論 文
48A-2-8

불확실성을 갖는 비선형 시스템의 적응 제어기 설계

Design of Adaptive Regulator for a Nonlinear Uncertain System

陳胄華*·柳京卓**·孫瑛翼***·徐鎭憲§
(Juwha Jin · Kyung Tak Yu · Young-Ik Son · Jin H. Seo)

Abstract - We consider single-input nonlinear systems with unknown unmodelled time-varying parameters or disturbances which are bounded. The main goal is to identify classes of uncertain systems for which the control exist and to provide constructive design procedures. Assuming that the undisturbed nominal system (f, g) is partially state feedback linearizable, that a strict triangularity condition, a linear parametrization condition, and $\bar{f} \in G_{r-1}$ hold for the uncertain terms, and that some condition is satisfied in the transformed partially linear system, we design an adaptive regulating dynamic control. At first, we identify classes of nonlinear uncertain systems and give a systematic procedure for the design of a robust regulation for the nonlinear systems.

Key Words :Adaptive Regulator, Nonlinear Control, Uncertain System, Linear Parametrization

1. 서론

자연계에 존재하는 모든 시스템은 비선형 시스템이다. 비선형 시스템을 선형화 하지 않고 그대로 제어하기는 어려울 뿐 아니라 일반적인 제어기법조차 존재하지 않으므로 일단은 대상 시스템을 선형근사화 시킨 후에 선형시스템의 제어기법을 사용하여 비선형 시스템을 다루어 왔다. 비선형시스템이 적당한 조건을 만족할 때 근사화가 아닌 완전선형화 가능하다는 사실은 잘 알려져있다. Brockett [1]의 연구를 시작으로, 적절한 좌표변환과 상태궤환 입력을 통하여 입력과 상태에 관련한 미분방정식이 선형화 될 수 있는가에 대한 문제는 흥미로운 주제였다. 이러한 궤환선형화 가능한 시스템에 대한 필요충분 조건은 Jakubczyk 와 Respondek [2], Hunt, Su 와 Meyer [3]에 의해 각각 제시 되었다. 제어기를 설계하는데 있어서 선형시스템과 동치라는 성질은 매우 바람직한 성질이다. 왜냐하면 선형 시스템에 적용가능한 다양한 제어기법들을 선형시스템과 동치의 성질을 갖는 비선형 시스템에 직접적으로 적용할 수 있기 때문이다 하지만 이러한 선형의 특징을 이끌어내기 위해서는 비선형 항의 완벽한 소거 (exact cancellation)가 이루어져야 하므로 실제 적용하는데는 중요한 결함을 갖고 있었다. 더욱이 비선형 항중에 불확실성이나 모델링 오차를 포함하는 경우라면 더 이상 완벽한 소거라는 건 기대하기 힘들어진다. 따라서 궤환선형화 기법을 불확실성을 갖는 비선형 시스템으로 확대 적용하는 문제의 필요성이 대두되었다. Nam, Arapostathis [4], Taylor [5], Sastry, Isidori [6]와 Kanellakopoulos [7], [8]등은 미지의 파라메터가 시스템에 선형으로 나타나는 경우에 대하여 적응 궤환 선형화 기법을 제안하고 문제를 해결하였다 그러한 시스템을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{p} \bar{f}_i(x)\theta_i(t) + g(x)u \\ &= f(x) + \bar{f}^T(x)\theta(t) + g(x)u\end{aligned}$$

여기서,

$$\bar{f}(x) \triangleq [\ \bar{f}_1(x) \cdots \bar{f}_p(x)]^T$$
$$\theta(t) \triangleq [\theta_1(t) \cdots \theta_p(t)]^T$$

이고 또한 $x \in R^n$, $u \in R$, $\theta(t) \in \Omega \subset R^p$, $f, g, \bar{f}$는 $g(0) \neq 0$인 평활한 (smooth) 기지의 벡터필드, $\theta(t)$는 미지의 파라메타이다. Taylor [5]와 Kanellakopoulos [7], [8]는 공칭시스템이 전역적 궤환선형화 (globally feedback linearizable)가 가능하고 벡터필드가 특정조건, 즉 정합조건 (matching conditions)을 만족한다는 가정하에 문제를 풀었다. Taylor [5]에 의해 제안되었던 정합조건은 Kanellakopoulos [7]에 의해서 확장정합조건 (extended matching conditions)으로 더욱 완화되었다. 이러한 조건들은 Nam 와 Arapostathis [4], Sastry 와 Isidori [6]등이 가정한 유계 (boundedness), 섹터(sector), 혹은 Lipschitz 조건들과는 달리 시스템의 비선형성에 제한을 가하지 않는 잇점이 있다. Marino, Tomei [9]는 Kanellakopoulos [7]가 가정한 선형 파라메타 (linear parametrization)의 조건을 없애고 불확실한 유계의 시변 파라메타를 갖는 보다 더 일반적인 비선형 시스템에 대하여 문제를 풀었다.

* 正會員 : 서울大 電氣工學部 博士課程
** 正會員 : 서울大 電氣工學部 博士課程
*** 正會員 : 서울大 電氣工學部 博士課程
§ 正會員 : 서울大 電氣工學部 副敎授·工博
接受日字 : 1998年 9月 11日
最終完了 : 1999年 1月 12日

그러나 앞선 연구들의 경우에는 모두 공칭 시스템이 완전 선형화가 가능한 시스템에 대해서 문제를 풀었으나 실제로는 부분적으로만 선형화가 가능한 시스템이 보다 일반적인 경우라고 볼 수 있다. 따라서 본 논문에서는 이러한 부분 선형화가 가능한 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 문제를 다룬다.

먼저 2절에서 논문의 전개에 필요한 정의와 기존의 결과, 대상 시스템을 기술하고, 3절에서는 제어기가 존재할 불확실성을 갖는 비선형 시스템의 클래스가 제시되며 적응 제어기를 얻어내는 과정이 순차적임을 알 수 있게 된다. 4절에서 부속정리와 정리 3.1 의 증명 과정을 통하여 구체적인 제어기의 값을 얻어내고 마지막으로 5절에서 논문의 결과를 요약하였다.

미분기하학에 관련된 알려진 정의와 결과들은 Isidori[10], Marino, Tomei[11]에서 찾아볼 수 있다.

2. 정의와 필요한 결과들

먼저 논문의 전개에 필요한 정의와 보조정리를 기술한다.

***정의* 2.1** f, g가 R^n 상의 평활한 벡터필드일 때 f와 g의 Lie Bracket을 $ad_f g$로 표기하고 그 정의는 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$ad_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g,$$

$$ad_f^{i+1} g = ad_f(ad_f^i g), \quad i = 1, 2, \cdots$$

다음의 단일한 입력을 갖는 비선형 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{l=1}^{p} \bar{f}_l(x)\theta_l(t) + g(x)u \\ &= f(x) + \bar{f}^T(x)\theta(t) + g(x)u\end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R$, $\theta \in \Omega \subset R^p$, f, g와 $\bar{f}$는 평활한 벡터필드이고 $g(0) \neq 0$이며, $\theta(t)$는 미지의 옹골집합(compact set) $\Omega \subset R^p$에 속하는 미지의 평활한 시변 파라메타이다. 시스템은 $\theta(t)$에 무관한 독립된 평형점을 갖는다. (일반적으로 원점을 평형점이라고 생각할 수 있다.)

***보조정리* 2.2** [11] 시스템(2.1)이 원점의 주위 U_o에서 .

(i) $G_i = span\{g, \cdots, ad_f^i g\}$, $0 \le i \le r-1$ 대합적(involuve)이고 계수(rank)가 상수이다.

(ii) $\bar{f} \in G_{r-1}$,

(iii) 완전 삼각 정합조건(the strict triangularity assumption) $ad_{\bar{f}} G_i \subset G_i$, $0 \le i \le r-2$

조건들을 만족한다면 시스템 (2.1)은 지엽적(locally)으로 (2.2)와 동치이다.

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1), \quad \xi \in R^{n-r} \\ \dot{z}_j &= z_{j+1} + \sum_{l=1}^{p} \phi_{jl}(\xi, z_1, \cdots, z_j)\theta_l(t), \quad 1 \le j \le r-1 \\ \dot{z}_r &= \nu + \sum_{l=1}^{p} \phi_{rl}(\xi, z_1, \cdots, z_r)\theta_l(t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

여기서, $\varphi(0,0) = 0$, $\phi_{jl}(0,0) = 0$, $1 \le j \le r$, $1 \le l \le p$ 이다. 논문에서 관심을 갖는 시스템은 *보조정리* 2.2에 의해서 변환된 시스템 (2.2)이다.

***보조정리* 2.3** (Barbalat의 정리) If $\varphi(t)$가 $t \ge t_o$, $t_o \in R^+$에서 항상 연속인 실함수이고, t가 무한대로 갈 때 $\int_{t_o}^{t} \phi(\tau)d\tau$의 극한이 존재하고 유한한 값을 가지면, 식 (2.3)이 만족된다.

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0 \tag{2.3}$$

3. 적응제어기가 존재할 시스템

2절에서 정의한 대상 시스템 (2.2)에 대하여 적응 제어기가 존재할 불확실성을 가진 비선형 시스템의 클래스를 정의한다.

***정리* 3.1** 정의한 대상시스템 (2.2)에 대해서 평활한 함수

$$\nu_0 = \nu_0(\xi), \quad \nu_0(0) = 0$$

가 존재하고 임의 양수 x 에 대하여

$$\langle dV_0(\xi), \varphi(\xi, \nu_0(\xi)) \rangle \le -x^2 \|\xi\|^2 \tag{3.1}$$

을 만족하는 방사적으로 무한한 (radially unbounded) 양정의(positive definite)함수 $V_0(\xi)$가 존재한다면, 적응 궤환제어기를 설계할 수 있다.

다음의 *부속정리*를 통하여 적응제어기가 시스템의 차수를 순차적으로(즉, $n-r+1$ 차부터 n차까지) 늘려가며 구하여는 것임을 알 수 있게 된다.

부속정리 다음의 $(n-r+i)$ 차의 시스템식

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \varphi(\xi, z_1), \quad \xi \in R^{n-r} \\ \dot{z}_j &= z_{j+1} + \sum_{l=1}^{p} \phi_{jl}(\xi, z_1, \cdots, z_j)\theta_l(t), \quad 1 \le j \le i-1 \\ \dot{z}_i &= \nu + \sum_{l=1}^{p} \phi_{il}(\xi, z_1, \cdots, z_i)\theta_l(t)\end{aligned}$$

과 그에대한 리아프노프 함수를 정의한다.

$$V_i = V_o + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i} (\tilde{z}_j^2 + \tilde{\mu}_j^2)$$

여기서, $\tilde{\mu}_j = \mu_j - \hat{\mu}_j$이다. 리아프노프 함수의 시간 도함가 $k_j \ge x^2$, $1 \le j \le i$ 에 대하여 부등식

$$\dot{V}_i \le \langle dV_o(\xi), \varphi(\xi, \nu_o(\xi)) \rangle + \frac{i}{r+1} x^2 \|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^{i} \left(k_j - \frac{i-j}{r+1} x^2\right) \tilde{z}_j^2$$

을 만족하도록 하는 동적 변환식

$$\begin{aligned}\tilde{z}_j &= z_j - \nu_{j-1}(Y_{j-1}, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}), \quad 1 \le j \le i \\ \hat{\mu}_j &= \eta_j(Y_j, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}), \quad 1 \le j \le i-1 \\ \nu_{j-1}&(0, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}) = 0, \quad 1 \le j \le i \\ \eta_j&(0, \hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_{j-1}) = 0, \quad 1 \le j \le i-1 \\ Y_j &= [\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}, z_1, \cdots, z_j]^T\end{aligned}$$

과 제어입력

$$\hat{\mu}_i = \eta_i(Y_i,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{i-1})$$
$$\nu = \nu_i(Y_i,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_i)$$
$$\eta_i(0,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{i-1}) = 0$$
$$\nu_i(0,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_i) = 0$$

이 존재한다고 가정할 때, 시스템의 차수를 하나 늘린 다음의 시스템

$$\dot{\xi} = \varphi(\xi, z_1),\ \xi \in R^{n-r}$$
$$\dot{z}_j = z_{j+1} + \sum_{l=1}^{p} \phi_{jl}(\xi, z_1, \cdots, z_j)\theta_l(t),\ 1 \le j \le i$$
$$\dot{z}_{i+1} = \nu + \sum_{l=1}^{p} \phi_{i+1,l}(\xi, z_1, \cdots, z_{i+1})\theta_l(t)$$

에 대한 리아프노프 함수는

$$V_{i+1} = V_o + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i+1}(\ \tilde{z}_j^2 +\ \tilde{\mu}_j^2)$$
$$= V_i + \frac{1}{2}(\ \tilde{z}_{i+1}^2 +\ \tilde{\mu}_{i+1}^2)$$

로 정의되고, 리아프노프 함수의 시간 도함수가 $k_{i+1} \ge x^2$ 에 대하여 부등식

$$\dot{V}_{i+1} \le \langle dV_o(\xi), \varphi(\xi, \nu_o(\xi)) \rangle + \frac{i+1}{r+1}x^2\|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^{i+1}(k_j - \frac{i+1-j}{r+1}x^2)\ \tilde{z}_j^2$$

을 만족하도록 하는 동적 변환식

$$\tilde{z}_j = z_j - \nu_{j-1}(Y_{j-1},\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{j-1}),\ 1 \le j \le i+1$$
$$\hat{\mu}_j = \eta_j(Y_j,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{j-1}),\ 1 \le j \le i$$
$$\nu_{j-1}(0,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{j-1}) = 0,\ 1 \le j \le i+1$$
$$\eta_j(0,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{j-1}) = 0,\ 1 \le j \le i$$
$$Y_j = [\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}, z_1, \cdots, z_j]^T$$

과 제어입력

$$\hat{\mu}_{i+1} = \eta_{i+1}(Y_{i+1},\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_i)$$
$$\nu = \nu_{i+1}(Y_{i+1},\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{i+1})$$
$$\eta_{i+1}(0,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_i) = 0$$
$$\nu_{i+1}(0,\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_{i+1}) = 0$$

이 존재한다.

***첨언* 3.2** 조건 (3.1)은 대상 시스템이 지수적으로 안정화시킬 수 있는 (exponentially stabilizable) 영동특성 (zero dynamics)을 갖는다는 것을 의미한다. 만일 시스템의 영동특성이 지수적이 아닌 단순히 안정적이기만 한다면 θ로 인한 불확실성을 해결할 수 없게 된다.

***첨언* 3.3** 만일 Ω가 기지의 옹골집합이라면 본 논문에서 구성한 동적인 적응 제어 조정기 대신 정적인 강인 제어기 (static robust regulator)를 구성할 수 있다.([13], [14]) 또한 θ가 상수라면 보다 간결한 자가 튜닝 조정기 (self tuning regulator)를 구성할 수 있다.([15])

4. 정리의 증명

귀납적인 증명과정을 거쳐, 부속정리 및 정리 3.1의 증명을 한다.

부속정리의 증명 다음의 양정의 함수

$$\overline{V}_{i+1} = V_i + \frac{1}{2}\tilde{z}_{i+1}^2$$

의 시간 도함수를 구한다.

$$\dot{\overline{V}}_{i+1} = \dot{V}_i + \tilde{z}_{i+1}(\ \tilde{z}_i + \dot{\tilde{z}}_{i+1})$$

여기서 $\dot{\tilde{z}}_{i+1}$ 는

$$\dot{\tilde{z}}_{i+1} = \nu + \sum_{l=1}^{p}\phi_{i+1,l}(\xi, Z_{i+1})\theta_l(t) - \dot{\nu}_i(Y_i,\ \hat{M}_i)$$
$$= \nu + \sum_{l=1}^{p}\phi_{i+1,l}(\xi, Z_{i+1})\theta_l(t) - \frac{\partial \nu_i}{\partial \xi}\dot{\xi} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \nu_i}{\partial z_j}\left(z_{j+1} + \sum_{l=1}^{p}\phi_{jl}(\xi, Z_j)\theta_l(t)\right) - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \nu_i}{\partial \hat{\mu}_j}\eta_j(Y_j,\ \hat{M}_{j-1})$$

이고

$$\hat{M}_i \triangleq [\ \hat{\mu}_1, \cdots,\ \hat{\mu}_i]^T$$
$$Z_{i+1} \triangleq [z_1, \cdots, z_{i+1}]^T$$

로 정의한다. $\Phi_{j,l}(0,0) = 0,\ j = 1, \cdots, i+1$ 이고 그 모든 가 평활하므로 다음의 관계를 만족한다. [12]

$$\sum_{l=1}^{p}[\phi_{i+1,l}(\xi, Z_{i+1}) - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \nu_i}{\partial z_j}\phi_{jl}(\xi, Z_j)]\theta_l$$
$$\triangleq \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{n-r+i+1} y_j \Phi_{i+1,jl}(Y_{i+1},\ \hat{M}_i)\theta_l$$
$$\triangleq \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{n-r+i+1}\tilde{y}_j\ \tilde{\Phi}_{i+1,jl}(\ \tilde{Y}_{i+1},\ \hat{M}_i)\theta_l$$

여기서, $\tilde{Y}_{i+1} = [\ \tilde{y}_1 \cdots \tilde{y}_{n-r}\ \tilde{y}_{n-r+1} \cdots \tilde{y}_{n-r+i+1}]^T \triangleq [\xi^T,\ \tilde{z}_1 \cdots \tilde{z}_{i+1}]^T$ 이다. Ω가 옹골집합(미지의 옹골집합)이므로 미지의 적당한 상수 μ_{i+1} 에 대하여

$$\left|\sum_{l=1}^{p}\tilde{\Phi}_{i+1,jl}(\ \tilde{Y}_{i+1},\ \hat{M}_i)\theta_l\right| \le \frac{\sqrt{\mu_{i+1}}}{n-r+i+1}\alpha_{i+1}(\ \tilde{Y}_{i+1},\ \hat{M}_i)$$

를 만족하는 $\alpha_{i+1}(\ \tilde{Y}_{i+1},\ \hat{M}_i),\ 1 \le j \le n-r+i+1$ 이 하므로 제어입력을

$$\nu = \nu_{i+1}(Y_{i+1},\ \hat{M}_{i+1})$$
$$= -\tilde{z}_i - k_{i+1}\tilde{z}_{i+1} + \frac{\partial \nu_i}{\partial \xi}\dot{\xi} + \sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\partial \nu_i}{\partial z_j}z_{j+1} + \frac{\partial \nu_i}{\partial \hat{\mu}_j}\eta_j(Y_j,\ \hat{M}_{j-1})\right) - \frac{r+1}{4x^2}\alpha_{i+1}^2\hat{\mu}_{i+1}\tilde{z}_{i+1} - \frac{x^2}{r+1}\tilde{z}_{i+1}$$

로 정의하면 $\dot{\overline{V}}_{i+1}$ 는 다음의 부등식을 만족한다.

$$\dot{\overline{V}}_{i+1} \le \langle dV_o(\xi), \varphi(\xi, \nu_o(\xi)) \rangle$$

$$+\frac{r+1}{4x^2}\alpha_{i+1}^2\tilde{\mu}_{i+1}\tilde{z}_{i+1}^2+\frac{i+1}{r+1}x^2\|\xi\|^2$$
$$-\sum_{j=1}^{i+1}\left(k_j-\frac{i+1-j}{r+1}x^2\right)\tilde{z}_j^2$$

따라서

$$k_{i+1}\geq x^2$$
$$\hat{\mu}_{i+1}=\frac{r+1}{4x^2}\alpha_{i+1}^2(\tilde{Y}_{i+1},\hat{M}_i)\tilde{z}_{i+1}^2$$
$$\triangleq \eta_{i+1}(Y_{i+1},\hat{M}_i)$$

로 정의할 때 $(n-r+i+1)$차 시스템의 리아프노프 함 $V_{i+1}=\overline{V}_{i+1}+\frac{1}{2}\tilde{\mu}_{i+1}^2$ 의 시간 도함수는

$$\dot{V}_{i+1}\leq\langle dV_0(\xi),\varphi(\xi,\nu_0(\xi))\rangle+\frac{i+1}{r+1}x^2\|\xi\|^2$$
$$-\sum_{j=1}^{i+1}(k_j-\frac{i+1-j}{r+1}x^2)\tilde{z}_j^2$$

을 만족하므로 부속정리가 증명된다.

정리 3.1의 증명 $j=1$인 경우에 대하여 즉, $z_2=\nu$로 보고 다음의 $n-r+1$차 시스템에 대하여 증명을 한다.

$$\dot{\xi}=\varphi(\xi,z_1),\ \xi\in R^{n-r}$$
$$\dot{z}_1=\nu+\sum_{l=1}^{p}\phi_{1l}(\xi,z_1)\theta_l(t)$$
$$=\nu+\phi_1^T(\xi,z_1)\theta(t)$$

$\phi_1(0,0)=0$인 이 시스템을 새로운 좌표계

$$\xi=\xi$$
$$\tilde{z}_1=z_1-\nu_0(\xi)$$

에 대하여 표현하면,

$$\dot{\xi}=\varphi(\xi,\tilde{z}_1+\nu_0(\xi))\triangleq\psi(\xi,\tilde{z}_1)$$
$$\dot{\tilde{z}}_1=\nu+\phi_1^T(\xi,z_1)\theta(t)-\frac{\partial\nu_0(\xi)}{\partial\xi}\varphi(\xi,z_1)\qquad(4.1)$$
$$=\nu+\sum_{l=1}^{p}\phi_{1l}(\xi,z_1)\theta_l(t)-\frac{\partial\nu_0(\xi)}{\partial\xi}\varphi(\xi,z_1)$$

을 얻는다. ψ의 각 성분들이 평활한 함수이기 때문에, 다음과 같이 표현될 수 있다.[12]

$$\psi(\xi,(\xi,\tilde{z}_1))=\varphi(\xi,\nu_0(\xi))+\tilde{z}_1\tilde{\psi}(\xi,\tilde{z}_1)$$

ϕ_{1l}가 평활하고 $\phi_{1l}(0,0)=0$ 이므로 다음처럼 정의할 수 있다.

$$\phi_{1l}(\xi,z_1)=\phi_{1l}(\xi,\tilde{z}_1+\nu_0(\xi))\qquad(4.2)$$
$$\triangleq\sum_{j=1}^{n-r+1}\tilde{y}_j\,\Phi_{1jl}(\tilde{Y}_1)$$

여기서 $\tilde{Y}_{i+1}=[\tilde{y}_1\cdots\tilde{y}_{n-r}\ \tilde{y}_{n-r+1}]^T\triangleq[\xi^T\ \tilde{z}_1]^T$이다.

Ω는 미지이기는 하지만 옹골집합 (compact set) 임을 가정했으므로, μ_1이라는 미지의 적당한 상수를 도입하면 다음을 만족하는 $\alpha_1(\tilde{Y}_1)$을 찾아낼 수 있다.

$$\left|\sum_{l=1}^{p}\Phi_{1jl}(\tilde{Y}_1)\theta_l(t)\right|\leq\frac{\sqrt{\mu_1}}{n-r+1}\alpha_1(\tilde{Y}_1),$$
$$j=1,\cdots,n-r+1$$

다음의 양정의 함수식 $\overline{V}_1=V_0(\xi)+\frac{1}{2}\tilde{z}_1^2$을 정의하고 (4.1), (4.2)의 관계를 사용하여 시간 도함수를 구해보면,

$$\dot{\overline{V}}_1\leq\langle dV_0,\varphi(\xi,\nu_0(\xi))\rangle+\tilde{z}_1\langle dV_0,\tilde{\psi}(\xi,\tilde{z}_1)\rangle$$
$$+\frac{x^2}{r+1}\|\tilde{Y}_1\|^2+\frac{r+1}{4x^2}\mu_1\alpha_1^2(\tilde{Y}_1)\tilde{z}_1^2$$
$$+\tilde{z}_1(\nu-\frac{\partial\nu_0(\xi)}{\partial\xi}\varphi(\xi,z_1))$$

이 된다. $k_1\geq x^2$에 대해서 ν와 $\hat{\mu}_1$를 다음과 같이 정의하면,

$$\nu=-\langle dV_0,\tilde{\psi}(\xi,\tilde{z}_1)\rangle+\frac{\partial\nu_0(\xi)}{\partial\xi}\varphi(\xi,z_1)-\frac{x^2}{r+1}\tilde{z}_1$$
$$-\frac{r+1}{4x^2}\alpha_1^2(\tilde{Y}_1)\hat{\mu}_1\tilde{z}_1-k_1\tilde{z}_1$$
$$\hat{\mu}_1=\frac{r+1}{4x^2}\alpha_1^2(\tilde{Y}_1)\tilde{z}_1^2$$

$\dot{\overline{V}}_1$는 다음의 부등식을 만족하게 된다.

$$\dot{\overline{V}}_1\leq\langle dV_0,\varphi(\xi,\nu_0(\xi))\rangle-k_1\tilde{z}_1^2+\frac{x^2}{r+1}\|\xi\|^2$$
$$+\frac{r+1}{4x^2}\alpha_1^2(\tilde{Y}_1)\tilde{z}_1^2\tilde{\mu}_1$$

여기서, $\tilde{\mu}_1=\mu_1-\hat{\mu}_1$이다. 이때 리아프노프 함수

$$V_1=\overline{V}_1+\frac{1}{2}\tilde{\mu}_1^2$$

을 정의하고 그 시간 도함수를 구해보면,

$$\dot{V}_1=\dot{\overline{V}}_1+\tilde{\mu}_1\dot{\tilde{\mu}}_1$$
$$=\dot{\overline{V}}_1-\frac{r+1}{4x^2}\alpha_1^2\tilde{z}_1^2\tilde{\mu}_1$$
$$\leq\langle dV_0,\varphi(\xi,\nu_0(\xi))\rangle-k_1\tilde{z}_1^2+\frac{x^2}{r+1}\|\xi\|^2$$
$$\leq 0$$

이 된다. 따라서, $\|\xi(t)\|$, $\|\tilde{z}_1(t)\|$, $\|\tilde{\mu}_1(t)\|$ 이 모두 유한(bounded)하게 되고 이에 의해 z_1과 ν_1 또한 유한하게 되므로 식 (3.2)에 의해 $\dot{z}_1$와 $\dot{\xi}(t)$의 유한함이 증명된다. 한편으로

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\dot{V}_1(\tau)d\tau=\lim_{t\to\infty}V_1(t)-V_1(0)<\infty$$

이 만족되므로 보조정리 2.2 에 의해

$$\lim_{t\to\infty}\|\xi(t)\|=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\|z_1(t)\|=0$$

이 만족되고 따라서 최종적으로

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$$

이 증명된다. $\tilde{z}=[\tilde{z}_1,\cdots,\tilde{z}_r]^T$, $\tilde{\mu}=[\tilde{\mu}_1,\cdots,\tilde{\mu}_r]^T$로 정의하고 부속정리를 $(r-1)$번 귀납적으로 적용하면, 전체 시스템 (2.2)에 대한 리아프노프 함수

$$V_r=\overline{V}_r+\frac{1}{2}\tilde{\mu}_r^2$$

$$= V_0 + \frac{1}{2}\tilde{z}^T\tilde{z} + \tilde{\mu}^T\tilde{\mu}$$

의 시간 도함수가, $k_r \geq x^2$에 대하여 음정의 함수가 되도록 하는 즉,

$$\dot{V}_r \leq \langle dV_0(\xi), \varphi(\xi, \nu_0(\xi)) \rangle + \frac{r}{r+1}x^2\|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^{r}\left(k_j - \frac{r-j}{r+1}x^2\right)\tilde{z}_j^2 \leq 0$$

을 만족하는 동적 궤환 제어 입력

$$\nu = \nu_r(Y_r, \hat{M}_r)$$

을 구할 수 있게 된다.

따라서 $\|\xi(t)\|$, $\|\tilde{z}(t)\|$, $\|\tilde{\mu}(t)\|$이 모두 유계이고, $\nu(t)$ 또한 유계이다. 시스템 식 (2.2)에 의해 $\|\dot{\xi}(t)\|$, $\|\dot{z}(t)\|$가 유계이고 따라서, $\|\dot{\tilde{z}}(t)\|$도 유계가 된다. 게다가 $\dot{V}_r$가 음정의 함수인 성질에 의해 V_r이 유계임이 증명되므로 보조정리 2.3은

$$\lim_{t\to\infty}\|\tilde{z}(t)\| = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\|\xi(t)\| = 0$$

을 의미하게 되고 따라서

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$$

이므로, 시스템을 평형점(이 경우 원점)으로 안정화시키는 적응제어입력을 구성할 수 있음을 증명하였다.

5. 결론

비선형 궤환 선형화 기법은 비선형 시스템을 다루는데 있어서 매우 유용한 방법임은 틀림이 없다. 하지만 모든 시스템에 내재한 불확실성을 처리하며 제어기를 구성하기는 힘들다. 그러나 정리 3.1과 부속정리의 증명에서 보인 순차적인 설계과정에 의해 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 적응제어기를 구성할 수 있다. 이 기법을 적용할 수 있는 비선형 시스템 (2.1)의 클래스를 정의하면 다음처럼 정리 할 수 있다.

(i) θ가 시스템식에서 선형계수로 나타나고 미지의 옹골집합에 속한다.

(ii) $G_i = span\{g, \cdots, ad_{\bar{f}}^i g\}$, $0 \leq i \leq r-1$가 대합적이고 계수(rank)가 상수이다

(iii) $\bar{f} \in G_{r-1}$.

(iv) 완전 삼각 정합조건

$$ad_{\bar{f}}G_i \subset G_i, \quad 0 \leq i \leq r-2$$

(v) 시스템이 지수적으로 안정화 가능한 영동특성을 갖는다.

본 연구는 서울대학교 제어계측 신기술 연구소가 지원하는 지능제조 시스템 연구프로젝트의 일부로 수행되었음. (과제번호 :96k3-0803-05-05-02-3)

참고문헌

[1] R. W. Brockett, "Feedback invariants for nonlinear systems", in Proc. IFAC World Congress, Helsinki, pp. 1115-1120, 1978.

[2] B. Jakubczyk and W. Respondek, "On linearization of control systems", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math*, vol. 28, pp. 517-522, 1980.

[3] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Design for multi-input nonlinear systems", in *Differential Geometric Control Theory*, R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. Sussmann, Eds. Boston:Brikhauser, pp. 268-298, 1983.

[4] K. Nam, and A. Arapostathis, "A model reference adaptive control scheme for pure-feedback nonlinear systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*, AC-33, pp. 803-811, 1988.

[5] D. Taylor, P. V. Kokotovic, R. Marino, and I. Kanellakopoulos, "Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodelled dynamics", *IEEE Trans. Automat. Contr*, AC-34, pp. 405-412, 1989.

[6] S. S. Sastry and A. Isidori, "Adaptive control of linearizable systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*, AC-34, pp. 1123-1131, 1989.

[7] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and R. Marino, "An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control", *Automatica*, 27, pp. 247-255, 1991.

[8] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*, AC-36, pp. 1241-1253, 1991.

[9] R. Marino and P. Tomei, "Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems", *Automatica*, 29, pp. 181-189, 1993.

[10] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[11] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design*, Prentice-Hall, 1995.

[12] H. Nijmeijer, and A. van der Schaft *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, *Berlin*, 1990, pp. 39-40.

[13] J. Jin, N. H. Jo, S. Joo, and J. H. Seo, "Robust regulator of partially feedback linearizable uncertain nonlinear system", in *Proc. European Control Conference*, Brussels,1997. 7.

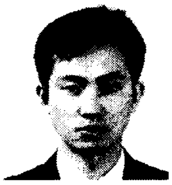
[14] 진주화, 노대종,서진헌, "부분적 선형화 가능한 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 강인한 조정기", 전기학회 논문지 제 46권 11호, pp. 1634-1638, 1997.

[15] J. Jin, S. H. Lee, S. Joo, and J. H. Seo, "Self tuning regulator of partially feedback linearizable uncertain nonlinear systems", in *Proc.* Asian Control Conference, Seoul, pp. 703-706 (III), 1997. 7.

저 자 소 개

진주화 (陳 胄 華)

1966년 7월 20일생. 1989년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1991년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학부 박사과정



유 경 탁 (柳 京 卓)

1971년 7월 25일생. 1994년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1996년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동대학원 전기공학부 박사과정.

손 영 익(孫 瑛 翼)

1969년 3월 11일생. 1995년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1997년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학부 박사과정.

서 진 헌(徐 鎭 憲)

1952년 11월 30일생. 1978년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1985년 미국 U.C.L.A. 전기공학과 졸업(박사). 1985년 미국 Texas Tech Univ. 조교수. 현재 서울대 공대 전기공학부 부교수.