기만을 비교하여 최적점을 구하는 방법이다.

본 연구에서는 탐사이동과 패턴이동의 두 단계를 통해  $N$ 개의 변수들 중  $N-1$ 개의 변수를 고정시키고 나머지 하나의 변수만을 변화시켜가며 목적함수값의 증감을 파악하는 Hook-Jeeves 방법<sup>(3)</sup>과  $N+1$ 개의 정점에서 목적함수의 값을 비교하여 평가하고 반사, 팽창, 수축 등의 과정을 거쳐 Simplex를 점차적으로 최적점 방향으로 움직여가는 Simplex 방법<sup>(3)</sup> 등 두 가지 직접탐색법을 시험하였다.

도함수를 이용한 간접탐색법인 최급강하법(steepest descent method)<sup>(4)</sup>은 어떤 점에서 설계변수에 대한 목적함수의 구배벡터방향이 함수의 최대증가방향임을 이

용한 것이다. 복합구배법(conjugate gradient method)<sup>(5)</sup>은 전단계와 현단계에서의 구배벡터의 크기와 방향에 의해 탐색방향을 결정하는 방법이다. 최급강하법과 이차미분 정보를 이용하는 Newton 방법에서의 반복과정은 전회에서의 어떠한 정보도 이용하지 않는 단점을 가지고 있다. 이 단점을 극복한 방법이 바로 Quasi-Newton 방법의 일종인 DFP(Davidon · Fletcher · Powell) 방법<sup>(5)</sup>으로서 일차미분만을 사용하여 근사역 Hessian 행렬을 구성한다.

본 연구에서는 최적설계기법에서 필요로 하는 탐색방향으로의 이동거리를 구하는 방법으로서 황금분할법(golden section method)<sup>(4)</sup>과 3차 다항식보간법(cubic interpolation method)<sup>(6)</sup>을 비교하였다. 황금분할법은 탐색방향으로의 일차원 탐색에서 일정한 비율로 이동하여 국부최소치가 있는 불확정구간을 설정하고 또 다시 일정한 비율로 세분화하여 최적이동거리를 구하는 방법이다. 3차 함수보간법은 상한과 하한의 함수값과 그의 도함수값을 알고 3차곡선으로 실제목적함수를 근사하여 국부 최소치를 수렴조건에 도달할 때까지 반복적으로 추적하는 방법이다.

본 연구에서는 치환법의 일종인 순차비제약최소화 기법(Sequential Unconstrained Minimization Technique, SUMT)<sup>(7)</sup>을 사용하였다. 이 방법에서는 제한조건이 있는 문제를 목적함수에 제한조건에 의한 페널티항을 추가시켜 제한조건이 없는 문제로 변환시킨다.

## 3. 유동해석방법

본 연구에서는 익형 주위를 지나는 2차원 유동에서 목적함수 및 그 도함수들을 구하기 위해 2차원 점성유동해석코드를 해석수단으로 사용하였다. 유동해석에서는 비직교곡선좌표계로 변환된 지배방정식들을 유한차분법으로 이산화하였고 대류항에 대해서는 QUICK 도식을 사용하였다.

이산화된 식들의 계산과정에는 SIMPLEC 방식의 속도-압력보정 알고리즘이 사용되었으며, 운동량 보간법을 사용한 비엇갈림격자로 진동해를 방지하였다. 이산화된 대수차분방정식을 푸는 데에는 SIP방법(Strongly Implicit Procedure)<sup>(8)</sup>을 사용하였다. 난류의 해석을 위해서는 표준  $k-\epsilon$  모델을 사용하였다.

격자계는 Fig. 1과 같이 C형<sup>(9)</sup>으로 구성하였는데 총 150x50의 격자점들로 이루어졌으며 익형의 코드방향으로는 48개가 분포되어 있다.

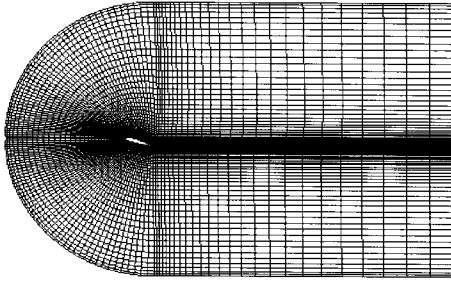


Fig. 1 Grid system of C-type

#### 4. 2차원 익형에 대한 최적설계기법의 적용

2차원 익형의 최적설계에서 목적함수로서 항력-양력비(CD/CL)를 정의하여 이를 최소화하고자 하였고, 설계변수로서 다음과 같은 세 개의 변수를 사용하였으며 각 설계변수에 제한조건을 주었다.

- (1) 최대 두께(maximum thickness, T)
- (2) 최대 캠버(maximum ordinate of camber line, MK)
- (3) 최대 캠버의 코드방향 길이(chordwise position of maximum ordinate, PK)

2차원 익형의 형상은 Fig. 2와 같이 NACA four-digit 날개단면<sup>(10)</sup>을 이용하여 표현하였다.

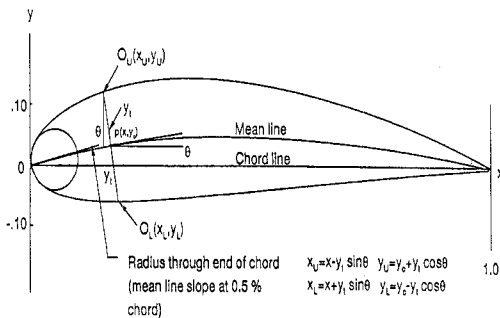


Fig. 2 NACA four digit wing section

본 연구에서의 최적설계는 다음과 같이 정의할 수 있다.

목적함수 : CD/CL  
 제한조건 :  $0.02 \leq MK \leq 0.1$   
 $0.1 \leq PK \leq 0.8$   
 $0.07 \leq T \leq 0.18$

익형설계를 위한 최적설계기법은 다음의 과정으로 구성된다 ; 형상함수에 의한 익형단면 생성, 격자계 생성, 탐색방향 계산, 탐색방향으로의 이동거리 계산, 그리고 유동해석에 의한 목적함수 계산.

입구유동의 방향을 일정하게 유지하면서 설계변수를 변경하면 캠버(camber)의 변화에 의해 영각(incidence angle)의 변화도 자연적으로 수반되기 때문에 영각이 일정하게 유지되도록 익형의 설치각을 바꾸어 주었다.

#### 5. 결과 및 검토

최적설계의 시험대상이 된 2차원 익형유동의 레이놀즈수는  $1.0 \times 10^6$ 이고, 유체는 20 °C 공기이다.

본 연구의 주요 목적이 다양한 최적설계기법의 시험에 있기 때문에 유동해석코드의 수렴시간을 줄이기 위해 낮은 레이놀즈수를 사용하였다.

최적설계기법의 효율성에 대한 판단기준은 목적함수값과 그 도함수를 구하기 위해 요구되는 해석코드의 호출횟수와 최적점을 찾을 때까지 진행한 설계변경횟수이다. 계산을 위해 Pentium II 컴퓨터를 사용하였다.

##### 5.1. 직접탐색방법의 비교

2차원 익형의 최적설계를 위해 먼저 직접탐색방법 중 Hook-Jeeves 방법<sup>(3)</sup>을 2개의 설계변수(PK, MK)를 사용하여 적용하였는데, Fig. 3은 설계점 부근탐색을 한 후 설계변경을 하는 과정을 나타낸다. 이 형상범위 내에서는 서로 다른 점 P1과 P2에서 시작하여도 동일한 최적점을 탐색하는 것을 알 수 있다. Fig. 4는 Simplex 방법<sup>(3)</sup>에서 설계변수 PK와 MK에 따른 목적함수의 변화과정을 보여주고 있다. 두 방법에서 모두 해석코드를 30여회 정도 호출하면 최적점에 근접해 가는

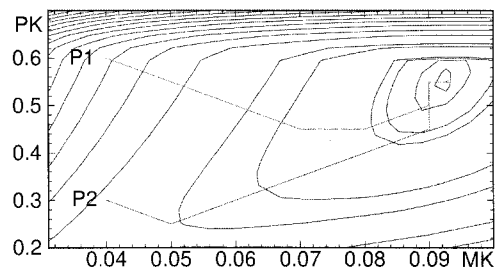


Fig. 3 Searching processes from different points by Hook-Jeeves method

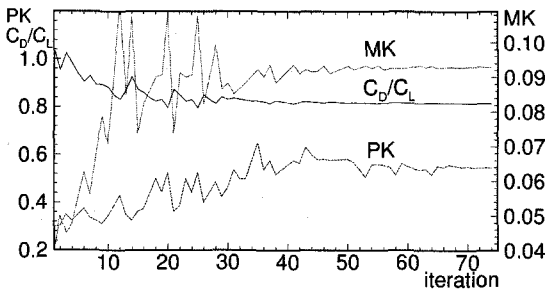


Fig. 4 Variations of design variables and objective function in simplex method

Table 1 Comparison of CPU time in direct method

	2 design variables	3 design variables
H-J method	11,685 seconds	39,974 seconds
Simplex	14,968 seconds	54,325 seconds

것을 알 수 있었다. 한편, 설계변수를 두 개에서 세 개로 확장하여 적용하였을 때, Hook-Jeeves 방법에서의 함수 호출횟수는 57회에서 195회로, Simplex 방법에서는 73회에서 265회로 증가하였다. 따라서, Simplex 방법은 설계변수가 많아짐에 따라 매우 비효과적임을 알 수 있다. 최적설계에서의 계산시간은 Table 1에 나타나 있다.

### 5.2. 간접탐색방법의 비교

Table 2는 간접탐색방법들에 대한 최적설계결과를 보여주고 있다.

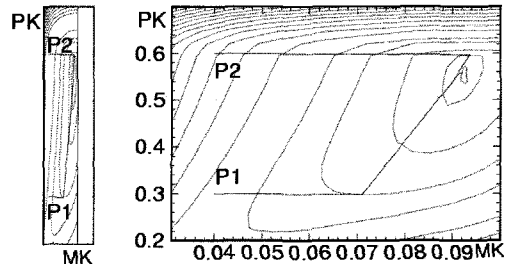
먼저, 두 개의 설계변수를 사용하였을 때 구배벡터

Table 2 Comparison of SDM, CGM, DFP method with two and three design variables

	Method	Final Point (MK, PK, or T)	Final Func.	No. of Iter.	No. of Func. Eval.	CPU time (seconds)
Two design variables	SDM	0.0923 0.5604	0.8320	5	75	15,375
	CGM	0.0915 0.5615	0.8323	4	60	12,301
	DFP	0.0915 0.5553	0.8320	6	80	16,398
Three design variables	SDM	0.0905 0.5603 0.0679	0.8141	7	133	27,264
	CGM	0.0890 0.4912 0.0841	0.8251	6	119	24,395

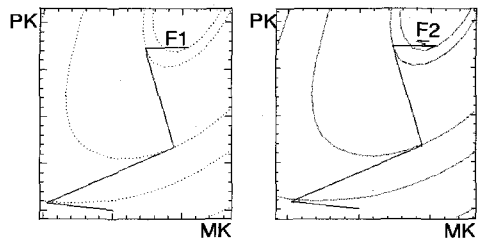
의 반대방향으로 탐색하는 최급강하법(SDM)<sup>(4)</sup>에서는 Fig. 5와 같이 매 설계변경시에 설계변수들의 탐색방향은 서로 수직하게 나타나 탐색방향 및 이동거리가 정확하게 결정되었음을 알 수 있다. 한편 서로 다른 시작점 P1, P2에서 출발하여도 동일 최적점을 찾았다. 그리고 설계변경시 구배벡터의 크기는 최적점으로 갈수록 0에 접근함을 볼 수 있었다.

복합구배법(CGM)<sup>(5)</sup>에 의한 결과는 Fig. 6에 나타나 있고, 수렴조건을 서로 다르게 하여 동일 시작점에서 출발하여 탐색하도록 하였다. 그 결과 수렴조건( $\epsilon=0.01$ )이 큰 (a)의 경우 F1에서 탐색이 종료하나 수렴조건( $\epsilon=0.001$ )이 작은 (b)의 경우에는 F2 지점까지 탐색을 더 하게 된다. 그러나 수렴조건을 더 강화했음에도 불구하고 최급강하법정도의 정확성은 보이지 않았다. 이는 전회정보에 의한 영향이 있기 때문인데, 이와 같은 단점을 극복하기 위해서는 복합구배법으로 수렴이 되면 그 지점에서 최종적인 수렴을 위해 최급강하법으로 추가적인 설계변경을 시도할 필요가 있다. 이러한 결과로 볼 때 복합구배법은 효율성은 좋으나 최적점 부근에서 정확성이 다소 떨어지는 것으로 사료된다. Fig. 7은 익형의 초기형상과 최적형상을 보여준다.



a) dependent axes b) independent axes

Fig. 5 Searching processes from different points by steepest descent method



a) convergence criterion=0.01 b) convergence criterion=0.001

Fig. 6 Comparison of convergence criteria in conjugate gradient method

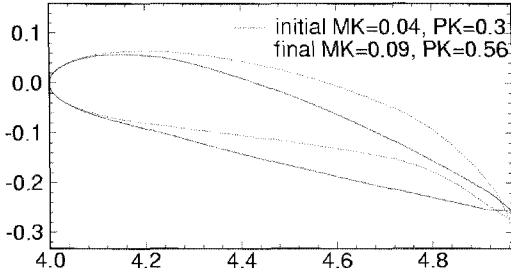


Fig. 7 Initial and final shapes of airfoil with two design variables

Fig. 8은 세 가지 설계기법에 의한 탐색과정을 비교한 것이고, Fig. 9는 설계변경에 따른 목적함수의 변화과정을 비교해 보여준다. 이를 살펴보면 복합구배법이 익형의 설계에서는 가장 효율적이나 정확성이 다소 결여되므로 최적점 부근에서는 최급강하법 등으로 정확성을 보완할 필요가 있을 것으로 사료된다.

한편 설계변수를 두께를 포함하여 3개로 확장하였을 때 Table 2에서 볼 수 있는 바와 같이 설계변수갯수에 관계없이 복합구배법이 가장 효과적임을 알 수 있다. Fig. 10은 3개의 설계변수를 사용했을 때의 최종형상과 최적형상을 보여준다.

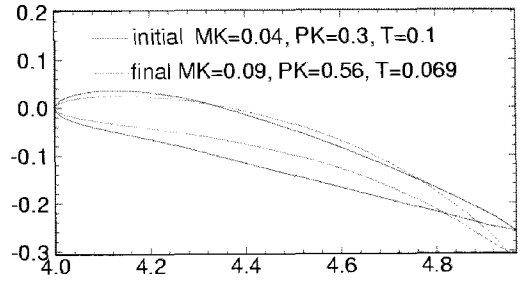


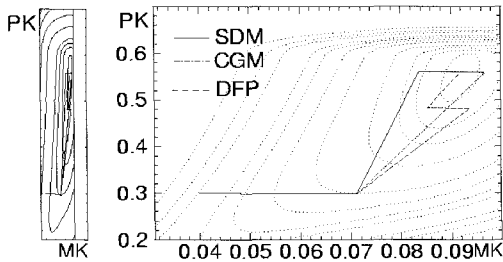
Fig. 10 Initial and final shapes of airfoil with three design variables

### 5.3. 황금분할법과 3차 다항식보간법의 비교

탐색방향으로의 이동거리를 구하는 방법들의 성능을 비교하기 위해 동일한 탐색기법하에서 시험을 하였다. 탐색기법으로는 효율성은 다소 저조하지만 탐색방향을 안정적으로 찾는 최급강하법을 사용하였다. Table 3에서 보여주듯이 황금분할법보다 3차다항식보간법에 의한 일차원 이동거리 탐색방법이 우수함을 알 수 있다.

Table 3 Comparison of cubic interpolation and golden section methods

Method	Initial Point (MK, PK)	Final Point	Final Func.	No. of Iter.	No. of Func. Evaluation
Cubic	0.04 0.3	0.0923 0.5604	0.8320	5	80
Golden Section	0.04 0.3	0.0917 0.5578	0.8327	5	103



a) dependent axes b) independent axes

Fig. 8 Comparison of SDM, CGM and DFP

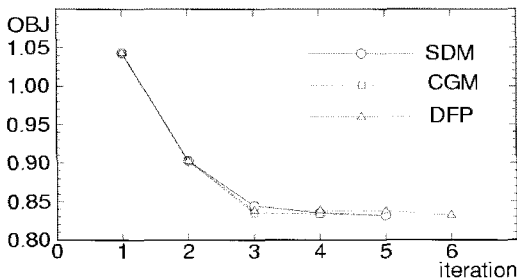


Fig. 9 Comparison of the values of objective function

## 6. 결론

본 연구에서는 익형에 대한 효과적인 최적설계기법을 개발하기 위해 2차원 점성유동 해석코드를 해석수단으로 하여 다양한 수치 최적설계기법들의 성능을 비교하였다. 수치 최적설계기법중 직접탐색법으로 Simplex 방법과 Hook-Jeeves 방법, 간접탐색법으로 최급강하법, 복합구배법, 그리고 DFP방법 등을 비교하였고, 탐색방향으로의 이동거리를 결정하기 위해 황금분할법과 3차 다항식보간법등의 성능을 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 탐색방향을 결정하는 방법으로서 시험된 다섯가지 방법들 중 익형의 최적설계에 있어서 복합구배법이

가장 우수한 성능을 갖는다. 단, 복합구배법은 최적점 부근에서 정확성이 다소 결여되므로 최급강하법에 의한 보완이 필요하다.

- 2) 간접탐색법 중 Hook-Jeeves 방법도 설계변수가 두 개인 경우에는 복합구배법과 비교할 만한 성능을 가지나 설계변수가 세 개로 확장될 경우에는 해석 코드출력수가 크게 증가하는 단점을 보인다.
- 3) 탐색방향으로의 이동거리를 결정하는 방법으로는 황금분할법에 비해 3차 다항식보간법이 우수하다.

## 후 기

본 연구는 1997년도 인하대학교 교내연구비로 수행되었으며, 이에 감사를 표한다.

## 참고문헌

- (1) Malone, J. B., Vadyak, J., and Sankar, L. N., 1987, "Inverse Aerodynamic Design Method for Aircraft Component," J. of Aircraft, Vol. 24, No. 1, pp. 8~9.
- (2) Vanderplaats, G. N., 1987, "Efficient Algorithm for Numerical Airfoil Optimization," J. of Aircraft, Vol. 16, No. 1, pp. 8~9.
- (3) Rao, S. S., 1976, Engineering Optimization Theory and Practice, John Wiley & Sons, Inc.
- (4) Arora, J. S., 1989, Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill Book Co.
- (5) Kuester, J. L and Mize, J. H., 1973, "Optimization Techniques with Fortran McGraw-Hill Book Co.
- (6) Reklaitis, G. V., Ravindran, A. and Ragsdel, K. M., 1983, Engineering Optimization, Methods and Applications, John Wiley & Sons, Inc.
- (7) Vanderplaats, G. N., 1984, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications," McGraw-Hill Book Co.
- (8) Fletcher, C. A. J., 1988, "Computational Techniques for Fluid Dynamics," Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- (9) Thompson, Joe. F., Warsi, Z. U. A Warsi, C. Wayne Mastin, 1985, "Numerical Grid Generation," Elsevier Science Publishing Co.
- (10) Abbott, I. H. and Von Doenhoff, A. E., 1959, "Theory of Wing Sections," Dover Publications, Inc.