

보간법을 이용한 블럭펄스 함수에 대한 새로운 적분 연산행렬의 유도

論 文

48A-6-13

The New Integral Operational Matrix of Block Pulse Function using Interpolation Method

曹永鎬* · 申勝權* · 李漢錫** · 安斗守***

(Young-ho Cho · Seung-kwon Shin · Han-seok Lee · Doo-soo Ahn)

Abstract - BPF(block pulse function) has been used widely in the system analysis and controller design. The integral operational matrix of BPF converts the system represented in the form of the differential equation into the algebraic problem. Therefore, it is important to reduce the error caused by the integral operational matrix. In this paper, a new integral operational matrix is derived from the approximating function using Lagrange's interpolation formula. Comparing the proposed integral operational matrix with another, the result by proposed matrix is closer to the real value than that by the conventional matrix. The usefulness of the proposed method is also verified by numerical examples.

Key Words : BPF (block pulse function), Lagrange's interpolation(라그랑지 보간법), integral operational matrix(적분 연산행렬)

1. 서 론

블럭펄스 함수는 구분연속상수(piecewise continuous constant)값을 갖는 직교함수 집합으로 1969년에 전기공학자인 Harmuth에 의해 처음으로 사용되었다. 그리고 C·F Chen과 Hsiao에 의하여 처음 도입된 적분연산 행렬은 블럭펄스 함수 및 여러 직교함수들이 시스템의 해석, 동정, 제어기 설계 등의 분야에 널리 이용될 수 있는 계기를 제공하였다[1-2]. 1970년대 이후 블럭펄스 함수는 월쉬(Walsh) 또는 하알(Haar)함수 등의 직교함수보다 연산이 간단하기 때문에 선형 시변계와 비선형계 등의 제어문제 등에 널리 이용되어 왔다[3-4, 9]. Sannuti는 블럭펄스 함수를 이용하여 월쉬함수보다 작은 계산량으로 최적제어 문제를 해결할 수 있음을 보였다. 1978년에 Rao 및 Strinivasan등은 시스템 해석에 블럭펄스 변환을 이용하였고, 그 다음 해에 시지연(time delay)에 대한 새로운 블럭펄스 함수의 연산행렬을 소개함으로써 직교함수의 응용을 한층 더 확장시켰다[2]. 또한 1980년도 이들

은 편미분 방정식(partial differential equation)의 해를 구하기 위하여 다차원 블럭펄스 함수를 소개하였다. 1983년에 Rao와 Paranisamy는 반복되는 적분연산의 곱에 의해 발생하는 오차의 누적을 줄이기 위하여 블럭펄스 함수의 OSOMRI (One Shot Operational Matrix for Repeated Integration)를 유도하였다[1-2, 8]. 1987년에 Zhu와 Lu는 대규모시스템의 계층별 최적제어 문제에 블럭펄스 함수를 적용하여 유용성을 검증하였으며[4-5], 현재 다양한 시스템들의 해석 및 제어기 설계 문제에 널리 이용되고 있다.

블럭펄스 함수를 이용하여 시스템 문제를 해결하는데 있어서 가장 중요한 문제중의 하나는 블럭펄스 함수의 적분 연산 행렬에 의하여 적분된 함수 값이 실제 적분함수 값에 근접하도록 오차를 줄이는 것이라 할 수 있다. 그러나 기존 적분 연산행렬에 의하여 얻어진 적분함수의 계수는 특정 구간에서 적분함수의 평균 면적과 같게 되므로 함수 값이 곡선인 구간에는 오차의 크기가 커지게 되는 단점을 갖게 된다[2]. 따라서 본 논문에서는 라그랑지 보간법(Lagrange interpolation)을 이용하여 근사함수를 얻고, 이 함수로부터 새로운 적분 연산 행렬을 유도하였다. 제안된 적분 연산행렬은 기존의 적분 연산행렬과 비교했을 때 적분오차를 줄일 수 있으므로 신호처리 및 제어분야에 더욱 폭 넓게 이용될 수 있을 것이다. 본 논문의 구성은 2절에서 블럭펄스 함수의 정의, 성질, 적분 연산 행렬을 소개하였고, 3절에서는 새로운 적분연산행렬의 유도과정을 기술하였다. 4절에서는 발생하는 오차를 분석하였

* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子컴퓨터工學部 博士課程

** 正 會 員 : 韓國原子力 研究所 招聘 研究員 · 工博

*** 正 會 員 : 成均館大 電氣電子컴퓨터工學部 教授 · 工博

接受日字 : 1998년 12월 1일

最終完了 : 1999년 5월 20일

고, 5절에서는 적용 예를 이용해 제안된 연산행렬의 우수성을 검증하였으며, 6절은 결론으로 구성되어 있다.

2. 블럭펄스 함수

2.1 블럭펄스 함수 정의

블럭펄스 함수는 구형파의 형태로 1과 0의 값만을 취하는 함수의 집합으로 구성되며, 구간 $t \in [0, t_f)$ 에서 다음과 같이 정의된다[1-6].

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1, & i\Delta t \leq t < (i+1)\Delta t \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases} \quad (2.1)$$

단, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$

구간 $t \in [0, t_f)$ 는 m 개의 세부구간으로 나뉘며 세부 구간은 $\Delta t = \frac{t_f}{m}$ 이다. 여기서 m 은 블럭펄스 함수의 전개항수를 나타낸다.

블럭펄스 함수는 다음과 같은 몇 가지의 기본 특성을 갖고 있다[1-2].

[비결합성(disjointness)]

블럭펄스 함수는 구간 $t \in [0, t_f)$ 에서 다음과 같은 비결합(disjointness)특성을 갖고 있다.

$$\psi_i(t) \psi_j(t) = \begin{cases} \psi_i(t), & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

단, $i, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 이다.

두 블럭펄스 함수의 곱은 식(2.2)에서 보는 바와 같이 m 개의 블럭펄스 함수 중 한 함수가 된다. 이러한 특성을 식(2.1)의 블럭펄스 함수 정의로부터 쉽게 알 수 있으며 블럭펄스 함수의 비결합특성으로 인해서 블럭펄스 급수를 이용하여 곱셈이나 나눗셈 또는 그 밖의 연산을 수행할 때 연산이 간단해 질 수 있다.

[직교성(orthogonality)]

블럭펄스 함수는 구간 $t \in [0, t_f)$ 에서 다음과 같은 직교 특성을 갖는다.

$$\int_0^{t_f} \psi_i(t) \psi_j(t) dt = \begin{cases} \Delta t, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

단, $i, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 이다.

이 특성은 블럭펄스 함수의 비결합 특성으로부터 직접 얻을 수 있으며, 임의의 적분 가능한 함수의 블럭펄스 급수 전개시 블럭펄스 함수 계수벡터를 결합하기 위해 이용된다.

2.2 블럭펄스 함수의 급수 전개

구간 $t \in [0, t_f)$ 에서 적분 가능한 임의 함수 $f(t)$ 는 m 개의 블럭펄스 함수로 식(2.4)와 같이 유한급수 전개할 수 있다[1-2, 6].

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{m-1} f_i \psi_i(t) \quad (2.4)$$

i 번째 블럭펄스 함수 계수 벡터 값 f_i 는 식(2.5)로 정의된 평균자승 오차를 최소화하는 값으로 식(2.6)과 같이 근사적으로 구해진다.

$$\epsilon = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f_i \psi_i(t) \right]^2 dt \quad (2.5)$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t_f} f(t) \psi_i(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} f(t) dt \quad (2.6)$$

식(2.6)은 블럭펄스 함수 계수벡터들의 기하학적 의미를 나타낸다. i 번째 블럭펄스 함수의 계수벡터 f_i 는 i 번째 미소 구간에서 원함수 $f(t)$ 의 적분 평균값이다. 이는 i 번째 블럭펄스 함수의 계수벡터인 f_i 는 $f(t)$ 의 곡선 중 미소구간 $t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ 에서 면적과 관계가 있다. 이와 같은 관점으로부터 함수 $f(t)$ 를 쉽게 블럭펄스 함수 급수로 전개할 수 있다.

2.3 블럭펄스 함수의 적분 연산행렬

식(2.4)에서와 같이 적분 가능한 임의 함수를 블럭펄스 함수로 유한급수 전개할 수 있는 것과 같이 블럭펄스 함수의 적분 역시 다음과 같은 적분 연산행렬을 이용하여 유한 급수 전개할 수 있다[1-4].

$$\int_0^t \Psi(\tau) d\tau \cong P \Psi(t) \quad (2.7)$$

$\Psi(t)$ 는 m 개의 블럭펄스 함수로 구성된 벡터로 다음과 같으며

$$\Psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{m-1}(t)]^T \quad (2.8)$$

적분 연산행렬 P 는 다음과 같다.

$$P = \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

i 번째 블럭펄스 함수의 적분은 다음과 같은 급수 형태로 표현할 수 있다[3].

$$\int_0^t \psi_i(\tau) d\tau \cong \frac{\Delta t}{2} \psi_i(t) + \Delta t \sum_{j=i+1}^{m-1} \psi_j(t) \quad (2.10)$$

그러므로 연산행렬을 이용하여 임의의 함수 $f(t)$ 를 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \cong F^T P \Psi(t) \tag{2.11}$$

여기서, $F : f(t)$ 의 블럭펄스 함수 계수벡터

3. 새로운 적분 연산행렬

적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 의 적분을 새로운 함수로 정의하면

$$w(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \tag{3.1}$$

이고, 식(3.1)을 블럭펄스 함수의 적분 연산행렬을 이용하여 구하면 다음과 같다[2-3].

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{\Delta t}{2} f_i + \Delta t \sum_{j=1}^i f_j \right) \phi_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{w}_i \phi_i(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

식(3.2)에서 i 번째 계수에 대하여 다시 쓰면

$$\tilde{w}_i = \frac{\Delta t}{2} f_i + \Delta t \sum_{j=1}^i f_j \tag{3.3}$$

이고, 식(2.6)에 의하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i &= \frac{1}{2} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} f(t) dt + \int_0^{(i-1)\Delta t} f(t) dt \\ &= \frac{w((i-1)\Delta t) + w(i\Delta t)}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

식(3.1)에 대하여 직접 구한 블럭펄스 계수는 다음과 같다.

$$w_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} w(t) dt \tag{3.5}$$

식(3.4)는 두 점 $(i-1)\Delta t$ 와 $i\Delta t$ 사이에서 $w(t)$ 의 평균치이다. 즉 기존의 적분 연산행렬에 의하여 적분된 함수의 블럭펄스 계수 \tilde{w}_i 는 구간에서 함수 $w(t)$ 의 평균값이므로 커브인 구간에서는 식(3.5)에 대하여 오차는 커지게 된다[2]. 그래서 라그랑지 보간법을 이용하여 식(3.1)의 적분함수에 대한 근사 함수를 구하고, 그 함수에 대한 블럭펄스 계수를 구함으로써 더 작은 오차를 갖는 값을 구할 수 있다. $w(t)$ 의 근사함수를 구하기 위하여 $t_0 = (i-3)\Delta t$, $t_1 = (i-2)\Delta t$, $t_2 = (i-1)\Delta t$, $t_3 = i\Delta t$ 의 네 점이 $w(t)$ 를 지난다고 하면 다음과 같은 근사 함수를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= -w((i-3)\Delta t) \frac{\{t-(i-2)\Delta t\}\{t-(i-1)\Delta t\}\{t-i\Delta t\}}{6(\Delta t)^3} \\ &\quad + w((i-2)\Delta t) \frac{\{t-(i-3)\Delta t\}\{t-(i-1)\Delta t\}\{t-i\Delta t\}}{2(\Delta t)^3} \\ &\quad - w((i-1)\Delta t) \frac{\{t-(i-3)\Delta t\}\{t-(i-2)\Delta t\}\{t-i\Delta t\}}{2(\Delta t)^3} \\ &\quad + w(i\Delta t) \frac{\{t-(i-3)\Delta t\}\{t-(i-2)\Delta t\}\{t-(i-1)\Delta t\}}{6(\Delta t)^3} \end{aligned} \tag{3.6}$$

이러한 4개의 점을 통과하는 3차 이하 함수는 다음 정리에

의하여 유일하게 한 개 만 존재한다.

정리 1: $w(t)$ 상의 서로 다른 t_0, t_1, t_2, t_3 에 대하여 4개의 점 $(t_0, w(t_0)), (t_1, w(t_1)), (t_2, w(t_2)), (t_3, w(t_3))$ 를 지나는 3차 이하의 다항식 $\bar{w}_3(t)$ (즉, $\bar{w}_3(t_i) = w(t_i), (0 \leq i \leq n(=3))$)는 오직 하나뿐이다.

[정리 1 : 증명]

먼저 수학적 귀납법에 의하여 존재성을 살펴보면 $n=0$ 일 때 $(t_0, w(t_0))$ 를 지나는 0차의 다항식 즉, 상수함수 $\bar{w}_0(t) = w(t_0)$ 가 존재한다. 다음 $n=2$ 일 때 t_0, t_1, t_2 에 대해 $\bar{w}_2(t_i) = w(t_i), 0 \leq i \leq 2$ 인 2차 이하의 다항식 $\bar{w}_2(t)$ 가 존재한다고 가정하자. 이제 t_3 은 t_0, t_1, t_2 와 다르므로 다음의 3차 이하의 다항식

$$w_3(t) = w_2(t) + C(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) \tag{3.7}$$

$$C = \frac{w(t_3) - \bar{w}_2(t_3)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \tag{3.8}$$

을 만들 수 있다. 한편 $i = 0, 1, 2$ 에 대하여

$$\bar{w}_3(t_i) = \bar{w}_2(t_i) + C \cdot 0 = \bar{w}_2(t_i) = w(t_i) \tag{3.9}$$

이며

$$\bar{w}_3(t_3) = w(t_3) \tag{3.10}$$

이다. 따라서 $\bar{w}_3(t_i) = w(t_i), (0 \leq i \leq 3)$ 를 만족하는 3차 이하의 다항식은 존재한다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 $i=3$ 에 대하여 존재성이 성립한다.

정리의 성질 $\bar{w}_3(t_i) = w(t_i), (0 \leq i \leq 3)$ 을 만족하는 3차 이하의 유일성을 보이기 위하여 또 다른 3차 이하의 다항식 $\bar{H}_3(t)$ 가 그 성질을 만족한다고 가정하자 그러면 두 다항식의 성질에 의하여 3차 이하의 다항식 $g(t) = \bar{w}_3(t) - \bar{H}_3(t)$ 는

$$g(t_i) = \bar{w}_3(t_i) - \bar{H}_3(t_i) = w(t_i) - w(t_i) = 0, 0 \leq i \leq 3 \tag{3.11}$$

이 되므로 $g(t)$ 는 4개의 근을 갖는다. 그러나 $g(t)$ 는 3차 이하의 다항식이므로 $g(t) = 0$ 이 되어야 한다. 따라서 $\bar{w}_3(t) = \bar{H}_3(t)$ 가 되어 이러한 다항식은 유일하다. ■

식(3.6)에서 얻은 함수 $\bar{w}(t)$ 의 i 번째 블럭펄스 계수는

$$\begin{aligned} \bar{w}_i &= \frac{1}{24} w((i-3)\Delta t) - \frac{5}{24} w((i-2)\Delta t) \\ &\quad + \frac{19}{24} w((i-1)\Delta t) + \frac{9}{24} w(i\Delta t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

이다. 여기서 함수 $w(t)$ 는 $f(t)$ 의 적분함수이므로

$w(i\Delta t)$, $w((i-1)\Delta t)$, $w((i-2)\Delta t)$, $w((i-3)\Delta t)$ 는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$w(i\Delta t) = \int_0^{i\Delta t} f(t)dt = \Delta t(f_1 + f_2 + \dots + f_i) \tag{3.13}$$

$$w((i-1)\Delta t) = \int_0^{(i-1)\Delta t} f(t)dt = \Delta t(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1}) \tag{3.14}$$

$$w((i-2)\Delta t) = \int_0^{(i-2)\Delta t} f(t)dt = \Delta t(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-2}) \tag{3.15}$$

$$w((i-3)\Delta t) = \int_0^{(i-3)\Delta t} f(t)dt = \Delta t(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-3}) \tag{3.16}$$

위 식(3.13)~식(3.16)을 식(3.12)에 대입하여 정리하면 $\bar{w}(t)$ 의 블럭펄스 계수 값들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$i=1$ 인 경우

$$\bar{w}_1 = \frac{\Delta t}{2} f_1 \tag{3.17}$$

$i=2$ 인 경우

$$\bar{w}_2 = \Delta t \left(\frac{28}{24} f_1 + \frac{9}{24} f_2 \right) \tag{3.18}$$

$i=3$ 인 경우

$$\bar{w}_3 = \Delta t \left(\frac{23}{24} f_1 + \frac{28}{24} f_2 + \frac{9}{24} f_3 \right) \tag{3.19}$$

$i = 4, 5, 6, \dots, m$ 인 경우

$$\bar{w}_i = \Delta t \left(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-3} + \frac{23}{24} f_{i-2} + \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{9}{24} f_i \right) \tag{3.20}$$

위의 식들은 함수 $f(t)$ 의 적분에 대한 근사함수의 계수 값들이다. 그러므로 식(3.17)~식(3.20)에 의하여 $f(t)$ 의 적분은 새로운 적분 연산행렬에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = F^T \bar{P} \Psi(t) \tag{3.21}$$

여기서

$$F^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{m-1} \ f_m] \tag{3.22}$$

$$\bar{P} = \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{12} & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & \frac{9}{12} & \frac{7}{3} & \frac{23}{12} & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{12} & \frac{7}{3} & \frac{23}{12} & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{9}{12} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{9}{12} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

4. 오차 분석

본 절에서는 적분 연산행렬과 새로운 적분 연산행렬에 의하여 생기는 오차에 대하여 분석하여 보자.

정리 2 : 적분 연산행렬 P 에 의한 오차

$$w_i - \tilde{w}_i = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \ddot{w}(\tau) \tag{4.1}$$

여기서, $\tau \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$

[정리 2 : 증명]

식(3.5)를 다시 쓰면

$$w_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} w(t)dt \tag{4.2}$$

이다. 그러므로 식(3.4), 식(4.2)를 식(4.1)에 대입하면

$$w_i - \tilde{w}_i = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} w(t)dt - \Delta t \frac{w((i-1)\Delta t) + w(i\Delta t)}{2} \right) \tag{4.3}$$

이고, 또한 라그랑지 선형 보간법의 오차는 다음과 같다[7].

$$w(t) - p_1(t) = (t - (i-1)\Delta t)(t - i\Delta t) \frac{\ddot{w}(\tau)}{2} \tag{4.4}$$

여기서 $p_1(t)$ 는 $w(t)$ 의 선형 보간다항식(linear interpolation polynomial)이다.

식(4.4)를 적분하면

$$\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} w(t) dt - \frac{\Delta t}{2} [w((i-1)\Delta t) + w(i\Delta t)] = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} (t - i\Delta t)(t - (i-1)\Delta t) \frac{\ddot{w}(\tau)}{2} dt \tag{4.5}$$

이고, 식(4.5)의 우변 식에 $t - (i-1)\Delta t$ 를 v 로 치환하여 적분하면

$$\int_0^{\Delta t} (v - \Delta t)v dv \frac{\ddot{w}(\tau)}{2} = -\frac{(\Delta t)^3}{12} \ddot{w}(\tau) \tag{4.6}$$

를 구할 수 있다. 그러므로 식(4.5)는 다음과 같다.

$$\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} w(t) dt - \frac{\Delta t}{2} [w((i-1)\Delta t) + w(i\Delta t)] = -\frac{(\Delta t)^3}{12} \ddot{w}(\tau) \tag{4.7}$$

식(4.7)을 식(4.3)에 대입하면

$$w_i - \tilde{w}_i = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \ddot{w}(\tau) \tag{4.8}$$

이다. ■

정리 3 : 새로운 적분연산 행렬 \bar{P} 에 의한 오차

$$w_i - \bar{w}_i = \frac{19}{720} (\Delta t)^5 w^{(4)}(\zeta) \tag{4.9}$$

여기서 $\zeta \in [(i-3)\Delta t, i\Delta t]$ 이다.

[정리 3 : 증명]

라그랑지 3차 보간법에 의한 오차는 다음과 같다[7].

$$w(t) - \bar{w}(t) = \frac{1}{4!} [(t - (i-3)\Delta t)(t - (i-2)\Delta t)(t - (i-1)\Delta t)(t - i\Delta t)] w^{(4)}(\zeta) \quad (4.10)$$

여기서 $\zeta \in [(i-3)\Delta t, i\Delta t]$

그러므로 블록펄스 계수에 대한 오차는 식(2.6)에 의하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$w_i - \bar{w}_i = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} w(t) dt - \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \bar{w}(t) dt \quad (4.11)$$

$$= \frac{19}{720} (\Delta t)^5 w^{(4)}(\zeta)$$



식(4.4)와 식(4.11)을 살펴보면 오차는 세부구간 Δt 가 작을 때 즉 전개항수 m 이 증가할수록 제시된 적분 연산행렬에 의한 오차는 급속히 감소함을 알 수 있다.

5. 적용 예

5.1 t^2 함수의 적분

식(5.1)과 같이 표현되는 미분을 초기값은 0이고 구간 $t \in [0, 1)$ 에서 전개항수 $m=5$ 로 하여 적분 값을 구하여 보자.

$$f(t) = t^2 \quad (5.1)$$

t^2 함수에 대한 블록펄스 함수의 계수벡터는 [0.0133 0.0933 0.2533 0.4933 0.8133] 과 같이 얻을 수 있으며 이때, 각각의 적분 연산행렬은 식 (2.9)와 식 (3.17)에 의해 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0.100 & 0.2333 & 0.1917 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0 & 0.0750 & 0.2333 & 0.1917 & 0.2000 \\ 0 & 0 & 0.0750 & 0.2333 & 0.1917 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0750 & 0.2333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0750 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

식(5.2), 식(5.3)과 같이 적분 연산행렬들을 구하면 식 (2.11), 식(3.15)에 의하여 적분함수에 대한 계수벡터를 구할 수 있다. 그리고 식(5.1)의 실제 적분함수는 $f(t) = \frac{1}{3} t^3$ 이다. 그러므로 실제함수에 대한 계수와 적분 연산행렬들을 이용하여 구한 계수는 표 1과 같다.

표 1. t^2 의 적분값

Table 1. Integration values of t^2

f_i	실제 계수	기존의 적분 연산행렬 P	제안된 적분 연산행렬 \bar{P}
f_1	0.0007	0.0013	0.0013
f_2	0.0100	0.0120	0.0101
f_3	0.0433	0.0467	0.0433
f_4	0.1167	0.1213	0.1167
f_5	0.2460	0.2520	0.2460

$$E_{error} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i - \bar{f}_i)^2} \quad (5.4)$$

여기서, f_i : 실제 계수

\bar{f}_i : 적분 연산행렬에 의해 얻어진 값

식(5.4)와 같이 정의된 오차 식을 이용하여 오차를 구하였을 때 기존의 적분 연산행렬은 0.0086의 오차가 발생했고 제안된 적분 연산행렬은 0.0006786의 값을 얻었다. 그러므로 제안된 적분 연산자를 이용하였을 경우가 기존의 방법에 비해 훨씬 실제 계수에 대한 오차가 적음을 알 수가 있다. 또한 표 1을 보면 각 구간마다의 오차도 제안된 적분연산행렬의 경우가 적게 나타남을 알 수 있다.

5.2 미분 방정식

다음은 식(5.5)와 같이 표현되는 간단한 미분방정식을 생각해 보자

$$\dot{f}(t) - f(t) = 0, \quad f(0) = 1 \quad (5.5)$$

식(5.5)의 방정식 해를 직접 구하면 $f(t) = e^t$ 의 해를 갖는다. 또한 블록펄스 함수를 이용하기 위하여 구간은 $t \in [0, 1)$ 으로 전개항수는 $m=10$ 으로 선정하면 미분 방정식은 다음과 같은 대수방정식으로 변환된다.

$$[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{10}] - [1 \ 1 \ \dots \ 1] = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{10}]P \quad (5.6)$$

여기서 f_i 는 $f(t)$ 의 블록펄스 계수이고 P 는 적분 연산행렬이다. 그러므로 $f(t)$ 의 계수 값은 다음 식에서 얻을 수 있다.

$$[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{10}] = (I_{10 \times 10} - P)^{-1} [1 \ 1 \ \dots \ 1] \quad (5.7)$$

각각의 적분 연산행렬을 대입하여 계산한 결과는 다음 표와 같다.

표 2. 식(5.5)의 해
Table 2. Solution of Eq.(5.5)

f_i	실제 계수	기존의 적분	제안된 적분
		연산행렬 P	연산행렬 \bar{P}
f_1	1.0517	1.0526	1.0526
f_2	1.1623	1.1634	1.1666
f_3	1.2846	1.2859	1.2852
f_4	1.4197	1.4213	1.4203
f_5	1.5690	1.5709	1.5696
f_6	1.7340	1.7362	1.7347
f_7	1.9163	1.9190	1.9172
f_8	2.1179	2.1210	2.1188
f_9	2.3406	2.3442	2.3416
f_{10}	2.5868	2.5910	2.5879

식(5.4)에 의해 오차를 구하면 기존의 방법은 0.0079의 값을 가지고 본 연구 방법은 0.0049의 값을 갖는다. 더 나은 결과를 갖게 됨을 알 수 있다.

5.3 시변 시스템의 최적제어

다음과 같은 시변 시스템에 대하여

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10t & 1 \\ 1 & -5t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.8a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.8b)$$

식(5.9)로 표시되는 평가함수 J 를 최소화하는 최적제어문제를 다루어 보자.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (5.9)$$

여기서 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $t_f = 2$

전개함수를 $m=20$ 으로 선정하여 시뮬레이션을 하였다. [3]의 방법으로 평가함수는 $J=435.5$ 를 얻었고 본 연구 방법은 $J=431.7$ 의 나아진 평가함수 값을 얻었다. 그림 1과 그림 2는 본 연구방법으로 얻어진 최적 상태와 최적 입력을 나타낸 것이다.

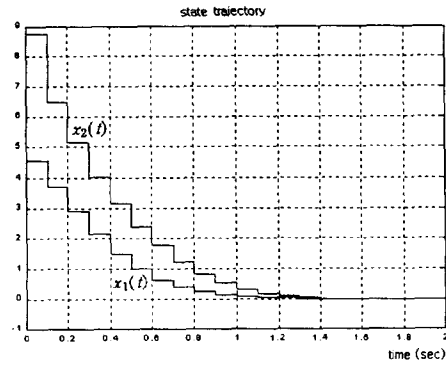


그림 1 최적 상태 궤적
Fig. 1 Optimal state trajectory

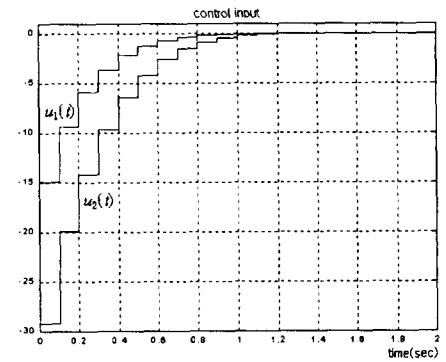


그림 2 최적 제어입력
Fig. 2 Optimal control input

6. 결론

직교함수가 제어문제 해석에 많이 이용되고 있는데 그 이유는 제어이론의 제반 문제들을 대수적인 접근방법으로 변환하여 해결할 수 있기 때문이다. 이와 같은 대수적 변환은 직교함수의 적분 연산행렬에 의하여 이루어질 수 있다. 본 논문에서는 최근 많이 이용되고 있는 블럭펄스 함수에 적분 연산행렬이 갖는 오차를 줄일 수 있는 새로운 적분 연산행렬을 제시하였다. 또한 각각의 적분 연산행렬들이 갖는 오차를 분석하여 보았고 실제 함수, 미분 방정식 그리고 시변 시스템의 최적제어문제를 다루었다. 앞 절의 결과들을 살펴보면 제시된 방법이 기존의 방법보다 개선된 값을 얻게 됨을 알 수가 있었다. 그러므로 제시된 적분 연산행렬을 이용하여 비선형 시스템의 제어문제나 파라미터 추정에 적용한다면 기존의 블럭펄스 적분 연산행렬을 이용하는 것보다 더 정확하게 문제를 해결할 수 있으리라 사료된다. 또한 본 논문에서는 오차의 개선 효과와 계산의 복잡성을 고려하여 보간법의 차수를 시행 착오적으로 선정하였는데 향후 이론적으로 최적의 차수를 결정할 수 있는 방법은 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] K. B. Datta & M. Mohan, orthogonal Functions in Systems and Control, Word Scientific Publishing Co., 1995.
- [2] Z. H. Jian, W. Schoufelberger, Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems, Springer-verlag, 1992.
- [3] N. S. Hsu and B. Cheng, "Analysis and Optimal Control of time-varying linear systems Via block-pulse functions", Int. J. Control, Vol. 33, No. 6, pp. 1123-1133, 1981.
- [4] 이한석, 조영호, 이명규, 안두수, "블럭펄스 함수에 의한 비선형계의 2계층 최적제어", 대한전기학회 논문지, 47권 4호, pp. 494-502, 1998.
- [5] J. M. Zhu and Y. Z. Lu, "New Approach to Hierarchical Control Via Block Pulse Transformation, Int. J. Control, Vol. 46, No. 2, pp. 441-453, 1987.
- [6] W. Shienyu, "Convergence of block pulse series approximation solution for optimal control problem", Int. J. Systems Sci. Vol. 21, No. 7, pp. 1355-1368, 1990.
- [7] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 7th. Ed., Wiley.
- [8] A. Deb, G. Sarkar, M. Bhattacharjee and S. K. Sen, "All-integrator Approach to Linear SISO Control System Analysis using Block Pulse Functions (BPF)", J. Franklin Inst., Vol. 334B, No. 2, pp. 319-335, 1997.
- [9] A. Deb, G. Sarkar and S. K. Sen, "Linearly pulse width modulated block pulse functions and their application to linear SISO feedback control system identification", IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 142, No. 1, pp. 44-50, January, 1995.

저 자 소 개



조영호(曹永鎬)

1973년 8월 1일생. 1996년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업. 현재 동 대학원 전기전자컴퓨터공학부 박사과정

Tel : 0331-290-7167

E-mail : choyh@ece.skku.ac.kr



신승권(申勝權)

1972년 8월 1일생. 1996년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업. 현재 동 대학원 전기전자컴퓨터공학부 박사과정

Tel : 0331-290-7167

E-mail : newsk2@ece.skku.ac.kr



이한석(李漢錫)

1966년 1월 11일생. 1990년 성균관대학교 전기공학과 졸업. 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1996년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1997년 한국원자력연구소 Post DR. 현재 한국원자력연구소 초빙연구원.

Tel : 02-970-1332

E-mail : 21seok@unitel.co.kr

안두수(安斗守)

전기학회논문지 제48권 제5호 참조