

부정 내적 공간에서의 H^∞ 필터의 일반화를 통한 분산 H^∞ 필터의 설계

論 文
48A-6-11

Design of Decentralized H^∞ Filter using the Generalization of H^∞ Filter in Indefinite Inner Product Spaces

金 旻 權* · 陳 承 熙** · 尹 泰 星*** · 朴 珍 培§
(Kyung-Kuen Kim · Seung-Hee Jin · Tae-Sung Yoon · Jin-Bae Park)

Abstract - We design the robust and inherently fault tolerant decentralized H^∞ filter for the multisensor state estimation problem when there are insufficient priori informations on the statistical properties of external disturbances. For developing the proposed algorithm, an alternative form of suboptimal H^∞ filter equations are formulated by applying an alternative form of Kalman filter equations to the indefinite inner product space state model of suboptimal H^∞ filtering problems. The decentralized H^∞ filter that consists of local and central fusion filters can be designed efficiently using the proposed alternative H^∞ filter gain equations. The proposed decentralized H^∞ filter is robust against unknown external disturbances since it bounds the maximum energy gain from the external disturbances to the estimation errors under the prescribed level γ^2 in both local and central fusion filters and is also fault tolerant due to its inherent redundancy. In addition, the central fusion equations between the global and local data can reduce the unnecessary calculation burden effectively. Computer simulations are made to certify the robustness and fault tolerance of the proposed algorithm.

Key Words : Decentralized filtering, Suboptimal H^∞ filter, Multisensor data fusion, Robustness, Fault tolerance

1. 서 론

상태 추정 문제에 있어서 최적 추정자인 집중화된 칼만 필터링 알고리즘 (centralized Kalman filtering algorithm)은 전역적으로 최적의 해를 제공한다[1-3]. 하지만 비행기, 자동차, 이동 로봇 등의 항법 장치와 같은 통합 다중 센서 시스템에서의 상태 추정 문제의 경우 시스템의 상태 변수가 많아진다. 따라서 데이터 처리 효율의 저하, 계산 속도의 증가 등의 문제가 발생하게 되어 실시간 처리 문제에 적합하지 않으며 또한 하나의 단일한 시스템을 통하여 데이터를 처리하기 때문에 고장에 강인하지 못하다. 이러한 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제를 해결하기 위하여 근래에는 분산 필터링 (decentralized filtering) 기법에 관한 연구가 많이 진행되고 있다[4-5]. 분산 필터링에 있어 가장 중요한 문제는 전역적 및 지역적으로 최적의 해를 제공할 수 있는 효율적인 병렬 처리 알고리즘의 개발이다. Speyer[6], Willsky[7], Hassimi-

pour[8] 등이 전역 추정치를 각각의 지역 추정치의 선형 합으로 나타낼 수 있는 기법에 대한 연구를 주로 다루었다. 비행 항법 시스템의 문제에 있어 Kerr는 처음으로 분산 필터링의 개념을 도입하였다[5]. Brumback은 통계적 결정 방법을 이용하여 센서의 고장에 강인한 실용적인 다중센서 항법 시스템을 제안하였다[4]. 또한 Rao는 부정확한 정보에 대한 결정 방법을 응용하여 움직이는 표적에 대하여 분산 상태 추정 기법을 이용한 감시 시스템을 제안하였다[9].

이러한 분산 필터링 기법은 자체적인 병렬 구조에 의하여 고장에 강인하며 각각의 지역 센서에서의 데이터를 지역 필터에서의 필터링 과정을 거친 후 중앙의 필터로 전송하기 때문에 정보의 전송에 있어서 대역폭을 줄일 수 있어 실시간 상태 추정 문제에 적합하다[2]. 하지만 일반적인 칼만 필터에 기반을 두고 있는 기존의 분산 상태 필터링 기법은 시스템에 대한 사전 정보가 불확실한 경우, 즉 시스템의 외부 잡음의 통계적 특성에 대한 정보가 불분명하거나 시스템 모델링에 있어 오차가 있는 경우 추정 오차가 크게 생길 수 있다 [10-11]. 최근에 들어서는 자율 이동 로봇 등의 항법 장치에서의 분산 상태 추정 기법에 있어 이러한 문제에 대응하기 위하여 강인성에 대한 요구가 증가하고 있으며 [12] 또한 Mintz 는 외부 잡음의 공분산 변화를 고려한 강인한 데이터 융합에 대한 방법론을 제시하고 있다[13-15].

본 논문에서는 외부 잡음에 대한 통계적 특성이 불분명한 가운데 실시간 문제 및 고장에 강인한 다중 센서 상황에서의

* 準 會 員 : 國防科學研究所 研究員

** 正 會 員 : 延世大 大學院 電氣工學科 博士課程

*** 正 會 員 : 昌原大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博

§ 正 會 員 : 延世大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博

接受日字 : 1998年 5月 11日

最終完了 : 1999年 5月 6日

상태 추정 문제를 위하여 분산 H^∞ 필터를 설계한다. 기존의 분산 필터링 기법에서의 각각의 지역 필터 및 중앙의 융합 필터가 l_2 놈의 관점에서 최적인데 비하여 제안하는 분산 H^∞ 필터는 각각의 지역 및 중앙 융합 필터가 H^∞ 관점에서 준최적이다. 또한 이러한 분산 H^∞ 필터링 문제에서는 외란 신호의 통계적 특성에 대한 가정을 필요로 하지 않는다. 따라서 제안된 알고리즘은 기존의 칼만 필터에 기반한 분산 필터링 기법에 비하여 외란에 대해 강인한 성능을 보인다. 분산 H^∞ 필터를 개발하기 위하여 본 논문에서는 준최적 H^∞ 필터 문제가 2 가지의 제한 조건을 만족하는 가운데 특정한 스칼라 이차 함수의 최소화를 통한 부정 내적 공간 (indefinite inner product spaces) 상에서의 일반적 칼만 필터 문제임을 보인 Hassibi 의 연구[16-17]를 도입한다. 이를 이용하여 본 논문에서는 변형된 칼만 필터 방정식 (alternative form of Kalman filter) [1]을 부정 내적 공간에서 정의되는 준최적 H^∞ 필터 방정식에 적용하여 변형된 형태의 준최적 H^∞ 필터 방정식 (alternative form of sub-optimal H^∞ filter) 을 제안한다. 또한 이를 이용하여 지역 및 중앙 융합 필터의 상태 추정치 및 Riccati 방정식의 해 사이의 효율적인 시간 갱신 방정식으로 구성되는 분산 H^∞ 필터를 설계한다. 제안된 알고리즘은 본래적으로 병렬 구조를 가지고 있기 때문에 고장에 강인한 특성을 가지게 된다. 따라서 여분(redundant)의 센서 시스템에 고장이 있는 경우 완전한 성능 하강 효과를 기대할 수 있게 된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 Hassibi 의 연구에 대한 간단한 설명을 하며 주요 결과들인 변형된 형태의 준최적 H^∞ 필터 방정식 및 분산 H^∞ 필터링 알고리즘은 각각 3, 4장에 서술된다. 5장에서는 제안된 기법의 강인성 및 고장 내구성을 검증하기 위한 수치적 시뮬레이션을 제시한다.

2. 부정 내적 공간에서의 H^∞ 필터링 기법

Hassibi는 준최적 H^∞ 필터링 문제가 2 가지의 존재 조건을 만족하는 가운데 일반적 벡터 공간상에서의 특정한 스칼라 이차 함수 (scalar quadratic function)의 최소화 문제이며, 또한 projection을 통하여 이와 동일한 해를 가지는 부정 내적 공간상에서 정의되는 error Gramian 행렬의 정지점 (stationary point)을 순환적으로 찾아주는 부정 내적 공간상에서 정의되는 칼만 필터의 한 가지 특수한 형태임을 보이고 있다[16-17]. 본 장에서는 이에 대하여 간략하게 설명한다. 자세한 내용은 [16-17]을 참조하기 바란다.

2.1 부정 내적 공간의 정의

우선 K 를 복소 공간 C 상에서의 선형 공간이라고 정의하자.

정의 1. K 에서의 내적 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 은 다음과 같은 조건을 만족하면서 $K \times K$ 상에서 정의되는 mapping 이다[18].

- a. $\langle ax + y, z \rangle = a \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- b. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$, 여기서 * 는 conjugate transpose를 나타낸다.

정의 2. K 의 요소 x 는 다음과 같이 정의된다.[18]

- a. $\langle x, x \rangle > 0$ 이면 positive
- b. $\langle x, x \rangle < 0$ 이면 negative
- c. $\langle x, x \rangle = 0$ 이면 neutral

즉, 집합 $\{x, \langle x, x \rangle = 0\}$ 은 내적으로 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 를 가지는 공간 K 에서 neutral 집합으로 정의되고, $\{x, \langle x, x \rangle > 0\}$ 은 K 의 positive 집합으로, 또한 $\{x, \langle x, x \rangle < 0\}$ 은 K 의 negative 집합으로 정의된다.

정의 3. 내적으로서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 가 정의된 C 상에서의 선형 공간 K 가 positive와 negative 요소를 가지고 있으면 그 선형 공간은 부정 내적 공간[18]으로 정의된다.

이와 같은 부정 내적 공간은 Hilbert 공간과는 달리 $x \neq 0$ 이라도 $\langle x, x \rangle = 0$ 이 될 수 있으며 따라서 Hilbert 공간의 중요한 특성인 직교성(orthogonality)등이 다르게 정의된다[16][18].

2.2 준최적 H^∞ 필터링 문제

우선 다음과 같은 일반적 시변 상태 방정식을 고려한다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i & , x_0 \\ y_i = H_i x_i + v_i & , 0 \leq i < \infty \end{cases} \quad (1)$$

여기에서 F_i, G_i, H_i 는 알려진 행렬이며 초기치 x_0 , 공정 잡음 $\{u_i\}$ 및 관측 잡음 $\{v_i\}$ 은 통계적 특성을 모르는 l_2 신호로 가정한다. 일반적인 H^∞ 필터링 문제에서 상태 벡터의 임의의 선형 결합 $z_i = L_i x_i$ 를 추정하려고 할 때 필터링 에러는 다음과 같이 정의된다.

$$e_{f,i} = \tilde{z}_{i,i} - L_i x_i \quad (2)$$

여기에서 $\tilde{z}_{i,i} = F(y_0, \dots, y_i)$ 로서 시간 인덱스 0 으로부터 i 까지의 관측치 $\{y_i\}$ 로부터의 추정치이며 F 는 추정 기법이다. 이러한 경우 준최적 H^∞ 필터링 문제는 다음과 같다.

문제 1. (준최적 H^∞ 상태 추정 문제) 스칼라 $\gamma > 0$ 및 최종시간 i 가 주어진 경우 비용 함수 (3)을 만족하는 추정 기법 $\tilde{z}_{ii} = F(y_0, y_1, \dots, y_i)$ 를 찾는다.

$$\sup_{x_0, u_j, v_j \in l_2} \frac{\sum_{j=0}^i e_{f,j}^* e_{f,j}}{(x_0 - \tilde{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \tilde{x}_0) + \sum_{j=0}^i u_j^* u_j + \sum_{j=0}^i v_j^* v_j} < \gamma^2 \quad (3)$$

여기서 Π_0 는 x_0 가 초기 추정(initial guess) \tilde{x} 에 얼마나 가까운가에 대한 사전 지식을 반영하는 양한정 행렬이고 γ 는 외란 감소 이득(disturbance attenuation gain)의 제공근이다.

문제 1 은 다음과 같은 스칼라 이차 함수 (4)를 고려하는 경우

$$J_{f,i}(x_0, u_0, \dots, u_i, y_0, \dots, y_i) = x_0^* \Pi_0^{-1} x_0 + \sum_{j=0}^i u_j^* u_j + \sum_{j=0}^i \left(\begin{bmatrix} y_j \\ z_{ki} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_j \\ L_j \end{bmatrix} x_j \right)^* \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ z_{ki} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_j \\ L_j \end{bmatrix} x_j \quad (4)$$

아래의 조건 a, b

조건 a. 위 식에서 $J_{f,i}(x_0, u_0, \dots, u_i, y_0, \dots, y_i)$ 가 (x_0, u_0, \dots, u_i) 에 대하여 대해 최소값을 가지며

조건 b. 또한 이러한 최소값에 있어서 식 $J_{f,i}(x_0, u_0, \dots, u_i, y_0, \dots, y_i) > 0$ 을 만족할 수 있는 추정치 $\{\tilde{z}_{ji}\}_{j=0}^i$ 가 존재하면, 즉

$$\min_{(x_0, u_0, \dots, u_i)} J_{f,i}(x_0, u_0, \dots, u_i, y_0, \dots, y_i) > 0$$

이 만족되면 비용함수 (3)을 만족하는 추정 기법 $\tilde{z}_{ii} = F(y_0, y_1, \dots, y_i)$ 을 구할 수 있다. 즉 문제 1 을 만족하는 H^∞ 필터를 구하기 위해서 중요한 것은 스칼라 이차 함수 (4)의 최소화 및 그 최소점에서의 양한정(positive definite) 조건이다. 이와 같이 준최적 H^∞ 필터링 문제가 스칼라 이차 함수의 최소화 문제로 변형될 경우 다음의 이유들에 의해 부정 내적 공간을 고려하게 된다. 우선 일반적 벡터 공간에서의 식 (1)과 같은 시변 상태 방정식을 고려한다.

일반적인 필터링 문제에 있어서는 다음과 같은 스칼라 이차 함수의 최소화 문제를 생각하게 된다[16].

문제 2. (스칼라 이차 함수의 최소화) $\{y_j\}_{j=0}^i$ 가 주어진 경우 x_0 와 $\{u_j\}_{j=0}^i$ 에 대하여 다음과 같은 스칼라 이차 함수를 최소화한다.

$$J(x_0, u, y) = x_0^* \Pi_0^{-1} x_0 + \sum_{j=0}^i \begin{bmatrix} u_j^* & v_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_j & S_j \\ S_j^* & R_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기에서 Q_i, S_i, R_i, Π_0 는 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 을 일반적 벡터 공간에서의 Gramian으로 정의하는 경우 (Hilbert 공간에서는 공분산 행렬) 식 (6) 과 같이 주어지는 Hermitian 행렬이다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i \\ 0 & S_i^* & R_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

상태 방정식 (1) 및 문제 2 에서의 스칼라 이차 함수 (5)와 준최적 H^∞ 필터링 문제에서의 식 (4)를 비교하여 보면 각각의 행렬들이 각각 $Q_i = I, S_i = 0, \Pi_0 > 0$ 또한 $R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ 와 같이 연관됨을 알 수 있다. 이러한 관계를 고려하여 준최적 H^∞ 필터링 문제를 새로운 형태의 상태 방정식으로 표현하게 되면 식 (7), (8)과 같이 부정 내적 공간에서 정의되는 벡터들로 이루어지는 상태 방정식으로 나타난다. 여기서 부정 내적 공간을 고려하는 이유는 바로 이러한 대응 관계에서 행렬 R_i 가 부정 행렬 (indefinite matrix)이기 때문이다. 부정 내적 공간에서 정의되는 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = Fx_i + Gu_i \\ \begin{bmatrix} u_i \\ z_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} x_i + v_i \end{cases} \quad (7)$$

또한 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 을 부정 내적 공간에서의 Gramian 으로 정의하게 되면

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & I\delta_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \delta_{ik} \end{bmatrix} \quad (8)$$

이다. 일반적으로 Hilbert 공간에서 스칼라 이차 함수 (5)을 정의하여 필터링 문제를 푸는 경우에는 공간상에서의 orthogonal projection을 통하여 (5)의 최소화와 동일한 해를 가지는 error Gramian, 즉 이차 비용 함수를 정의하고 innovation 기법을 이용하여 순환적인 해를 구하게 되는데 이러한 경우의 상태 추정 기법이 칼만 필터이다. 하지만 준최적 H^∞ 필터링 문제의 경우 효율적인 추정 기법을 얻기 위해서 식 (4)와 (5)의 대응 관계, 즉 준최적 H^∞ 필터링 문제가 부정 내적 공간에서의 상태 모델로 나타날 수 있다는 사실 때문에 Hilbert 공간이 아닌 부정 내적 공간에서의 error Gramian의 정의 및 projection을 통하여 해를 구하게 된다. 하지만 항상 유일하게 존재하는 Hilbert 공간에서의 projection과는 달리 부정 내적 공간에서의 projection은 특정한 조건이 만족되지 않으면 존재하지 않을 수 있으며 또한 유일하지 않을 수도 있다. 이러한 특성 때문에 부정 내적 공

간에서 상태 추정 문제를 풀기 위해서는 특정한 error Gramian을 정의하고 이의 정지점(stationary point) 및 최소 조건을 고려하여 projection을 구하게 된다. 또한 부정 내적 공간에서 innovation을 정의하는 경우 Hilbert 공간에서의 칼만 필터 방정식과 같은 부정 내적 공간에서의 칼만 필터를 구할 수 있는데 이러한 부정 내적 공간에서의 칼만 필터는 Hilbert 공간에서의 칼만 필터와 동일한 방정식을 가지게 된다[16]. 따라서 준최적 H^∞ 필터링 문제에서의 스칼라 이차 함수 (4)는 그 자체적으로 부정 행렬을 가지기 때문에 그에 해당하는 상태 추정 기법은 부정 내적 공간에서의 칼만 필터의 한 특수한 형태가 된다. 그러한 준최적 H^∞ 필터는 우선 조건 a, b를 만족하는 $\{\tilde{z}_{\hat{x}_i}\}_{i=0}^j$ 를 설정하고 이를 부정 내적 공간에서의 칼만 필터 방정식과 triangular factorization 등의 간단한 행렬 연산들을 응용함으로써 구한다. 이 중 첫 번째 조건인 스칼라 이차 함수 (4)의 최소 조건 a는 아래의 정리 1에서의 준최적 H^∞ 필터의 존재 조건인 식 (9)이며 최소 조건 a가 만족될 때 두 번째 조건 b를 만족하는 추정 기법 $\{\tilde{z}_{\hat{x}_i}\}_{i=0}^j$ 는 $\|H^\infty\| < \gamma$ 를 만족하는 필터 central 필터인 경우 $\tilde{z}_{\hat{x}_i} = L_i \hat{x}_{\hat{x}_i}$ 이다.

정리 1. (유한 시구간 준최적 H^∞ 필터) [17] 스칼라 $\gamma > 0$ 가 주어진 경우 만일 $[F_i \ G_i]$ 가 full rank이면 문제 1을 만족하는 준최적 유한 시구간 H^∞ 필터가 존재하기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같은 행렬을 정의하는 경우

$$R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad R_{e,i} = R_i + \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_{\hat{x}_{i-1}} \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix}$$

$$P_{\hat{x}_i}^{-1} = P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} + \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} R_i^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix}$$

$$= P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} + H_i^* H_i - \gamma^{-2} L_i^* L_i > 0 \quad (9)$$

이다. 여기에서 $P_0 = \Pi_0$ 이고 $P_{\hat{x}_{i-1}}$ 는 Riccati 순환식 (10)을 만족한다.

$$P_{i+1|i} = F_i P_{\hat{x}_{i-1}} F_i^* + G_i G_i^* - F_i P_{\hat{x}_{i-1}} \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_{\hat{x}_{i-1}} F_i^* \quad (10)$$

이러한 경우 문제 1을 만족하는 준최적 H^∞ 필터의 예측치 $\hat{x}_{i+1|i}$ 는

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{\hat{x}_{i-1}} + K_{b,i} (y_i - H_i \hat{x}_{\hat{x}_{i-1}}), \quad \hat{x}_0 = 0$$

여기에서 예측치 필터의 이득 $K_{b,i}$ 는

$$K_{b,i} = F_i P_{\hat{x}_{i-1}} H_i^* (I + H_i P_{\hat{x}_{i-1}} H_i^*)^{-1} \quad (11)$$

이다. 또한 필터링된 형태의 H^∞ 상태 추정치 $\hat{x}_{i+1|i+1}$ 는

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_i \hat{x}_{\hat{x}_i} + K_{f,i+1} (y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{\hat{x}_i})$$

이며 상태 벡터의 초기치 $\hat{x}_{-1|-1} = 0$ 이다. 이때 이득 방정식은

$$K_{f,i+1} = P_{i+1|i} H_{i+1}^* (I + H_{i+1} P_{i+1|i} H_{i+1}^*)^{-1} \quad (12)$$

이다.

증명 : Hassibi의 정리[16]에 자세히 설명되어 있다. ■

3. 변형된 준최적 H^∞ 필터 방정식

분산 H^∞ 필터 개발에 있어 효율적인 병렬 데이터 처리를 위해 가장 중요하게 고려되어야 되는 것은 H^∞ 필터의 이득 방정식의 형태이다. 만일 이득 방정식이 식 (12)와 같이 주어지는 경우에는 필터의 추정치를 각각의 관측치의 선형 합으로 나타내어 줄 수가 없기 때문에 효율적인 분산 필터 구성에 문제가 된다. 따라서 일반적 H^∞ 필터 이득 방정식에 대한 적절한 변형이 필요하다. 일반적인 칼만 필터의 경우 변형된 이득 방정식은 잘 알려진 역 공분산 행렬 (inverse covariance matrix) 형태를 이용하여 구한다[6][8]. 이러한 변형된 이득 방정식은 필터의 추정치를 관측치의 선형 합으로 나타내어 주기 때문에 분산 필터를 구성하는데 있어서 효율적으로 사용되었다. 기존의 H^∞ 필터링 이론, 즉 game theory [23]나 spectral factorization등을 이용한 결과들[11]은 실제적인 적용 문제에서 칼만 필터와의 상관성을 논하기가 어려워 적절한 필터 이득 방정식을 얻는데 어려움이 있다. 하지만 준최적 H^∞ 필터가 부정 내적 공간에서 정의되는 칼만 필터의 한 가지 특수한 형태라는 결과[17]를 이용하게 되면 기존의 칼만 필터에서 전개되는 방정식을 H^∞ 필터링 문제에 적절한 변형을 통하여 응용할 수 있다. 본 장에서는 기존의 칼만 필터에 적용되었던 변형된 필터 방정식을 부정 내적 공간에서 정의되는 준최적 H^∞ 필터링 문제에 응용함으로써 분산 필터의 구성에 적합한 변형된 H^∞ 필터 이득 방정식을 구한다.

3.1 변형된 칼만 필터 방정식

칼만 필터에 있어서의 변형된 이득 방정식은 다음과 같이 구하여진다. 식 (13)과 같은 일반적인 상태 방정식을 가정한다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F x_i + G u_i, & x_0 \\ y_i = H x_i + v_i \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & 0 \\ 0 & 0 & R_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

표 1. 일반적 칼만 필터 방정식

Table 1. General Kalman Filter Equation

1. Enter priori estimates and $\hat{x}_{\hat{d}i-1}$ its covariances $P_{\hat{d}i-1}$
2. Compute filtered Kalman gain $K_{f,i} = P_{\hat{d}i-1} H_i^* (H_i P_{\hat{d}i-1} H_i^* + R_i)^{-1}$
3. Update estimate with measurement y_i $\hat{x}_{\hat{d}i} = \hat{x}_{\hat{d}i-1} + K_{f,i} (y_i - H_i \hat{x}_{\hat{d}i-1})$
4. Compute error covariance for updated estimate $P_{\hat{d}i} = (I - K_{f,i} H_i) P_{\hat{d}i-1}$
5. Project ahead $\hat{x}_{i+1 i} = F_i \hat{x}_{\hat{d}i}$ $P_{i+1 i} = F_i P_{\hat{d}i} F_i^* + G_i Q_i G_i^*$
6. Enter again the prior estimate $\hat{x}_{i+1 i}$ and its error covariance $P_{i+1 i}$ to the loop

여기에서 Gramian $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 Hilbert 공간에서의 공분산 행렬로 가정된다. 이러한 경우 일반적인 칼만 필터 방정식은 표 1과 같이 주어진다[1].

여기에서 오차 공분산 행렬 $P_{i+1|i}$ 는 또한 다음과 같은 Riccati 순환식의 해이다.

$$P_{i+1|i} = F_i P_{\hat{d}i-1} F_i^* + G_i Q_i G_i^* - F_i P_{\hat{d}i-1} H_i^* (R_i + H_i P_{\hat{d}i-1} H_i^*)^{-1} H_i P_{\hat{d}i-1} F_i^*$$

그리고 변형된 칼만 필터 방정식은 표 2와 같다[1].

간단한 대수적 계산을 통하여 변형된 칼만 이득 방정식 $K_{A,i}$ 는 일반적 필터 이득 $K_{f,i}$ 와 동일함을 보일 수 있다. 자세한 내용은 [1]에 나타나 있다.

3. 2 변형된 H^∞ 필터 방정식

준최적 H^∞ 필터링 문제에서 기존의 필터 이득 방정식을 대체할 변형된 이득 방정식은 2 장에서의 조건 a,b 를 만족하면서 부정 내적 공간에서 정의되는 상태 방정식 (7)과 (8)에 표 2의 변형된 칼만 필터 방정식을 응용하여 얻는다.

정리 2. (변형된 준최적 H^∞ 필터 방정식) 스칼라 $\gamma > 0$ 이 주어진 경우 일반적 상태 방정식에 대하여 문제 1 을 만족하는 H^∞ 필터의 필요 충분 존재 조건은 다음과 같다.

표 2. 변형된 칼만 필터 방정식

Table 2. Alternative Form of Kalman Filter Equation

1. Enter loop with $P_{\hat{d}i-1}^{-1}$ and $\hat{x}_{\hat{d}i-1}$
2. Compute inverse covariance $P_{\hat{d}i}^{-1}$ $P_{\hat{d}i}^{-1} = P_{\hat{d}i-1}^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i$
3. Compute alternative Kalman gain $K_{A,i} = P_{\hat{d}i} H_i^* R_i^{-1}$
4. Update estimate $\hat{x}_{\hat{d}i} = \hat{x}_{\hat{d}i-1} + K_{f,i} (y_i - H_i \hat{x}_{\hat{d}i-1})$
5. Project ahead $\hat{x}_{i+1 i} = F_i \hat{x}_{\hat{d}i}$ $P_{i+1 i} = F_i P_{\hat{d}i} F_i^* + G_i Q_i G_i^*$
6. Enter again the prior estimate $\hat{x}_{i+1 i}$ and its error covariance $P_{i+1 i}^{-1}$ to the loop

$$P_{\hat{d}i}^{-1} = P_{\hat{d}i-1}^{-1} + [H_i^* \ L_i^*] R_i^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

여기에서 $R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ 이며 이러한 경우 필터링된 형태의 상태 추정치 $\hat{x}_{\hat{d}i}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{x}_{\hat{d}i} = \hat{x}_{\hat{d}i-1} + K_{A,i} (y_i - H_i \hat{x}_{\hat{d}i-1})$$

변형된 형태의 이득 방정식 $K_{A,i}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$K_{A,i} = (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{\hat{d}i} L_i^* L_i)^{-1} P_{\hat{d}i} H_i^* \quad (15)$$

상태 추정치 및 Riccati 방정식의 해에 대한 시간 갱신 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= F_i \hat{x}_{\hat{d}i} \\ P_{i+1|i} &= F_i P_{\hat{d}i-1} F_i^* + G_i G_i^* \end{aligned} \quad (16)$$

증명 : 준최적 H^∞ 필터에 대한 역 공분산 행렬 및 변형된 필터 이득 방정식을 얻기 위해서는 표 2 의 변형된 칼만 필터 이득 방정식을 부정 내적 공간에서의 상태 방정식 (17)에 적용한다.

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \underline{u}_i \\ \underline{z}_{\hat{d}i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ H_i \\ L_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & I\delta_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & [I \ 0 \\ 0 \ -\gamma^2 I] \delta_{ik} \end{bmatrix} \quad (17)$$

이러한 경우 Riccati 해의 역행렬 $P_{\hat{x}_i}$, 즉 H^∞ 필터에 대한 역 공분산 행렬은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P_{\hat{x}_i}^{-1} &= P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} + [H_i^* \ L_i^*] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} + H_i^* H_i - \gamma^{-2} L_i^* L_i \end{aligned} \quad (18)$$

또한 위의 식 (18)의 양한정 조건은 정리 1의 식 (9)와 같이 준최적 H^∞ 필터의 존재 조건이다. 이러한 경우 필터링 된 형태의 상태 추정치 $\hat{x}_{\hat{x}_i}$ 는 부정 내적 공간 상태 방정식에 변형된 형태의 칼만 필터 이득 방정식을 적용하여 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= F_i \hat{x}_{\hat{x}_i} + P_{i+1|i+1}^{-1} [H_{i+1}^* \ L_{i+1}^*] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} y_{i+1} - \hat{y}_{i+1|i} \\ z_{i+1|i+1} - \hat{z}_{i+1|i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

여기에서 $\hat{y}_{\hat{x}_{i-1}}$ 와 $\hat{z}_{\hat{x}_{i-1}}$ 는 $\{y_i\}$ 와 $\{\check{z}_{\hat{x}_i}\}$ 의 선형 확장 공간인 부정 내적 공간 $L\{\{y_i\}_{i=0}^{-1}, \{\check{z}_{\hat{x}_i}\}_{i=0}^{-1}\}$ 에 대한 projection이다. 식 (19)는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \hat{x}_{i+1|i} + P_{i+1|i+1}^{-1} H_{i+1}^* (y_{i+1} - \hat{y}_{i+1|i}) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1}^{-1} L_{i+1}^* (z_{i+1|i+1} - \hat{z}_{i+1|i}) \end{aligned}$$

여기에서 $\hat{y}_{i+1|i} = H_{i+1} F_i \hat{x}_{\hat{x}_i}$ 이며 만일 고려하는 준최적 필터가 $\|H\|_\infty < \gamma$ 조건을 만족하는 필터 중 소위 central 필터인 경우 식 (20)이 성립되며 (2장의 조건 b)

$$\check{z}_{i+1|i+1} = \hat{z}_{i+1|i+1} = L_i \hat{x}_{i+1|i+1} \quad (20)$$

이러한 경우 위의 식은

$$\begin{aligned} &(I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1} L_{i+1}^* L_{i+1}) (\hat{x}_{i+1|i+1} - \hat{x}_{i+1|i}) \\ &= P_{i+1|i+1} H_{i+1}^* (y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{\hat{x}_i}) \end{aligned}$$

이 되며 필터링된 추정치 $\hat{x}_{i+1|i+1}$ 에 대한 추정 기법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \hat{x}_{i+1|i} + (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1} L_{i+1}^* L_{i+1})^{-1} \\ &\quad \times P_{i+1|i+1} H_{i+1}^* (y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{\hat{x}_i}) \end{aligned} \quad (21)$$

변형된 형태의 필터 이득 방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$K_{A,i+1} = (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1} L_{i+1}^* L_{i+1})^{-1} P_{i+1|i+1} H_{i+1}^* \quad (22)$$

이러한 변형된 H^∞ 필터 이득 방정식 $K_{A,i}$ 는 잘 알려진 matrix inversion lemma 및 간단한 행렬 대수식 등을 통해 식 (23)과 같이 일반적 H^∞ 필터 이득 방정식인 $K_{f,i}$ 와 동일함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} K_{f,i} &= P_{\hat{x}_{i-1}} H_i^* (I + H_i P_{\hat{x}_{i-1}} H_i^*)^{-1} \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}} H_i^* (I - H_i P_{\hat{x}_{i-1}} (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^*) \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}} (H_i^* - H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}} (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^*) \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}} (H_i^* - H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}} (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^* \\ &\quad - (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^* + (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^*) \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}} (H_i^* - (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}}) (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^* \\ &\quad + (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^*) \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}} (I + H_i^* H_i P_{\hat{x}_{i-1}})^{-1} H_i^* \\ &= P_{\hat{x}_{i-1}} P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} (P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} + H_i^* H_i)^{-1} H_i \\ &= (P_{\hat{x}_{i-1}}^{-1} + \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i)^{-1} H_i^* \\ &= (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{\hat{x}_{i-1}} L_i^* L_i)^{-1} P_{\hat{x}_{i-1}} H_i^* \\ &= K_{A,i} \end{aligned} \quad (23)$$

예측치 상태 추정치 $\hat{x}_{i+1|i}$ 와 Riccati 방정식의 해 $P_{i+1|i}$ 에 대한 시간 갱신 방정식은 표 2의 칼만 필터 경우를 직접적으로 적용해서 얻는다. ■

4. 분산 H^∞ 필터링 기법

본 장에서는 외부 잡음에 대한 사전 정보가 부족한 경우의 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제를 위한 분산 H^∞ 필터링 알고리즘을 제시한다.

4.1. 분산 필터링

일반적인 집중형 필터링 기법은 센서 데이터 융합 문제 [19]에 있어 강력한 기능을 발휘하지만 다중 센서 시스템과 같이 시스템의 상태 벡터가 커지고 여러 형태의 센서가 병렬적으로 쓰이는 경우 프로세서에 대한 계산 부담의 가중과 단일 프로세서의 고장에 대한 불안정성 때문에 최적의 해결 방법으로 볼 수 없다. 따라서 최근에는 이러한 집중 필터링을 대체하는 분산 필터링 기법에 대한 연구가 많이 진행되고 있다[4-8]. 이러한 분산 필터링의 구조는 다음과 같이 설명할 수 있다[2]. 우선, 각각의 지역 센서에 할당된 지역 필터가 병렬적으로 작동한다. 이러한 지역 필터에서는 각각의 센서 데이터들을 처리해 지역 센서 단위의 상태 추정치와 Riccati 방정식의 해 (오차 공분산 행렬)를 생산한다. 이러한 지역 데이터들은 중앙 융합 필터에서의 처리를 통하여 전역적으로 최적인 해로 융합된다. 결과적으로 각각의 관측치가 그 관측치에 직접적으로 관련이 있는 상태 벡터를 포함하는 상태로 데이터 처리가 이루어진다. 이러한 지역 상태 벡터와 오차 공분산 행렬은 중앙 융합 필터에서 각각의 지역 추정치의 가중합의 형태로 융합되어 최종적인 전역 상태 추정치를 생산하게 된다. 이러한 분산 필터링 기법은 항공기의 다중 센서

항법 시스템 등과 같이 실시간 처리가 중시되는 적용 문제들에서 성공적으로 이용되고 있다. 분산 필터링의 장점은 다음과 같다[2].

- ① 각각의 지역 센서에서 자체적인 상태 추정치를 이용할 수 있기 때문에 지역 센서 단위에서의 의사 결정과 감시 기능을 수행할 수 있다.
- ② 병렬 데이터 처리를 통하여 데이터 처리 효율을 높일 수 있다.
- ③ 원래의(raw) 센서 데이터가 아닌 처리된 데이터를 이용하기 때문에 중앙 융합 필터에로의 데이터 전송에 있어서의 비용 감소 및 전송 대역폭을 줄일 수 있다.
- ④ 자체적으로 병렬적 구조를 가지기 때문에 중앙의 융합 프로세서라든가 지역 프로세서의 고장에 대해 강인한 특성을 나타낸다.

집중 필터링과 분산 필터링 기법의 구조는 그림 1, 2와 같다.

4.2 다중 센서 데이터 융합에 있어서의 강인성 문제

일반적인 칼만 필터링 기법은 필터의 모델링 가정이 신뢰 수준 이상이고 외부 잡음에 대한 불확실성이 백색 잡음으로 모델링될 수 있으면 센서 데이터 처리에 있어 최적의 해를 제공할 수 있다[1][12]. 하지만 실제적인 문제에 있어서는 시스템의 계수라든가 외부 잡음에 대한 모델링이 항상 정확하지 않을 수 있다. 칼만 필터는 이러한 모델링 가정이 위배되는 경우에는 발산하는 경향이 있으며 따라서 센서 데이터 처리에 있어서의 강인성이라는 문제에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. Kam은 이동 로봇의 항법 시스템에 있어서의 강인성에 대한 요구 사항을 언급하고 있으며 [12] 또한 Mintz는 외부 잡음의 불확실성, 즉 외부 잡음의 공분산의 변화에 강인한 추정 및 판단 기법에 대한 연구 결과를 보이고 있다 [13-15].

하지만 기존의 연구 결과들은 모두 외부 잡음을 모델링 가능한 Gaussian분포를 지닌 백색 잡음으로 가정하고 있다. 그러나 만일 이러한 Gaussian 분포에 대한 가정이 위배되는 경우는 새로운 추정 기법을 필요로 하게 된다. 최근의 강인 제어 분야에서는 불확실성에 대한 해결 기법으로 H^∞ 제어 기법이 주류를 이루고 있다[20-21]. H^∞ 필터링 기법은 이러한 H^∞ 제어 이론의 상태 추정 문제로의 확장이다[11][22]. 이론적으로 준최적 H^∞ 필터는 외부 잡음 신호로부터 상태 추정 오차로의 최대 에너지 이득을 γ^2 이하로 감쇄시킬 수 있다. 따라서 외부 잡음에 대한 가정이 불필요하며 따라서 추정 문제에 있어서 강인성을 보장한다. 본 논문에서는 이러한 특성을 지닌 준최적 H^∞ 필터를 기반으로한 분산 필터링 기법을 제시한다.

4.3 분산 H^∞ 필터링 문제의 설정

분산 필터링에 일반적으로 적용되는 상태 방정식은 지역

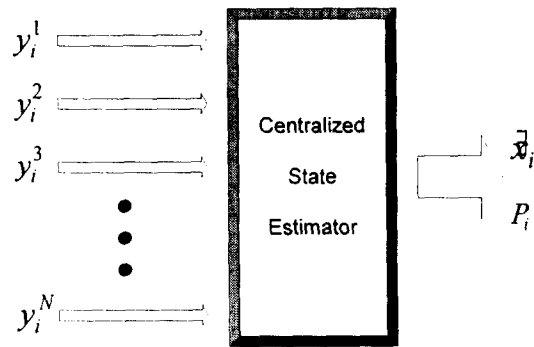


그림 1. 집중 필터링
Fig 1. Centralized filtering

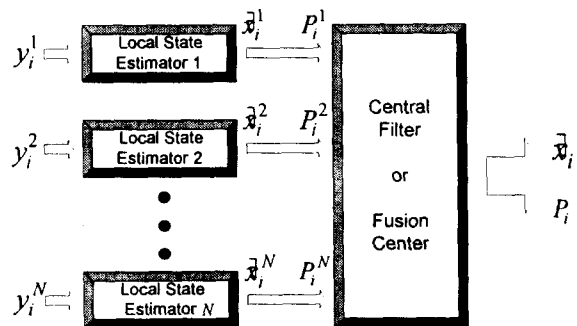


그림 2. 분산 필터링
Fig 2. Decentralized filtering

모델과 전역 모델의 상태 방정식이 동일한 가정을 가지는 것으로서 Willsky는 이러한 문제를 'map updating problem'으로 정의했다[7]. 상태 방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, & x_0 \\ y_i^k = H_i^k x_i + v_i^k, & 0 \leq i < \infty \\ z_i = L_i x_i \end{cases} \quad (24)$$

여기에서 $k=1, \dots, N$ 으로서 k 번째 지역 시스템을 나타내며 y_i^k, H_i^k, v_i^k 는 각각 k 번째 지역 관측치 벡터, 관측 행렬 그리고 관측 잡음이다. 또한 공정 잡음 u_i 와 관측 잡음 v_i^k 는 통계적 특성이 알려지지 않은 유한 에너지를 지닌 l_2 신호로 가정한다. 분산 H^∞ 필터링 문제에서 추정하려고 하는 벡터는 상태 벡터의 임의의 선형 결합인 $z_i = L_i x_i$ 이다. 만일 $\tilde{z}_{ii} = F_D(\{y_i^k\})$ 를 0 부터 i 까지의 각각의 지역 관측치 $\{y_i^k\}$ 로부터의 z_i 에 대한 추정치라고 할 때 분산 H^∞ 필터링 문제는 다음과 같이 정의된다.

문제 3. (분산 H^∞ 필터링 문제) 주어진 스칼라 γ 에 대하여 그림 2와 같은 구조로 지역 필터와 중앙 융합 필터로

구성되며 전역적으로 다음 식 (25)를 만족하는 상태 추정 기법 F_D 를 구한다.

$$\sup_{\substack{x_0 \\ u \in l_1, v \in l_2}} \frac{\sum_{j=0}^N (\tilde{z}_{ji} - L_j \tilde{x}_j)^* (\tilde{z}_{ji} - L_j \tilde{x}_j)}{(x_0 - \tilde{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \tilde{x}_0) + \sum_{j=0}^N u_j^* u_j + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N v_j^{k*} v_j^k} < \gamma^2 \quad (25)$$

4.4 분산 H^∞ 필터

일반적 분산 필터링 기법은 병렬적 구조의 지역 필터와 상태 추정치 및 Riccati 해들의 융합을 위한 중앙 융합 필터로 구성되어진다. 지역 상태 추정치 \hat{x}_{ii}^k 와 지역 Riccati 해를 계산하는 지역 필터는 다음과 같다.

보조 정리 1. (변형된 형태의 k 번째 지역 H^∞ 필터)
부정 내적 공간의 상태 방정식에 기반한 지역 필터에서의 사후 Riccati 해 (a posteriori Riccati solution)의 역행렬 형태는 다음과 같다.

$$P_{ii}^{k-1} = P_{ii-1}^{k-1} + [H_i^{k*} \quad L_i^{k*}] R_i^k^{-1} \begin{bmatrix} H_i^k \\ L_i^k \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기에서 행렬 R_i^k 는 $R_i^k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ 이며 식 (26)의 양한정(positive definite)조건은 지역 H^∞ 필터의 존재 조건이다. 필터링된 형태의 지역 상태 추정치 \hat{x}_{ii}^k 는 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{x}_{ii}^k = \hat{x}_{ii-1}^k + K_{A,i}^k (y_i^k - H_i^k \hat{x}_{ii-1}^k) \quad (27)$$

여기에서 변형된 필터 이득 방정식 $K_{A,i}^k$ 는

$$K_{A,i}^k = (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{ii}^k L_i^{k*} L_i^k)^{-1} P_{ii}^k H_i^{k*} = A_i^{k-1} P_{ii}^k \quad (28)$$

여기에서 $A_i^k = (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{ii}^k L_i^{k*} L_i^k)$ 이며 지역 데이터 $\hat{x}_{i+1|i}^k$, $P_{i+1|i}^k$ 에 대한 시간 갱신 방정식은 다음과 같다.

$$\hat{x}_{i+1|i}^k = F_i^k \hat{x}_{ii}^k, \quad P_{i+1|i}^k = F_i^k P_{ii}^k F_i^{k*} + G_i^k G_i^{k*}$$

증명 : 보조 정리 1은 상태 방정식 (24)를 3장의 정리 2의 결과에 적용함으로써 쉽게 증명된다. ■

이제 전역 상태 추정치 및 Riccati 해를 위한 중앙 융합 필터에서의 계산 방정식은 다음과 같다.

정리 3. (중앙 융합 필터) 각각의 지역 필터에서의 지역

상태 추정치를 전역 상태 추정치를 융합하는 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ii} &= [I - A_i^{-1} P_{ii} H_i^* H_i] \hat{x}_{ii-1} \\ &+ A_i^{-1} P_{ii} \sum_{k=1}^N P_{ii}^{k-1} A_i^k \hat{x}_{ii}^k \\ &- P_{ii}^{k-1} A_i^k [I - A_i^{k-1} P_{ii}^k H_i^{k*} H_i^k] F_i^k \hat{x}_{i-1|i-1}^k \end{aligned} \quad (29)$$

여기에서 $A_i = I + \frac{1}{\gamma^2} P_{ii} L_i^* L_i$ 이다. 시간 갱신 방정식은 $\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{ii}$ 이다.

지역 Riccati 해로부터 전역 Riccati 해를 계산하는 방정식 (전역 Riccati 해의 지역 Riccati 해의 선형 결합으로의 표현)은 다음과 같다.

$$P_{ii}^{-1} = P_{ii-1}^{-1} + \sum_{k=1}^N (P_{ii}^{k-1}^{-1} - P_{ii-1}^{k-1}^{-1}) + \frac{N-1}{\gamma^2} L_i^* L_i \quad (30)$$

그리고 전역 Riccati 해를 위한 시간 갱신 방정식은 다음과 같다.

$$P_{i+1|i} = F_i P_{ii} F_i^* + G_i G_i^*$$

증명 : 우선 각각의 지역 센서에서의 관측 벡터가 전체 시스템의 관측 방정식에 포함되는 일반적인 형태인 전역적인 상태 추정 기법에 대하여 전개한다. 우선 다음과 같은 행렬들을 정의한다.

$$y_i = \begin{bmatrix} y_i^1 \\ y_i^2 \\ \vdots \\ y_i^N \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} H_i^1 \\ H_i^2 \\ \vdots \\ H_i^N \end{bmatrix}, \quad v_i = \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \vdots \\ v_i^N \end{bmatrix}$$

이러한 경우 집중 필터링을 위한 상태 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F x_i + G u_i \\ y_i = H x_i + v_i \\ z_i = L x_i \end{cases}$$

위의 방정식은 관측 방정식에서의 약간의 변형을 제외하고는 일반적 준최적 H^∞ 필터링 문제와 동일하다. 변형된 필터 이득 방정식을 이용하면 집중화된 H^∞ 필터 방정식은

$$\hat{x}_{ii} = \hat{x}_i + A_i^{-1} P_{ii} H_i^* (y_i - H_i \hat{x}_i)$$

이 되며 사후 Riccati 해 (a posteriori Riccati solution)에 대한 방정식은

$$\begin{aligned} P_{ii}^{-1} &= P_{ii-1}^{-1} + [H_i^* \quad L_i^*] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \\ &= P_{ii-1}^{-1} + H_i^* H_i - \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i \end{aligned} \quad (31)$$

이 된다. 이러한 경우 전역 상태 추정치 \hat{x}_{ii} 를 다음 식과 같이 지역 관측 벡터 y_i^k 의 선형 결합으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_{ii} = \hat{x}_i + A_i^{-1} P_{ii} C_i^* (y_i - C_i \hat{x}_i) = (I - A_i^{-1} P_{ii} \sum_{k=1}^N C_i^* C_i^k) \hat{x}_i + A_i^{-1} P_{ii} \sum_{k=1}^N C_i^* y_i^k \quad (32)$$

식 (32)으로부터 지역 관측치 벡터 y^k 가 지역 상태 추정치 \hat{x}^k 의 선형 결합으로 나타나게 된다면 분산 필터링 기법을 도출하는 것은 어렵지 않은 것임을 알 수 있다. 본 논문에서 변형된 형태의 필터 이득 방정식을 중시하는 이유가 이런 점에 있다. 보조 정리로부터 k 번째 지역 H^∞ 필터 방정식은 다음과 같다.

$$C_i^* y_i^k = P_{ii}^{k-1} A_i^k \hat{x}_{ii}^k - P_{ii}^{k-1} A_i^k (I - A_i^{k-1} P_{ii}^{k-1} C_i^* C_i^k) F_i \hat{x}_{i-1|i-1}^k \quad (33)$$

이러한 경우 중앙 융합 방정식 (29)는 식 (33)을 식 (32)에 직접적으로 대입함으로써 얻어진다.

두 번째 문제는 지역 Riccati 해로부터 전역 Riccati 해로의 효율적인 계산을 위한 방정식을 유도한다. 전역 Riccati 해에 대한 방정식은 식 (31)로부터 다음과 같이 나타낸다.

$$P_{ii}^{-1} = P_{ii-1}^{-1} + [C_i^* L_i] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i \\ L_i \end{bmatrix} = P_{ii-1}^{-1} + \left(\sum_{k=1}^N C_i^* C_i^k \right) - \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i \quad (34)$$

보조정리 1의 식 (26)으로부터 k 번째 지역 필터에서의 Riccati 방정식은

$$P_{ii}^{k-1} = P_{ii-1}^{k-1} + [C_i^* L_i^*] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i^k \\ L_i^k \end{bmatrix} = P_{ii-1}^{k-1} + C_i^* C_i^k - \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i^k \quad (35)$$

식 (35)를 다시 쓰면

$$C_i^* C_i^k = P_{ii}^{k-1} - P_{ii-1}^{k-1} + \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i^k \quad (36)$$

식 (36)을 식 (34)에 대입하면

$$P_{ii}^{-1} = P_{ii-1}^{-1} + \sum_{k=1}^N (P_{ii}^{k-1} - P_{ii-1}^{k-1}) + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^N (L_i^* L_i^k) - \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i = P_{ii-1}^{-1} + \sum_{k=1}^N (P_{ii}^{k-1} - P_{ii-1}^{k-1}) + \frac{N-1}{\gamma^2} L_i^* L_i$$

위와 같이 융합 방정식 (30)을 구한다. ■

5. 컴퓨터 시뮬레이션

컴퓨터 시뮬레이션을 위하여 본 논문에서는 세 개의 지역 시스템을 가진 간단한 수치적인 모델을 제시한다. 제안된 기

법이 일반적 분산 칼만 필터에 비해 외부 잡음에 대한 강인성(robustness)을 지님을 보이기 위하여 본 논문에서는 외부 잡음을 다중 차수를 지닌 유색 잡음으로 가정한다. 또한 제안된 시스템의 고장에 대한 강인함(fault tolerance)과 유연한 성능 하강 효과(graceful degradation effect)를 보이기 위해 특정 지역 시스템의 고장을 가정하고 집중형 H^∞ 필터와 비교한다.

5.1 수치 모델

세 개의 지역 시스템으로 구성되는 제시된 시스템은 전역 시스템의 모든 상태 벡터들이 어떠한 지역 관측 벡터로부터도 추정 가능하기 때문에 본래적인 여분성(redundancy)을 가지고 있다. 전역 상태 모델은 다음과 같다.

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i$$

여기서 각 행렬들은

$$x_i = \begin{bmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ a_i^3 \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} 0.7672 & 0.0023 & 0 \\ 0.0021 & 0.6753 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5824 \end{bmatrix} \\ G_i = \begin{bmatrix} \sqrt{0.0472} & 0 \\ \sqrt{0.0721} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.0873} \end{bmatrix}, u_i = \begin{bmatrix} d_i^1 \\ d_i^2 \end{bmatrix}$$

이며 세 개의 지역 시스템은 다음과 같다.

$$y_i^1 = H_i^1 x_i + v_i^1 \\ y_i^2 = H_i^2 x_i + v_i^2 \\ y_i^3 = H_i^3 x_i + v_i^3$$

각각의 행렬들은

$$H_i^1 = [0 \ 1 \ 1], H_i^2 = [1 \ 0 \ -1], H_i^3 = [1 \ 1 \ 1]$$

이며 L_i 는 $[1 \ 1 \ 1]$ 이고 잡음 감쇄 수준 γ 는 5 로 주어진다.

5.1.1 강인성 문제 (외부 잡음에 대한 가정)

칼만 필터 문제와는 달리 H^∞ 필터 문제는 외부 잡음의 통계적 특성에 대하여 l_2 신호임을 제외하고는 아무런 가정을 하지 않는다. 본 논문에서는 최악의 경우에 대한 성능 보장을 할 수 있는 H^∞ 필터링 기법의 특성을 고려하여 외부 잡음을 일반적인 경우인 백색 잡음과 최악의 경우를 가정한 2차의 유색 잡음의 두 가지로 모델링한다.

경우 1. 모든 외부 잡음을 일정한 공분산을 가진 비상관(uncorrelated) 백색 잡음으로 모델링한다.

$$E\left[\begin{matrix} d_i^1 \\ d_i^2 \end{matrix}, \begin{matrix} d_i^1 \\ d_i^2 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} 0.8^2 & 0 \\ 0 & 1.1^2 \end{bmatrix},$$

$$E\left[\begin{matrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ v_i^3 \end{matrix}, \begin{matrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ v_i^3 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} 1.1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3^2 \end{bmatrix}$$

경우 2. 칼만 필터는 경우 1 과 같이 일정한 공분산을 가진 백색 잡음을 가정하는 가운데 실제 잡음은 식 (37)과 같은 가중치를 가진 유색 잡음으로 모델링한다. 그러한 유색 잡음은 다음과 같다.

$$d_{i+1}^1 = 0.8d_i^1 + 0.75r_i^1$$

$$d_{i+2}^2 = 0.8d_i^2 + r_i^2$$

여기에서 $\{r_i^k\}$ 는 일정한 공분산을 가진 백색 잡음이다. 그리고 이러한 유색 잡음 신호는 다음과 같은 가중치를 가지고 시스템에 입력된다.

$$u_i^1 = 1.5d_i^1, \quad u_i^2 = 1.5d_i^2 \quad (37)$$

칼만 필터가 가정하는 공정 잡음 $\{d_i^k\}$ 의 공분산에 대한 가정은

$$E\left[\begin{matrix} d_i^1 \\ d_i^2 \end{matrix}, \begin{matrix} d_i^1 \\ d_i^2 \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} 0.8^2 & 0 \\ 0 & 1.1^2 \end{bmatrix}$$

이며 관측 잡음은 경우 1 과 같다.

5.1.2 센서 고장 상황에 대한 가정

제안한 병렬 구조 시스템의 고장에 대한 강인함을 보이기 위해 본 논문에서는 신뢰 수준 이상의 센서 잡음을 모델링하여 특정 지역 시스템의 고장을 가정한다. 그러한 경우에 제안한 시스템의 완만한 성능 하강 효과를 집중형 H^∞ 필터의 결과와 비교한다.

경우 3. 고장 시스템은 두 번째 관측 시스템으로 가정하며 센서 잡음은 다음과 같다.

$$E[v_i^2, v_i^2] = 5^2$$

다른 가정들은 경우 1과 동일하다.

5.2 시뮬레이션 결과

제안된 분산 H^∞ 필터 시스템의 외부 잡음의 변화에 대한 강인성은 칼만 필터와 비교한다. 또한 제안 시스템의 고장에 대한 강인성은 집중형 H^∞ 필터와 비교한다. 성능 지수로는 평균 자승 오차 (mean squared error)가 쓰이고 있으며 각 그림 (그림 3,4,5)에서의 실선은 실제 상태 벡터를 나타내며 점선은 제안 시스템의 추정치를 나타낸다.

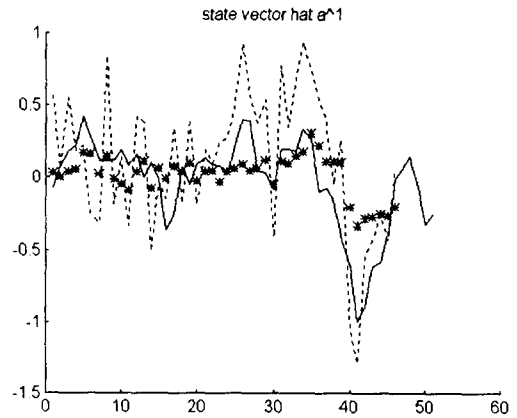


그림 3. 백색 외부 잡음 (경우 1)
Fig 3. White exogenous noise (case 1)

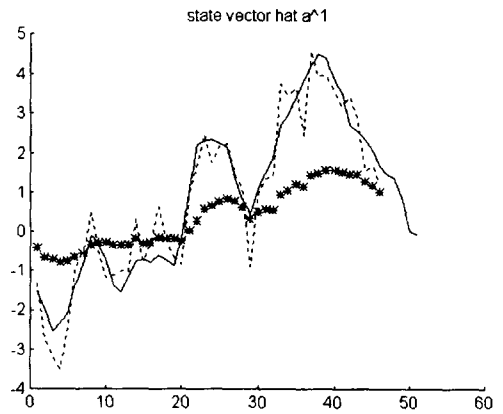


그림 4. 유색 외부 잡음 (경우 2)
Fig 4. Colored exogenous noise (case 2)

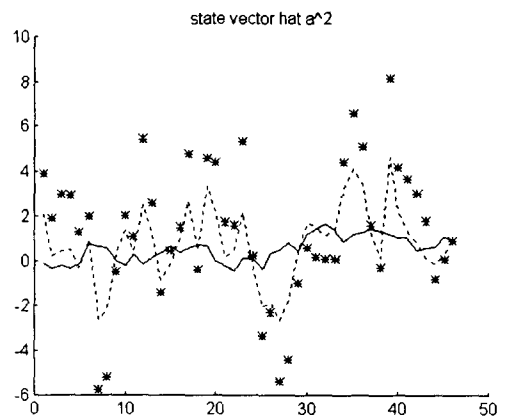


그림 5. 2번째 센서의 고장 상황 (경우 3)
Fig 5. 2nd sensor fault case (case 3)

5.2.1 외부 잡음에 대한 강인성

그림 3,4에서 '*'는 칼만 필터에 의한 추정치를 나타낸다. 표 3 및 그림 3에서처럼 외부 잡음이 일정한 공분산을 가진 백색 잡음으로 가정된 경우 제안된 시스템과 칼만 필터와의 성능 차이는 실제 그다지 크지 않다. 하지만 표 3 및 그림 4와 같이 최악의 상황을 가정하였을 경우 칼만 필터의 추정 오차가 큰 데 비하여 제안된 시스템의 오차 범위는 신뢰 수준 이하이다. 따라서 실제적인 적용 문제에 있어 제안된 시스템이 기존의 칼만 필터에 비해 적합할 수 있는 가능성을 보이고 있다.

5.2.2 고장 강인성

그림 5에서 '*'는 집중형 H^∞ 필터의 추정치를 나타낸다. 본 논문에서는 2번째 지역 시스템만으로 이루어진 단일 시스템과 1, 3 번째 시스템이 여분의 시스템으로 제공된 상태에서의 분산 필터링 시스템을 비교하였다. 표 3 및 그림 5에서처럼 분산 시스템의 특성상 특정 지역 시스템의 고장시 완만한 성능 하강 효과를 볼 수 있다.

표 3. 경우 1,2,3 의 평균 자승 오차 (MSE) 비교
Table 3. Comparison of MSE between case 1,2,3

강인성 (Robustness)	상태 벡터	칼만 필터 결과	분산 H^∞ 필터 결과
경우 1 백색 외부 잡음	\hat{a}^1	0.0074	0.1672
	\hat{a}^2	0.0259	0.1799
	\hat{a}^3	0.0330	0.1907
경우 2 유색 공정 잡음	\hat{a}^1	7.0730	0.4778
	\hat{a}^2	2.6136	1.8813
	\hat{a}^3	2.4240	0.7875
고장 내구성 (Fault-Tolerance)	상태 벡터	집중 H^∞ 필터 결과	분산 H^∞ 필터 결과
경우 3 2번째 센서 고장 상황	\hat{a}^1	51.9140	25.7154
	\hat{a}^2	123.2360	9.0759
	\hat{a}^3	12.1169	6.7237

6. 결 론

본 논문에서는 외부 잡음의 통계적 특성에 대한 모델링이 불분명한 경우의 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제에 있어 외부 잡음에 대한 추정 오차의 에너지 비를 일정한 레벨 이하로 감소시켜 강인성을 보장할 수 있는 분산 H^∞ 필터를 개발하였다. 이를 위해 준최적 H^∞ 필터링 문제가 부정 내적 공간에서 정의되는 칼만 필터의 한 가지 특수한 형태임을 이용하여, 기존의 분산 칼만 필터 기법의 개발을 위해 이용되었던 변형된 칼만 필터 방정식을 부정 내적 공간에서 정

의되는 상태 방정식에 적용하여 변형된 준최적 H^∞ 필터 방정식 및 이득 방정식을 도출하였다. 제안된 이득 방정식을 이용하여 지역 필터와 중앙의 융합 필터 사이에 불필요한 계산량을 감소시킬 수 있는 효율적인 시간 갱신식을 가지는 분산 H^∞ 필터를 설계하였으며 적절하게 선택된 수치 모델을 이용해 외부 잡음에 대한 강인성과 센서 고장 상황에 대한 내구성을 검증하였다. 이러한 분산 H^∞ 필터링 기법은 차 후에 적절한 결정 방법과 함께 다중 센서 데이터 융합 (multisensor data fusion) 문제에 있어서의 강인성을 다루기 위한 새로운 제안으로 볼 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Robert Grover Brown, and Patrick Y. C. Hwang, Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [2] Siouris, Optimal Control and Estimation Theory, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [3] Yaakov Bar-Shalom, and Xiao-Rong Li, Estimation and Tracking, Artech House, 1993.
- [4] B. D. Brumback, and M. D. Srinath, "A Fault-Tolerant Multisensor Navigation System Design", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-23, No. 6, pp. 738-756, November 1987.
- [5] Thomas Kerr, "Decentralized Filtering and Redundancy Management for Multisensor Navigation", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. 23, No. 1, pp. 83-119, January 1987.
- [6] Jason L. Speyer, "Computation and Transmission Requirements for a Decentralized Linear-Quadratic-Gaussian Control Problem", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-24, No 2, pp. 266-269, April 1979.
- [7] Alan S. Willsky, Martin G. Bello, David A. Castanon, Bernard C. Levy, and George C. Verghese, "Combining and Updating of Local Estimates and Regional Maps Along Sets of One-Dimensional Tracks", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-27, No. 4, pp. 799-813, August 1982.
- [8] Hamid R. Hassimpour, Sumit Roy, Alan J. Laub, "Decentralized Structures for Parallel Kalman Filtering", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 33, No. 1, pp. 88-94, January 1988.
- [9] B.S.Y. Rao, H.F. Durrant-Whyte, and J. A. Sheen, "A Fully Decentralized Multi-Sensor System For Tracking and Surveillance", The International Journal of Robotics Research, vol. 12, No. 1, pp. 20-44, February 1993.
- [10] Dennis S. Bernstein, and Wassim M. Haddad, "Steady-state Kalman filtering with an H^∞ error bound", Systems & Control Letters, vol. 12, pp. 9-16, 1989.
- [11] U. Shaked and Y. Theodor, " H^∞ Optimal Estimation : A Tutorial," Proc. IEEE CDC, pp. 2278-2286, 1992.

- [12] Moshe Kam, Xiaoxun Zhu, and Paul Kalata, "Sensor Fusion for Mobile Robot Navigation", Proc. of the IEEE, vol. 85, No. 1, pp. 108-119, January 1997.
- [13] Mehmet Zeytinoglu, and Max Mintz, "Optimal Fixed Size Confidence Procedures for a Restricted Parameter Space", The Annals of Statistics, vol. 12, No. 3, pp. 945-957, 1984.
- [14] Mehmet Zeytinoglu, and Max Mintz, "Robust Fixed Size Confidence Procedures for a Restricted Parameter Space", The Annals of Statistics, vol. 16, No. 3, pp. 1241-1253, 1988.
- [15] R. McKendall and M. Mintz, "Robust Fusion of Location Information", Proc. Int. Conf. on Robot. Automat., Philadelphia, PA, pp. 1239-1242, 1988.
- [16] Babak Hassibi, Ali H. Sayed, and Thomas Kailath, "Linear Estimation in Krein Spaces-Part I: Theory", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 41, No. 1, pp. 18-33, January 1996.
- [17] Babak Hassibi, Ali H. Sayed, and Thomas Kailath, "Linear Estimation in Krein Spaces-Part II: Applications", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 41, No. 1, pp. 34-49, January 1996.
- [18] V. I. Istratescu, Inner Product Structures, Theory and Applications, Mathematics and Its Applications, Dordrecht, Holland:Reidel, 1987.
- [19] David L. Hall, Mathematical Techniques in Multi-sensor Data Fusion, Artech House, 1992.
- [20] Kemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover, Robust and Optimal Control, Prentice Hall, 1996.
- [21] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
- [22] K. M. Nagpal, and P. P. Khargonekar, "Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-36, No. 2, pp. 152-166, 1991.
- [23] T. Basar and P. Bernhard, H^∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach, Birkhauser. Boston, 1995.

저 자 소 개



김 경 근(金 炘 權)
 1972년 2월 13일생. 1996년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 국방과학연구소 연구원.
 Tel : 017-410-3842
 E-mail : amantes 7 @chollian.net



윤 태 성(尹 泰 星)
 1956년 6월 23일생. 1978년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1994년~1995년 2월 미국 Vanderbilt 대학교 전기공학과 객원교수. 현재 창원대 전기공학과 부교수.
 Tel : 0551-79-7513
 E-mail : tsyoon@sarim.changwon.ac.kr



진 승 희(陣 承 熙)
 1970년 12월 22일생. 1993년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 동 대학원 전기공학과 박사과정.
 Tel : 02-361-2773
 E-mail : shjin@control.yonsei.ac.kr



박 진 배(朴 珍 陪)
 1954년 8월 7일생. 1977년 연세대 공대 전기공학과 졸업. 1985년~1990년 Kansas State University 공대 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공학박사). 1990년~1991년 Kansas State University 공대 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수. 현재 연세대 공대 전기공학과 부교수
 Tel :02-361-2773
 E-mail : jbpark@bubble.yonsei.ac.kr