매크로-스타 그래프와 행렬 스타 그래프 사이의 임베딩

이 형 옥†

요 약

매크로-스타 그래프는 스타 그래프를 기본 모듈로 하면서 노드 대칭성, 최대 고장 허용도, 계층적 분할 성질을 가지면서 스타 그래프보다 망 비용이 개선된 상호 연결망이다. 행렬 스타 그래프는 매크로-스타 그래프가 갖는 좋은 성질들을 가지면서 매크로-스타 그래프보다 망 비용이 작은 값을 갖는 연결망이다.

본 논문에서는 매크로-스타 그래프와 행렬 스타 그래프 사이의 임베딩 방법을 제시한다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$에 연장율 2에 임베딩 가능하고, 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$은 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$에 연장율 4, 평균 연장율 3 이하에 임베딩 가능함을 보인다. 이러한 결과는 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘들이 행렬 스타 그래프에서도 효율적으로 시뮬레이션 가능함을 의미한다.

Embedding between a Macro-Star Graph and a Matrix Star Graph

Hyeong-Ok Lee†

ABSTRACT

A Macro-Star graph which has a star graph as a basic module has node symmetry, maximum fault tolerance, and hierarchical decomposition property. And, it is an interconnection network which improves a network cost against a star graph. A matrix star graph also has such good properties of a Macro-Star graph and is an interconnection network which has a lower network cost than a Macro-Star graph.

In this paper, we propose a method to embed between a Macro-Star graph and a matrix star graph. We show that a Macro-Star graph $MS(k,n)$ can be embedded into a matrix star graph $MS_{k,n+1}$ with dilation 2. In addition, we show that a matrix star graph $MS_{k,n}$ can be embedded into a Macro-Star graph $MS(k,n+1)$ with dilation 4 and average dilation 3 or less as well. This result means that several algorithms developed in a star graph can be simulated in a matrix star graph with constant cost.

1. 서 론

병렬 처리 컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 분산 기억 장치를 사용하는 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억 장치를 갖고, 각 프로세서는 상호 연결망에 의해 연결되어 있으며, 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송 방식으로 이루어진다. 다중컴퓨터에서 상호 연결망은 전체 시스템의 성능과

† 준 회 원 : 전남대학교 전산통계학과
논문접수 : 1999년 1월 19일, 심사완료 : 1999년 2월 4일

시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다[4].

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현할 수 있다. 상호 연결망을 평가하기 위한 망 척도로써, 분지수와 지름의 곱으로 정의된 망 비용[10,11]이 있다. 지금까지 제안된 상호 연결망을 노드수를 기준으로 분류하면 $k \times n$개의 노드를 갖는 메쉬[4,9] 부류와 2^n개의 노드를 갖는 하이퍼큐브[9,10] 부류, 그리고 $n!$개의 노드를 갖는 스타 그래프[1,2] 부류로 나눌 수 있다.

스타 그래프는 하이퍼큐브가 갖는 좋은 성질들을 가지면서 하이퍼큐브에 비해 분지수와 지름이 매우 작은 장점을 갖지만 다른 연결망과의 임베딩이 어렵고 차원의 증가에 따른 노드수 증가폭이 크다는 단점을 갖는다. 스타 그래프의 단점을 보완하여 SCC[7], (n,k)-Star 그래프[2], Bubblesort Star 그래프[3], Transposition 그래프[8] 등이 제안되었고, 스타 그래프와 같은 노드수를 가질 때 스타 그래프보다 적은 분지수를 가지면서 스타 그래프보다 망 비용이 개선된 연결망으로 매크로-스타 그래프[10]와 행렬 스타 그래프[11]가 제안되었다.

매크로-스타 그래프[10]는 스타 그래프[1]를 기본 모듈로 하면서 스타 그래프와 같은 수의 노드를 가질 때 스타 그래프보다 적은 분지수를 가지면서 스타 그래프가 갖는 노드 대칭성, 계층적 구조, 재귀적 성질을 이용한 분할성과 최대 고장 허용도를 갖는 상호 연결망이다. 행렬 스타 그래프[11]는 매크로-스타 그래프가 갖는 노드 대칭성, 계층적 구조, 최대 고장 허용도 등의 좋은 성질들을 가지면서 매크로-스타 그래프보다 망 비용이 개선된 상호 연결망이다.

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프가 다른 그래프 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 연결망 G가 연결망 H에 적은 비용으로 임베딩이 가능하다는 것은 연결망 G에서 개발된 모든 알고리즘을 연결망 H에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호 연결망의 임베딩의 평가 척도는 중요하다[4,5,9].

그래프 G의 그래프 H에 대한 임베딩 $f=(\varphi,\rho)$는 다음과 같이 정의한다. φ는 G의 정점 집합 $V(G)$를 H의 정점 집합 $V(H)$에 대응시키는 함수이고, ρ는 G의 에지 $e=(v,w)$를 $\varphi(v)$와 $\varphi(w)$를 잇는 H상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 측정하는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion) 등이 있다[4,9]. 그래프 G의 에지 e의 연장율은 H상에서의 경로 $\rho(e)$의 길이를 말하고, 임베딩 f의 연장율은 G의 모든 에지에 대한 연장율중 최대값이다. 평균 연장율[11]은 $\frac{1}{|E_G|}\sum_{(v,w)\in E_G}\{dist(\Phi(v),\Phi(w))\}$이다. 밀집율은 H의 에지 e'를 포함하는 $\rho(e)$의 개수를 말하고, f의 밀집율은 H의 모든 에지의 밀집율중 최대 값을 말한다. 임베딩 f의 확장율은 G의 정점 수에 대한 H의 정점의 개수의 비를 말한다.

본 논문에서는 스타 그래프를 기본 모듈로 하면서 스타 그래프보다 망 비용이 개선된 매크로-스타 그래프와 행렬 스타 그래프 사이의 임베딩을 분석한다. 두 그래프 사이의 임베딩 관계를 분석하여 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘들을 행렬 스타 그래프에서 효율적으로 시뮬레이션 할 수 있음을 보인다. 논문의 구성은 2장에서 매크로-스타 그래프와 행렬 스타 그래프를 정의하고 기본 성질을 알아보고, 3장에서 매크로-스타 그래프를 행렬 스타 그래프에 연장율 2에 임베딩 가능함을 보이고, 그리고 행렬 스타 그래프를 매크로-스타 그래프에 연장율 4에 임베딩 가능함을 보인다. 마지막으로 결론과 추후 연구방향을 제시한다.

2. 관련연구

2.1 매크로-스타 그래프의 정의 및 성질

매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$은 $(nl+1)!$개의 노드와 $(nl+1)!*(n+l-1)$개의 에지로 구성된 연결망이다. 각 노드의 주소는 $k(=nl+1)$개의 서로 다른 심벌의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v와 w의 k개 비트 스트링에서 노드 w에 아래의 2가지 에지 발생기 T_j, S_i를 적용하여 생성된 순열들 사이에 에지가 존재한다. k개의 서로 다른 심벌 집합을 $<k>=\{1,2,..,k\}$이라 하고, $<k>$에 대한 심벌의 순열을 $U=u_{1:k}=u_1u_2...u_k$, $u_i\in<k>$이라 할 때 매크로-스타 그래프 $MS(l,n)$은 다음과 같이 정의된다[10].

$V(MS(l,n))=\{U=u_{1:k} \mid u_i,u_j\in<k>,\ u_i\neq u_j,\ i\neq j,\ 1\le i,j\le k\}$

$E(MS(l,n))=\{(U,V) \mid U,V\in V(MS(l,n))$

satisfying $U=T_j(V)$ or $U=S_i(V)$, $2\le j\le n+1$, $2\le i\le l\}$

에지 발생기 T_j는 순열 U에서 첫 번째 심벌 u_1과

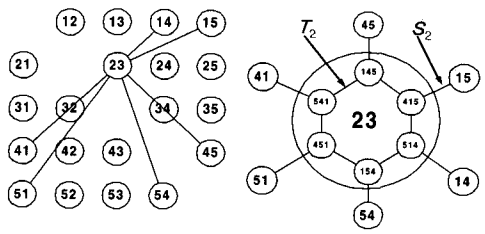
첫 번째 클러스터 중의 한 원소 u_j를 서로 교환하여 생성된 순열을 연결하는 에지이다($2 \le j \le n+1$).

$$T_j(U)=u_j u_{2:j-1} u_1 u_{j+1:k},\ j=2,3,\ldots,n+1.$$

에지 발생기 $S_{n,i}$는 순열 U에서 첫 번째 클러스터와 i번째 클러스터를 각각 구성하는 심벌 시퀀스 $u_{2:n+1}$과 $u_{(i-1)n+2:in+1}$를 서로 교환하여 생성된 순열을 연결하는 에지이다($2 \le i \le l$).

$$S_{n,i}(u_{1:k})=u_1 u_{(i-1)n+2:in+1} u_{n+2:(i-1)n+1} u_{2:n+1} u_{in+2:k},\ i=2,3,\ldots,l.$$

여기서 심벌 시퀀스 $u_{(i-1)n+2:in+1}$를 클러스터(또는 레벨)라 하고, 한 클러스터를 구성하는 원소의 개수는 $MS(l,n)$에서 n개이다. 에지 발생기 $S_{n,i}$를 간단히 S_i라 한다. (그림 1)은 매크로-스타 그래프 $MS(2,2)$를 두 번째 클러스터를 기준으로 구성된 노드를 표현했다. (그림 1)의 우측 큰 원은 두 번째 클러스터의 심벌이 23으로 구성된 노드들로써, 노드의 순열이 145로 표현된 것의 순열을 모두 표현하면 14523이고, 순열 14523에서 에지 발생기 T_2(14523)에 의해 생성된 순열은 41523이고, 에지 발생기 T_3(14523)에 의해 생성된 순열은 54123이다. 그리고 어떤 순열 P에 매크로-스타 그래프의 에지 발생기 T_j와 S_i를 순차적으로 적용한 경우 $S_i(T_j(P))$로 표현한다($2 \le j \le n+1$, $2 \le i \le l$). 본 논문에서는 매크로-스타 그래프의 노드는 $k(=ln+1)$개 심벌에 대한 순열로 표현하므로 노드와 순열을 동일한 의미로 사용한다.



(그림 1) 매크로-스타 그래프 $MS(2,2)$
(Fig. 1) Macro-Star graph $MS(2,2)$

2.2 행렬 스타 그래프의 정의 및 성질

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$는[11] $k \times n$개의 심볼 1,2,3,...,kn을 이용하여 k행 n열의 행렬을 아래와 같은 형태로 노드를 표현하고, 그리고 노드를 연결하는 에지는 다음과 같은 행렬로 표현된 노드 사이에 연결 관계를 갖는다($1 \le k \le n$).

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(i-1)n+1} & x_{(i-1)n+2} & \cdots & x_{(i-1)n+j} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(k-1)n+1} & x_{(k-1)n+2} & \cdots & x_{(k-1)n+j} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

(1) 1행 1열의 원소와 1행 j열의 원소가 교환된 행렬

$$\begin{bmatrix} x_j & x_2 & \cdots & x_1 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(i-1)n+1} & x_{(i-1)n+2} & \cdots & x_{(i-1)n+j} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(k-1)n+1} & x_{(k-1)n+2} & \cdots & x_{(k-1)n+j} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

(2) 1행 1열의 원소와 i행 1열의 원소가 교환된 행렬

$$\begin{bmatrix} x_{(i-1)n+1} & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_{(i-1)n+2} & \cdots & x_{(i-1)n+j} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(k-1)n+1} & x_{(k-1)n+2} & \cdots & x_{(k-1)n+j} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

(3) 1행과 i행에서 같은 열에 있는 원소가 교환된 행렬

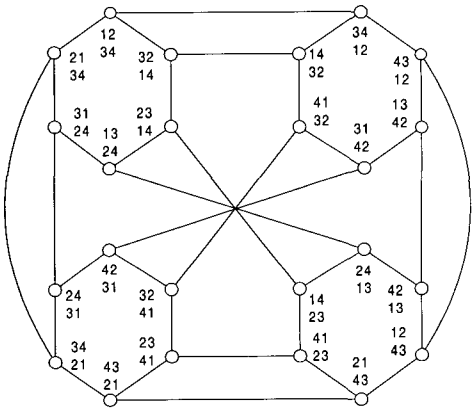
$$\begin{bmatrix} x_{(i-1)n+1} & x_{(i-1)n+2} & \cdots & x_{(i-1)n+j} & \cdots & x_{in} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{(k-1)n+1} & x_{(k-1)n+2} & \cdots & x_{(k-1)n+j} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 에지를 3개의 부류로 구분하여 (1)의 조건에 의해 정의되는 에지를 $C_j(2 \le j \le n)$라 하고, (2)의 조건에 의해 정의되는 에지를 $R_i(2 \le i \le k)$라 하고, (3)의 조건에 의해 정의되는 에지를 $E_i(2 \le i \le k)$라 하자. 위의 정의에 의해 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$은 $k \times n$개의 심볼로 표현할 수 있는 순열의 개수만큼 행렬을 생성할 수 있으므로 $(k \times n)!$개의 노드로 구성되고, 노드의 분지수는 $2k+n-3$인 정규 연결망이다. 단, $k=1$, $n=2$인 $MS_{1,2}$는 위의 정의에서 조건 (2)와 (3)이 해당되지 않으므로 분지수는 1이고, 두 개의 노드로 구성된 K_2 그래프이다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드는 k행 n열의 행렬 형태로 구성되고, 노드를 구성하는 원소는 $k \times n$개이고, 노드 s의 $k \times n$ 행렬에서 i행 j열의 원소는 $s_{i,j}$로 표현한다. (그림 2)는 노드가 2행 2열의 행렬로 표현되는 행렬 스타 그래프 $MS_{2,2}$의 예이다. 스타 그래프의 변형으로 제안된 그래프들 중에서

망 비용이 가장 개선된 매크로-스타 그래프와 행렬 스타 그래프를 비교하면 <표 1>과 같다[11].

〈표 1〉 스타 그래프 부류의 망 비용
〈Table 1〉 Network cost of star family

	노드수	분지수	지 름	망비용
스 타 S_{n^2}	$(n^2)!$	n^2-1	$\cong n^2$	$O(n^4)$
매크로-스타 $MS(n,n)$	$(n^2+1)!$	$2n-1$	$\cong n^2$	$O(n^3)$
행렬 스타 MS_{k,k,k_1} $(k=\sqrt[3]{n^2})$	$(n^2)!$	$5(n^{0.7}-1)$	$\cong n^2$	$O(n^{2.7})$



(그림 2) 행렬 스타 그래프 $MS_{2,2}$
(Fig. 2) macro star graph $MS_{2,2}$

3. 행렬 스타 그래프와 매크로-스타 그래프 사이의 임베딩

3.1 매크로-스타 $MS(k,n)$의 행렬 스타 $MS_{k,n+1}$에 대한 임베딩

임베딩의 개요는 다음과 같다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드를 표현한 순열 1행 kn+1열의 행렬 형태를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드를 표현한 k행 n+1열의 행렬 형태로 변환한다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$은 k개의 클러스터로 구성되고 각 클러스터는 n개의 심벌로 이루어져 있고, 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드를 표현한 행렬은 k행 n+1열로 표현되어 있으므로, 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드를 표현한 한 행의 심벌 개수가 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드를 표현한 한 클러스터의 심벌 개수보다 한 개 더 많음을 알 수 있다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 첫 번째 클러스터를 구성하는 심벌들을 행렬 스타 그래프의 노드 표현 형태로 표현한 $k\times(n+1)$ 행렬에서 첫 번째 행에 위치시키고, i번째 클러스터를 구성하는 심벌을 i번째 행에 위치하도록 한다($2\le i\le k$). 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 한 클러스터의 심벌 개수와 행렬 스타 그래프의 한 행의 심벌 개수가 한 개 차이 나므로, 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 각 클러스터에서 j번째 원소는 행렬 스타 그래프의 노드 표현 형태로 표현한 $k\times(n+1)$ 행렬에서 j+1번째 열에 위치하도록 한다($1\le j\le n$). 행렬 스타 그래프의 노드 표현 형태로 표현한 $k\times(n+1)$ 행렬의 i행에서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 심벌이 할당되지 않은 첫 번째 열 위치에는 Δ_i를 할당한다($2\le i\le k$).

매크로-스타 그래프의 노드를 행렬 스타 그래프의 노드로 사상하는 방법은 다음과 같다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 V로 사상한다. 그리고 심벌들간의 사상은 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드를 행렬 스타 그래프의 노드 표현 형태로 표현한 $k\times(n+1)$ 행렬에서 Δ_i를 제외한 나머지 심벌들에서 $u_{(i-1)n+a}$를 $v_{(i-1)n+j}$로 사상한다(i=매크로-스타 그래프의 레벨, $2\le a\le n+1$, $i+1\le j\le i+n$).

정리 1) 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$에 연장율 2, 확장율 $(kn+1)!/(kn+k)!$에 임베딩 가능하다.

증명) 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U의 순열을 $u_1u_{2:n+1}u_{n+2:2n+1}\ \cdots\ u_{(i-1)n+2:in+1}\ \cdots\ u_{(k-1)n+2:kn+1}$이라 할 때, 노드 U를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 표현 형태인 $k\times(n+1)$ 행렬 형태로 변환한 행렬을 노드 U'라 하자. 노드 U'의 $k\times(n+1)$ 행렬은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n & v_{n+1} \\ \Delta_2 & v_{n+2} & \cdots & v_{n+j} & \cdots & v_{2n} & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_i & v_{(i-1)n+2} & \cdots & v_{(i-1)n+j} & \cdots & v_{in} & v_{in+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_l & v_{(k-1)n+2} & \cdots & v_{(k-1)n+j} & \cdots & v_{kn} & v_{kn+1} \end{bmatrix}$$

매크로- 스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U는 에지 발생기 S_i와 T_j에 의해 노드 $S_i(U)$와 노드 $T_j(U)$에 연결되어 있다($2\le i\le k$, $2\le j\le n+1$). 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 표현 형태로 변환한 노드 U'에 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지를 적용하여 생성된 순열이 매크로-스

타 그래프의 노드 $S_i(U)$, 노드 $T_j(U)$과 동일한 순열을 구성 할 수 있음을 통하여 임베딩을 분석한다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U와 인접한 노드들은 에지 발생기 S_i 또는 T_j에 의해 연결되어 있으므로 2가지의 에지 발생기 경우로 나누어 보인다.

[경우 1] 에지 발생기 $T_{j+1}(1\le j\le n)$

매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 에지 발생기 T_{j+1}는 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지 C_j로 나타낼 수 있다 $(1\le j\le n)$. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U의 순열 $u_1u_{2:n+1}u_{n+2:2n+1}\ \dots\ u_{(k-1)n+2:kn+1}$에서 에지 발생기 T_{j+1}에 의해 연결되는 노드 $T_{j+1}(U)$는 노드 U의 첫 번째 심벌 u_1과 첫 번째 클러스터의 j번째 심벌들이 서로 교환된 순열 $u_ju_2u_3\dots u_1\dots u_{n+1}u_{n+2:2n+1}\ \dots\ u_{(k-1)n+2:kn+1}$이다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 $T_{j+1}(U)$를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 표현 형태로 변환한 노드 $T_{j+1}(U')$의 행렬은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} v_j & v_2 & \cdots & v_1 & \cdots & v_n & v_{n+1} \\ \Delta_2 & v_{n+2} & \cdots & v_{n+j} & \cdots & v_{2n} & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_i & v_{(i-1)n+2} & \cdots & v_{(i-1)n+j} & \cdots & v_{in} & v_{in+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_l & v_{(k-1)n+2} & \cdots & v_{(k-1)n+j} & \cdots & v_{kn} & v_{kn+1} \end{bmatrix}.$$

노드 U에서 에지 발생기 T_{j+1}에 의해 교환될 수 있는 심벌들의 위치는 두 번째 위치의 심벌부터 $n+1$번째 위치의 심벌까지이므로, 노드 U'의 $k\times(n+1)$ 행렬에서는 1행의 첫 번째 위치의 심벌과 $j+1$번째 위치의 심벌이 서로 교환된 순열과 동일하다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 V로 사상하고, 노드 U에 인접한 노드 $T_{j+1}(U)$는 노드 $C_{j+1}(U')$에 사상할 수 있다. 따라서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 에지 발생기 T_{j+1}은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지 C_{j+1}과 동일한 역할을 하는 에지 임을 알 수 있다.

[경우 2] 에지 발생기 $S_i(2\le i\le l)$

매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 에지 발생기 S_i는 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지 E_i와 R_i로 나타낼 수 있다$(2\le i\le k)$. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U의 순열 $u_1u_{2:n+1}u_{n+2:2n+1}\ \dots\ u_{(i-1)n+2:in+1}\ \dots\ u_{(l-1)n+2:ln+1}$에서 에지 발생기 S_i에 의해 연결되는 노드 $S_i(U)$는 노드 U의 첫 번째 클러스터를 구성하는 n개의 심벌 $u_{2:n+1}$ $(=u_2u_3\dots u_{n+1})$과 i번째 클러스터를 구성하는 n개의 심벌 $u_{(i-1)n+2:in+1}(=u_{(i-1)n+2}u_{(i-1)n+3}\dots u_{in+1})$을 서로 교환하여 구성한 순열 $u_1u_{(i-1)n+2:in+1}u_{n+2:2n+1}\ \dots\ u_{2:n+1}\ \dots\ u_{(l-1)n+2:ln+1}$이다. 노드 U에서 에지 발생기 S_i에 의해 연결된 순열 $S_i(U)$을 행렬 스타 그래프의 노드 형태인 $k\times(n+1)$ 행렬 형태로 변환하면 노드 $S_i(U')$는 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_{(i-1)n+2} & \cdots & u_{(i-1)n+j} & \cdots & u_{in} & v_{in+1} \\ \Delta_2 & u_{n+2} & \cdots & u_{n+j} & \cdots & v_{2n} & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_i & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_l & u_{(l-1)n+2} & \cdots & u_{(l-1)n+j} & \cdots & u_{ln} & u_{ln+1} \end{bmatrix}$$

노드 U에 연결된 $S_i(U)$의 순열은 노드 U'에 행렬 스타 그래프의 에지 E_i와 R_i를 적용하여 생성된 노드 $R_i(E_i(U'))$와 동일한 순열을 구성 할 수 있다. 즉, 순열 $S_i(U)=R_i(E_i(U'))$이다. 노드 U'에 행렬 스타 그래프의 에지 E_i와 R_i를 적용한 행렬의 변환 과정은 다음과 같다. 먼저 노드 U'에 행렬 스타 그래프의 에지 E_i를 적용하면 노드 $E_i(U')$의 순열은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \Delta_i & u_{(i-1)n+2} & \cdots & u_{(i-1)n+j} & \cdots & u_{in} & v_{in+1} \\ \Delta_2 & u_{n+2} & \cdots & u_{n+j} & \cdots & v_{2n} & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_l & u_{(l-1)n+2} & \cdots & u_{(l-1)n+j} & \cdots & u_{ln} & u_{ln+1} \end{bmatrix}$$

이제 순열 $E_i(U')$에 행렬 스타 그래프의 에지 R_i를 적용한 노드 $R_i(E_i(U))$의 순열은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_{(i-1)n+2} & \cdots & u_{(i-1)n+j} & \cdots & u_{in} & v_{in+1} \\ \Delta_2 & u_{n+2} & \cdots & u_{n+j} & \cdots & v_{2n} & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_i & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ \Delta_l & u_{(l-1)n+2} & \cdots & u_{(l-1)n+j} & \cdots & u_{ln} & u_{ln+1} \end{bmatrix}$$

매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U의 순열 $u_1u_{2:n+1}u_{n+2:2n+1}\ \dots\ u_{(i-1)n+2:in+1}\ \dots\ u_{(l-1)n+2:ln+1}$에서 에지 발생기 S_i에 의해 연결된 노드 $S_i(U)$의 순열은 노드 U의 순열에서 첫 번째에 위치한 심벌 u_1은 변하지 않고 첫 번째 클러스터와 i번째 클러스터가 서로 교환된 순열이다. $k\times(n+1)$ 행렬 형태로 변환된 노드 U'에서 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 표현 형태인 $k\times(n+1)$ 행렬의 노드 $S_i(U)$를 생성하는 방법은 첫 번째 행과 i번째 행의 원소를 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지 C_i에 의해 서로 교환하고, 그리고 첫 번째 행과 i번째 행의 1열에 위치한 심벌을 서로 교환하기 위해 에지 R_i를

적용한다. 따라서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드 U는 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드 V로 사상하고, 노드 U에서 에지 S_i에 의해 연결된 노드 $S_i(U)$는 노드 U'에서 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지 E_i를 적용한 노드 $E_i(U')$와 노드 $E_i(U')$에 에지 R_i를 적용한 노드 $R_i(E_i(U'))$를 경유하는 경로로 사상 할 수 있음을 알 수 있다. 그러므로 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 에지 발생기 S_i는 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 에지 E_i와 R_i로 표현 할 수 있으므로 연장율 2에 임베딩 가능하다. 그러므로 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$에 대한 임베딩의 연장율은 위의 경우 2에 의해 2임을 알 수 있고, 확장율은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$의 노드수에 대한 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$의 노드수의 비율이므로 $(kn+1)!/(kn+k)!$이다.

3.2 행렬 스타 $MS_{k,n}$의 매크로-스타 $MS(k,n+1)$에 대한 임베딩

임베딩의 개요는 다음과 같다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드를 표현한 $k\times n$ 행렬을 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드를 표현한 1행 $k(n+1)+1$열 형태로 변환한다. 변환 방법은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드를 표현한 $k\times n$ 행렬에서 i번째 행을 구성하는 n개의 심벌을 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드를 표현한 1행 $k(n+1)+1$열의 i번째 클러스터로 위치시킨다($1\le i\le k$). 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 한 행의 원소가 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 한 클러스터를 구성하는 원소의 개수보다 한 개 적으므로, 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 i번째 행을 구성하는 n개 원소를 가장 좌측 심벌부터 우측으로 이동하면서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 i번째 클러스터의 첫 번째 위치부터 n번째 위치까지 순차적으로 할당하고, 각 클러스터의 마지막 $n+1$번째 위치에는 할당되는 원소가 없으므로 Δ_{i+1}로 나타낸다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드를 구성하는 심벌의 개수는 $k(n+1)+1$개이므로, 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 형태로 표현한 순열에서 Δ_1로 나타낸다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드로의 사상은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U로 사상하고, 심벌들간의 사상은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 형태로 표현한 순열에서 Δ_i를 제거한 나머지 심벌들을 v_j는 u_j로 사상한다($1\le i\le k+1$, $1\le j\le kn$).

정리 2) 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$은 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$에 연장율 4, 확장율 $(kn)!/(kn+k+1)!$에 임베딩 가능하다.

증명) 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 한 노드 V를 나타내는 $k\times n$ 행렬을 아래와 같다 하자.

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \\ v_{n+1} & v_{n+2} & \cdots & v_{n+j} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{(i-1)n+1} & v_{(i-1)n+2} & \cdots & v_{(i-1)n+j} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{(k-1)n+1} & v_{(k-1)n+2} & \cdots & v_{(k-1)n+j} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

이 때, 노드 V를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 표현 형태로 변환한 노드를 V'라 하자. 노드 V'의 순열은 다음과 같다.

$V' = \Delta_1 v_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \cdots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \cdots v_{in}$
$\Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \cdots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다.

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V는 에지 C_j, R_i, E_i에 의해 노드 $C_j(V)$, $R_i(V)$, $E_i(V)$과 연결되어 있다($2\le i\le k$, $2\le j\le n$). 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V를 매크로-스타 그래프의 노드 형태로 변환한 노드 V'에 매크로-스타 그래프의 에지 발생기 S_i, T_j를 적용하여 생성된 순열이 행렬 스타 그래프의 노드 $C_j(V)$, $R_i(V)$, $E_i(V)$과 동일한 순열을 구성할 수 있음을 통하여 임베딩을 분석한다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V와 인접한 노드를 연결하는 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 에지 관계를 정의한 에지 C_j, R_i, E_i의 각 경우로 나누어 보인다.

[경우 1] 에지 $C_j(2\le j\le n)$

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 에지 C_j는 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_j, T_2, T_j를 순차적으로 적용하여 나타낼 수 있다($2\le j\le n$). 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V에서 에지 C_j에 의해 인접한 노드 $C_j(V)$의 행렬은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} v_j & v_2 & \cdots & v_1 & \cdots & v_n \\ v_{n+1} & v_{n+2} & \cdots & v_{n+j} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{(i-1)n+1} & v_{(i-1)n+2} & \cdots & v_{(i-1)n+j} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{(k-1)n+1} & v_{(k-1)n+2} & \cdots & v_{(k-1)n+j} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

노드 $C_j(V)$를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 표현 형태로 변환한 노드 $C_j(V')$의 순열은 $\Delta_1 v_j v_2 v_3 \ldots v_1 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V'의 순열 $\Delta_1 v_1 v_2 v_3 \ldots v_j \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$에서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_j, T_2, T_j를 연속적으로 적용한 노드 $T_j(T_2T_j(V'))$는 노드 $C_j(V')$와 동일한 순열을 구성함을 보인다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V'에 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_j, T_2, T_j를 연속적으로 적용한 과정은 다음과 같다. 노드 V'에 에지 발생기 T_j를 적용한 노드 $T_j(V')$의 순열은 $v_j v_1 v_2 v_3 \ldots \Delta_1 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이고, 노드 $T_j(V')$에 에지 발생기 T_2를 적용한 노드 $T_2(T_j(V'))$의 순열은 $v_1 v_j v_2 v_3 \ldots \Delta_1 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다. 노드 $T_2(T_j(V'))$에 에지 발생기 T_j를 적용한 노드 $T_j(T_2T_j(V'))$의 순열은 $\Delta_1 v_j v_2 v_3 \ldots v_1 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V에서 에지 C_j에 의해 인접한 노드 $C_j(V)$는 노드 V에 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_j, T_2, T_j를 연속적으로 적용한 노드 $T_j(T_2T_j(V'))$와 동일한 순열을 생성함을 알 수 있다.

따라서 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U로 사상하고, 노드 V에서 에지 C_j에 의해 인접한 노드 $C_j(V)$는 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U에서 3개의 노드 즉, 노드 $T_j(V')$, 노드 $T_2(T_j(V'))$, 그리고 노드 $T_j(T_2T_j(V'))$를 경유하는 경로로 사상할 수 있으므로 연장율이 3이다.

[경우 2] 에지 $R_i(2 \le i \le k)$

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 에지 R_i는 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_2, S_i, T_2, S_i를 순차적으로 적용하여 나타낼 수 있다($2 \le i \le k$).

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V에서 에지 R_i에 의해 인접한 노드 $R_i(V)$의 행렬은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} v_{(i-1)n+1} & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \\ v_{n+1} & v_{n+2} & \cdots & v_{n+j} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_{(i-1)n+2} & \cdots & v_{(i-1)n+j} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{(k-1)n+1} & v_{(k-1)n+2} & \cdots & v_{(k-1)n+j} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

노드 $R_i(V)$를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 표현 형태로 변환한 노드 $R_i(V')$의 순열은 $\Delta_1 v_{(i-1)n+1} v_2 v_3 \ldots v_1 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_i v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V' 순열 $\Delta_1 v_1 v_2 v_3 \ldots v_j \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$에서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_2, S_i, T_2, S_i를 연속적으로 적용한 노드 $S_i(T_2S_iT_2(V'))$는 노드 $R_i(V')$와 동일한 순열을 구성한다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V'에 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 T_2, S_i, T_2, S_i를 연속적으로 적용한 과정은 다음과 같다. 노드 V'에 에지 발생기 T_2를 적용한 노드 $T_2(V')$의 순열은 $v_1 \Delta_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이고, 노드 $T_2(V')$에 에지 발생기 S_i를 적용한 노드 $S_i(T_2(V'))$의 순열은 $v_1 v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots \Delta_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다. 노드 $S_i(T_2(V'))$에 에지 발생기 T_2를 적용한 노드 $T_2(S_iT_2(V'))$의 순열은 $v_{(i-1)n+1} v_1 v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots \Delta_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이고, 노드 $T_2(S_iT_2(V'))$의 순열에 에지 발생기 S_i를 적용한 노드 $S_i(T_2S_iT_2(V'))$는 $v_{(i-1)n+1} \Delta_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_1 v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다.

따라서 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U로 사상하고, 노드 V에서 에지 R_i에 의해 인접한 노드 $R_i(V)$는 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U에서 4개의 노드 즉, 노드 $T_2(V')$, 노드 $S_i(T_2(V'))$, 노드 $T_2(S_iT_2(V'))$, 그리고 노드 $S_i(T_2S_iT_2(V'))$를 경유하는 경로로 사상할 수 있으므로 연장율이 4이다.

[경우 3] 에지 $E_i(2 \le i \le k)$

행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V에서 에지 E_i에 의해 인접한 노드 $E_i(V)$= 아래의 행렬과 같다.

$$\begin{bmatrix} v_{(i-1)n+1} & v_{(i-1)n+2} & \cdots & v_{(i-1)n+j} & \cdots & v_{in} \\ v_{n+1} & v_{n+2} & \cdots & v_{n+j} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{(k-1)n+1} & v_{(k-1)n+2} & \cdots & v_{(k-1)n+j} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

노드 $E_i(V)$를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 표현 형태로 변환한 $E_i(V') = \Delta_1 v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn}$

Δ_{k+1}이다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 $V' = \Delta_1 v_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$에서 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 S_i를 적용한 노드 $S_i(V')$는 노드 $E_i(V')$와 동일한 순열을 구성한다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V'에 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 에지 발생기 S_i를 적용한 과정은 다음과 같다. 노드 V'에 에지 발생기 S_i를 적용한 노드 $S_i(V')$의 순열은 $\Delta_1 v_{(i-1)n+1} v_{(i-1)n+2} \ldots v_{in} \Delta_{i+1} v_{n+1} v_{n+2} \ldots v_{2n} \Delta_3 \cdots v_1 v_2 v_3 \ldots v_n \Delta_2 \cdots v_{(k-1)n+1} v_{(k-1)n+2} \ldots v_{kn} \Delta_{k+1}$이다. 따라서 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드 V를 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U로 사상하고, 노드 V에서 에지 E_i에 의해 인접한 노드 $E_i(V)$는 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드 U에서 한 개의 노드 $S_i(V')$에 사상할 수 있으므로 연장율이 1이다.

그러므로 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$에 대한 임베딩의 연장율은 위의 경우 2에 의해 4임을 알 수 있고, 확장율은 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$의 노드수에 대한 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 노드수의 비율이므로 $(kn)!/(kn+k+1)!$이다.

따름정리3) 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$에 대한 임베딩의 평균 연장율은 3 이하이다(단, $k=l$, $k \leq n$)

증명) 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 한 노드에 연결된 $2k+n-3$개 에지에서 연장율 1을 갖는 에지는 $k-1$개이고, 연장율 3을 갖는 에지는 $n-1$개이고, 그리고 연장율 4를 갖는 에지는 $k-1$개임을 위의 정리 2에 의해 알 수 있다. 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 분지수를 q라 할 때, 전체 에지 개수는 $p=(kn)! \times q/2$이다. 따라서 평균 연장비율은 $(1 \times p \times (k-1)/q + 3 \times p \times (n-1)/q + 4 \times p \times (k-1)/q)/k$ 즉, $5k+3n-6/2k+n-3$이므로 대략 3 보다 적은 값을 갖는다.

4. 결 론

본 논문에서는 상호 연결망의 주요 성질인 노드 대칭성, 재귀적 구조, 최대 고장 허용도 등을 가지면서 스타 그래프보다 망 비용이 개선된 매크로-스타 그래프와 행렬 스타 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 매크로-스타 그래프 $MS(k,n)$은 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n+1}$에 연장율 2, 확장율 $(kn+1)!/(kn+k)!$에 임베딩 가능함을 보였고, 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$은 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$에 연장율 4, 확장율 $(kn)!/(kn+k+1)!$으로 임베딩 가능함을 보였다. 또한 위의 결과에서 행렬 스타 그래프 $MS_{k,n}$의 매크로-스타 그래프 $MS(k,n+1)$에 대한 임베딩의 평균 연장율은 3 이하임을 알 수 있었다.

매크로-스타 그래프가 행렬 스타 그래프에 연장율 2에 임베딩 되는 결과는 매크로-스타 그래프가 스타 그래프를 기본 모듈로 갖고 있으므로 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘들이 행렬 스타 그래프에서 상수 비용의 추가로 시뮬레이션 될 수 있음을 의미한다.

참 고 문 헌

[1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The Star Graph : An Attractive Alternative to the N-Cube," Proc. of the Int. Conf. Parallel Processing, pp.393-400, 1987.

[2] W-K. Chiang and R-J. Chen, "The (n,k)-Star Graph : A Generalized Star Graph," Information Processing Letters 56, pp.259-264, 1995.

[3] Z. T. Chou, C. C. Hsu, and J. P. Sheu, "Bubblesort Star Graphs : A New Interconnection Network," 9th International Parallel Processing Symposium, pp.41-48, 1996.

[4] K. Efe, "Embedding Mesh of Trees in the Hypercube," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.11, pp.222-230, 1991.

[5] A. K. Gupta and S. E. Hambrusch, "Multiple Network Embeddings into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.19, pp.73-82, 1993.

[6] F. Harary, J. P. Hayes, and H. J. Wu, "A Survey of the Theory of Hypercubes," Comput. Math. Appl., Vol.15, pp.277-289, 1988.

[7] S. Latifi, M. Moraes de Azevedo, and N. Bagherzadeh, "The Star Connected Cycles : A Fixed-Degree Network for Parallel Processing," Proc. Int. Conf. on Parallel Processing, Vol.1, pp. 91-95, Aug. 1993.

[8] S. Latifi and P. K. Srimani, "Transposition Networks as a Class of Fault-Tolerant Robust

Networks," IEEE Trans. Comput., Vol.45, No.2, pp.230-238, Feb., 1996.

[9] S. Ranka, J-C. Wang, and N. Yeh, "Embedding Meshes on the Star Graph," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.19, pp.131-135, 1993.

[10] C. H. Yeh and E. A. Varvarigos, "Macro-Star Networks : Efficient Low-Degree Alternatives to Star Graphs," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.9, No.10, pp.987-1003, October 1998.

[11] 이형옥, 행렬 연산에 기반한 상호 연결망의 설계, 전남대학교 전산학과 박사학위논문, 1999년 2월.

이 형 옥

e-mail : u9698133@chonnam.chonnam.ac.kr

1994년 순천대학교 전산학과 졸업(학사)

1996년 전남대학교 전산통계학과 졸업(석사)

1999년 전남대학교 전산통계학과 졸업(박사)

1996~1997년 순천대학교 컴퓨터교육과 조교

1997~1998년 전남대학교 및 순천대학교 시간강사

관심분야 : 알고리즘, 병렬 및 분산 처리, 그래프 이론