

3차원 경사크랙을 가진 중공축의 응력확대계수산정

이 종 선*, 하 영 민**

Computation of Stress Intensity Factors of Hollow Cylinder with Three Dimension Inclination Cracks

Jong-Sun Lee*, Young-Min Ha**

Abstract

In this study, stress intensity factors K_I , K_{II} , K_{III} are existing at the same time to a hollow cylindrical bar of three dimension inclination crack. In order to investigate by experimentally the effect of the inclination angle ψ of crack, artificial inclination cracks in the circumferential direction are put in the surface of a hollow cylindrical bar made by the epoxy-resin. Experimentally, stress analysis methods of stress intensity factors were proposed. But, suitable method are the caustic method and the photoelastic stress freezing method. The mixed mode of K_I and K_{II} were determined by the photoelastic method of the classical approach method and the FORTRAN language program of the used smallest square method.

Keywords : Stress Concentration(응력집중), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Experimental Stress Analysis(실험 응력해석)

1. 서론

오늘날 구조물의 대형화, 용접구조물의 증가 등 가혹한 사용조건이 증가하는 추세이므로 구조물 안전을 위한 파괴역학적 고려는 필수적이다. 파괴역학은 정해진 외적조건에 대하여 하중의 작용하에서 사용하는 구조물의 파괴조건을 명확하게 할 수 있다. 파괴역학에 있어서 응력확대계수는 가장 중요한 변수이며 응력확대계수의 도입에 의해

크랙거동을 정량적으로 평가할 수 있다. 일반적으로 재료 결함이나 피로 등에 의해 발생하는 크랙에 의한 파괴나 중공축에서 발생하는 비틀림에 의한 파괴는 중대한 사고를 일으킬 위험이 있으므로 크랙선단의 응력해석은 안전설계상 매우 중요하다. 더욱이 재료의 결함이나 크랙의 진전거동 등 파괴형상에 대한 검토는 중요하며 특히 자동차의 프로펠라축과 토션바(torsion bar)와 같은 중공축이 비틀림모멘트를 받아 변형되는 것과 같이 기계부품의 설

* 대전대학교 기계설계공학과

** 국민대학교 기계설계학과

계와 관련하여 매우 중요하다.

본 논문에서는 K_I , K_{II} , K_{III} 가 동시에 존재하는 중공축의 3차원 경사크랙에 대하여 크랙의 경사각도의 영향을 조사하였다. 이를 위하여 에폭시 수지봉을 제작하고 광탄성법과 Caustics법의 병용법을 이용하였으며 양 실험방법의 장점을 살려 혼합모드의 응력확대계수 K_I , K_{II} , K_{III} 의 값을 분리하여 구하고, K 값과 크랙의 경사각도와의 관계, 크랙형상에 따른 K 값의 변화 및 K_{II}/K_I 의 비를 조사하였다.

2. 시험편

본 실험에 사용한 재료는 Epoxy CT-200에 강화제 HT903을 중량비 100 : 30으로 혼합하여 Fig. 1과 같이 가공하였다. 중공축 시험편은 길이 200mm, 직경 52mm, 중공경 26mm, 크랙최심점 깊이 7.2mm~10.6mm이다. 크랙최심점 깊이를 7.2mm~10.6mm로 결정한 이유는 크랙 깊이가 모델 두께의 1/2이상 깊어야 정확한 K 값을 얻을 수 있으며 크랙 깊이에 따른 K 값의 변화를 측정하기 위함이다. 날카로운 크랙선단을 얻기 위하여 크랙가공에는 두께 0.15mm, 직경 70mm의 얇은 Cutter를 사용하였다. 이때 시험편의 원주방향을 기준으로 15°, 30°, 45°, 60°의 원호표면 경사크랙을 자유표면에 수직으로 넣은 후 면도날을 이용하여 크랙선단을 가공하였다. 또한 시험편 제작중에 발생하는 잔류응력을 제거하기 위하여 풀림처리하였다. 본 실험에 사용한 Epoxy수지의 재료특성은 Young률 17.13Mpa, 포아송비 0.484이며 Table 1에 시험편의 제원을 나타낸다. 여기서 D 는 직경, r 은 내경, a 는 크랙깊이, R 은 반경, T 는 비틀림모멘트, α 는 광탄성 감도이다.

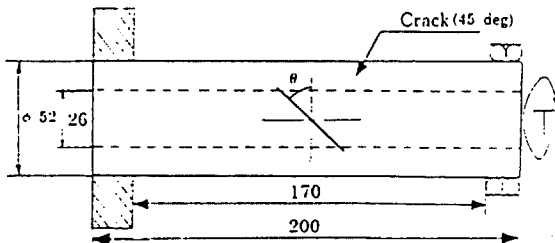


Fig. 1 Test specimen geometry

Table 1 Property of test specimens

No	Crack angle	D mm	d mm	R mm	a mm	T N·m	α fr mm/N
1	15°	52	26	26	9.4	3.489	3.95
2	30°	52	26	26	7.8	3.489	3.92
3	45°	52	26	26	7.2	3.489	3.87
4	60°	52	26	26	9.2	3.489	3.99

3. 실험방법

본 실험의 응력동결은 Fig. 2와 같이 시험편 전체가 균일온도가 되도록 로의 온도를 125°C까지 올려 3시간 후에 하중을 부하하였으며 6시간 유지한 후 2.5°C~3.0°C/h의 온도 강하로 25°C~30°C까지 서냉하여 응력동결을 완료하였다. 비틀림 시험기를 사용하여 중공축에 모멘트를 가하기 위하여 좌단을 고정하여 시험편이 축방향의 응력을 받지 않도록 하였으며 우단은 자유롭게 하였다. Fig. 3과 같이 응력을 동결한 시험편의 크랙 선단부근에 대하여 수직방향으로 각각 평균 5mm의 두께로 절취 (Slice)하여 표면 연마후, 광탄성 장치로 등색선 호사진을 촬영하였다. 크랙선단의 등색선 호사진을 투영기에 확대하여 크랙선단으로부터 각 호의 최원점까지의 거리, 호의 차수 및 호의 각도를 측정하여 K_I , K_{II} 의 값을 구하였다.

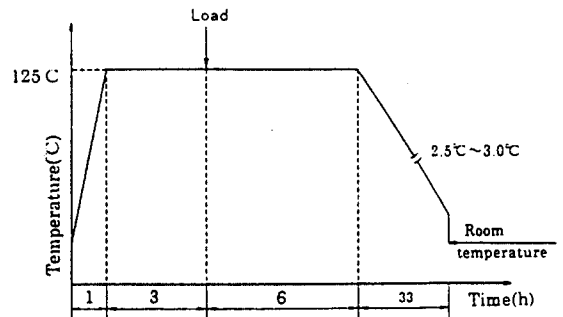


Fig. 2 Stress freezing cycle

Caustics법에 의한 3차원 크랙의 K_{III} 값을 구하기 위하여 광탄성법으로부터 등색선 호의 촬영이 끝난 표면변형이 없는 절취편을 응력동결시와 동일 사이클로 풀림처리하여 응력을 해방시키면, 크랙표면에는 동결전의 비틀림모

멘트에 대응한 변형이 생기게 되어, 입사한 광의 경로가 변형하여 방향이 구부러지며 그 결과 스크린 상에 빛이 오지않는 부분이 나타난다. 이것이 Caustics상이 된다. 이 변형을 Fig. 4의 반사형 Caustics상 형성장치를 이용하여 K_{III} 의 해석을 실행하였다.

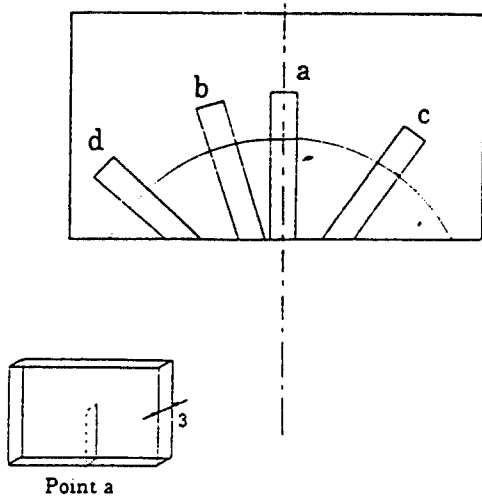


Fig. 3 Slice location

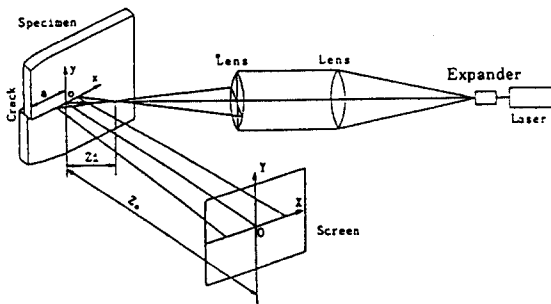


Fig. 4 Optical setup for experiment using reflected caustics with divergent

4. 응력확대계수 K_I , K_{II} 의 산정

혼합모드의 응력확대계수 산정법으로 유용한 Sanford 방법¹⁾과 최소자승법을 이용한 FORTRAN 프로그램²⁾을 이용하여 해를 얻는다. Fig. 5와 같은 좌표계에서 모드 I, II의 응력이 작용하고 있을 때 등색선 호는 다음 식³⁾

으로 나타낼 수 있다.

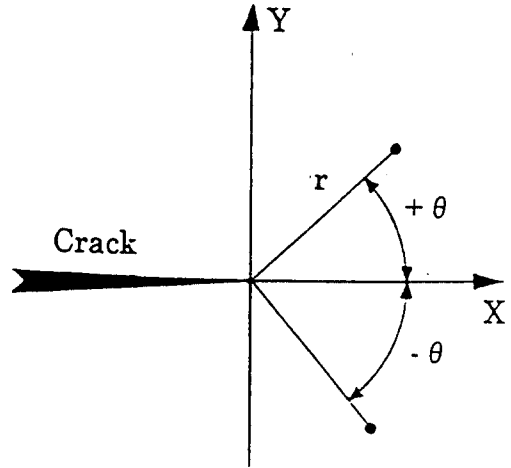


Fig. 5 Isochromatic fringe pattern for mode I, II deformation

$$\begin{aligned}
 (2\tau_m)^2 &= (n/\alpha t)^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi r} [(K_I \sin \theta + K_{II} \cos \theta)^2 + (K_{II} \sin \theta)^2] \\
 &\quad + \frac{2\sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) + [K_I \sin \theta (1+2\cos \theta) \\
 &\quad + K_{II} (1 + \cos \theta + 2\cos^2 \theta)] + \sigma_{ox}^2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

여기서 n 은 호 차수, α 는 광탄성감도, K_I , K_{II} 는 각각 모드 I, II의 응력확대계수, σ_{ox} 는 크랙에 평행한 유한폭에 대한 수정계수(remote stress component)⁴⁾를 나타낸다.

식 (1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f_k(K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi r_k} \{ (K_I \sin \theta_k + 2K_{II} \cos \theta_k)^2 + (K_{II} \sin \theta_k)^2 \} \\
 &\quad + \frac{2\sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r_k}} \sin(\theta_k/2) [K_I \sin \theta_k (1+2\cos \theta_k) \\
 &\quad + K_{II} (1+2\cos^2 \theta_k + \cos \theta_k)] \\
 &\quad + \sigma_{ox}^2 - (n_k/\alpha t)^2 = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서 r_k , θ_k 는 호 차수 n_k 의 호상의 좌표를 나타낸다.

호로부터 4개이상의 r_k, θ_k, n_k 를 측정하여 식 (2)에 대입하면 다음과 같다.

$$[f] = [a][\Delta K] \quad (3)$$

여기서

$$[f] = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial K_I} & \frac{\partial f_1}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ox}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial K_I} & \frac{\partial f_2}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ox}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial K_I} & \frac{\partial f_m}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ox}} \end{bmatrix}$$

$$[\Delta K] = \begin{bmatrix} \Delta K_I \\ \Delta K_{II} \\ \Delta \sigma_{ox} \end{bmatrix} \quad (4)$$

최소자승법으로부터 식 (2)와 데이터를 적용시키기 위해 행렬 $[a]$ 의 전치행렬을 양변에 곱하면 다음과 같다.

$$[a]^T [f] = [a]^T [a] [\Delta K] \quad (5)$$

$[\Delta K]$ 는 양변에 $[C]$ 의 역행렬을 곱하면 얻을 수 있다.

$$[\Delta K] = [C]^{-1} [a]^T [f] \quad (6)$$

여기서 $[C] = [a]^T [a]$ 이다.

$[\Delta K]$ 를 식 (4)의 $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta \sigma_{ox}$ 의 대신하여 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (K_I)_{i+1} &= (K_I)_i + \Delta K_I \\ (K_{II})_{i+1} &= (K_{II})_i + \Delta K_{II} \\ (\sigma_{ox})_{i+1} &= (\sigma_{ox})_i + \Delta \sigma_{ox} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)로부터 임의 초기치를 $(K_I)_i, (K_{II})_i, (\sigma_{ox})_i$ 에 대입하여 연산을 반복한다. $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta \sigma_{ox}$ 의 값이 영이 될 때, 즉 $(K_I)_{i+1}, (K_{II})_{i+1}, (\sigma_{ox})_{i+1}$ 각각의 값이 거의 변화하지 않게 되면 그 값을 해로 한다.

5. Caustics법에 의한 K_{III} 의 산정

크랙선단의 좌표계를 Fig. 6과 같이 결정하면 모드 III만이 존재할 때, 크랙근방 Z방향의 변위는 다음과 같다.

$$w = \frac{2rK_{III}}{G(2\pi r)^{1/2}} \sin \theta / 2 \quad (8)$$

여기서 G는 횡탄성계수이며 r, θ 는 크랙선단에 원점을 둔 극좌표이다.

Caustics법을 이용하여 응력확대계수 K_{III} 를 측정할 경우 시험편위의 한점 P(x,y)에서 반사하는 발산광의 경로에 대하여 생각한다. 스크린위에서 X,Y축의 광의 위치는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} X &= \lambda x - 2Z_0 \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ Y &= \lambda y - 2Z_0 \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

스크린위에서 물체와 광은 1대1의 대응이 아니라, 수학적으로는 특이점의 존재와 대응하고있어 그와 같은 상태가 존재하기 위한 조건은 Jacobian 행렬식이 영이 된다.

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(X,Y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= r\lambda^2 - r^{-2}Z_0^2 \frac{K_{III}^2}{2\pi G^2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 r에 대해서 풀면 다음과 같다.

$$r = \left(\frac{Z_0 K_{III}}{\sqrt{2\pi} \lambda G} \right)^{2/3} \equiv r_0 \quad (11)$$

여기서 r_0 는 초기곡선이다.

반사광이 스크린위에 형성하는 상은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} X &= \lambda r_0 (\cos \theta + 2 \sin \theta / 2) \\ Y &= \lambda r_0 (\sin \theta - 2 \cos \theta / 2) \end{aligned} \quad (12)$$

크랙선에 대한 수직방향의 Caustics상 실제의 최대길이를 Y_{max} 로 하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$Y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \lambda r_o \quad (13)$$

결과적으로 K_{III} 를 구하는 식은 다음과 같다.

$$K_{III} = 0.5986 \frac{G\gamma_{\max}^{3/2}}{Z_o \lambda^{1/2}} \quad (14)$$

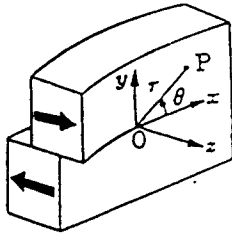


Fig. 6 The coordinate system of crack tip for mode III

6. 실험결과 및 고찰

경사크랙을 가진 중공환봉에 비틀림모멘트를 가하고 크랙선단 부근의 응력상태를 해석하기 위하여 Caustics법을 응력동결법에 적용하여 광탄성법과의 병용법을 이용하여 응력확대계수 K_I , K_{II} , K_{III} 값의 분포를 조사하였다.

광탄성법을 이용하여 K_I , K_{II} 의 값을 구한 결과 크랙의 최심점에서는 K_{II}/K_I 의 비는 최소이고, 크랙의 표면에 가까워짐에 따라 증가하며 크랙의 경사각도가 증가함에 따라 감소한다. 즉 크랙의 최심점에서 K_{II} 의 값은 최소이고 표면에 가까워짐에 따라 증가한다. 또한 K_I 의 값은 크랙의 경사각도 45° 에서 최대가 된다.

Fig. 7의 광탄성 호사진에 의하면 크랙의 최심점 a에서는 모드 I만의 호모양과 같이 보이지만, 크랙이 표면에 가까워짐에 따라 모드 I과 모드 II의 혼합모드의 광탄성 호모양으로 되며 유한폭에 대한 수정계수의 영향에 의하여 광탄성 호가 변화하여 비대칭으로 된다.

Fig. 8의 Caustics상 사진으로부터 Caustics법에 의해 구한 K_{III} 의 값은 크랙의 최심점에서 최대이고, 크랙의 표면에 가까워짐에 따라 감소한다. 또한 크랙의 경사각도가 15° 의 경우 K_{III} 의 값은 최대이고, 크랙의 경사각도가

45° 에 가까워짐에 따라 감소하며 45° 에서는 거의 영이 되고 Caustics상이 이론도형과 전혀 다른 형태의 상이 나타난다.

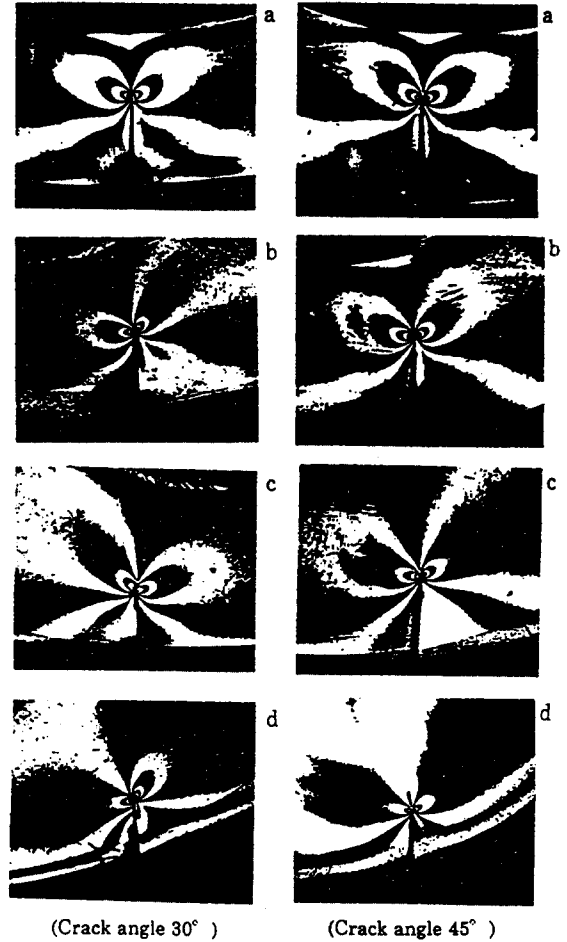


Fig. 7 Experimentally obtained isochromatic fringes of points a, b, c, d along the crack front

일반적으로 K_I , K_{II} , K_{III} 의 값이 파괴에 미치는 영향력은 다르다. 그 관계는 $K_I > K_{II} > K_{III}$ 라고 알려져 있으며 본 실험에서 구한 크랙선단 전반에 걸쳐서 K 값을 비교하면 K_{II} , K_{III} 의 값에 비하여 K_I 의 값이 크다. 즉, 본

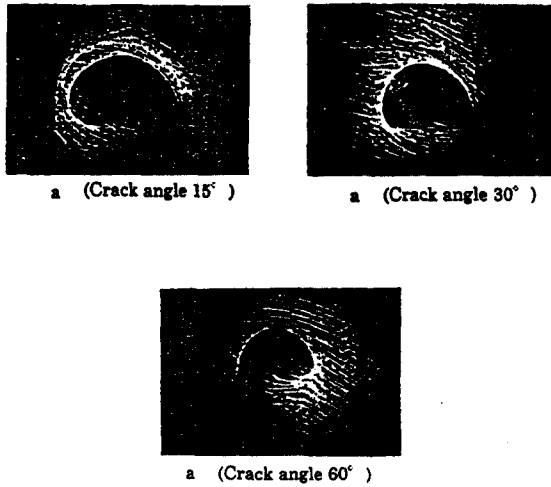


Fig. 8 Experimentally obtained caustic patterns

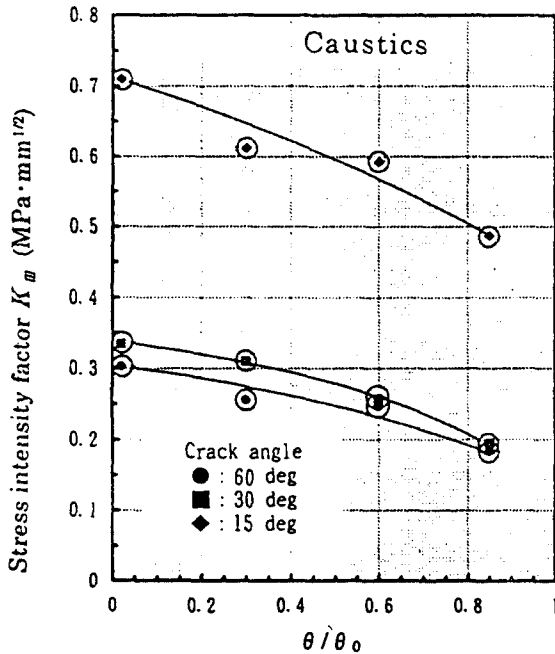


Fig. 9 Distribution of K_{III} along the crack front

실험의 파괴에서는 K_I 의 영향이 크게 작용하여 크랙은 표면에서부터 진전하여 내부로 확대된다고 생각된다. 본

실험과 같은 3차원 모델에서는 크랙이 진전한다고 가정할 경우 크랙은 시험편 내부의 크랙선단에서 진전되며 모델이 파괴에 이를 경우 응력이 해방되기 때문에 본 실험의 모델에서는 파괴인성은 구하기 어렵다. Fig. 9~10에 K_{III} 값의 각도 변화에 따른 분포 및 K_{II}/K_I 의 분포를 나타낸다.

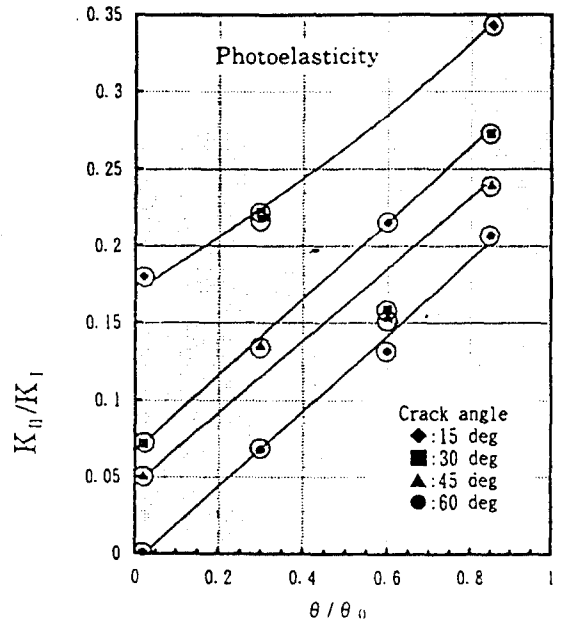


Fig. 10 Distribution of K_{II}/K_I along the crack front

7. 결론

3차원 경사크랙을 가진 중공축에 비틀림모멘트를 부하하여 광탄성법으로 K_I , K_{II} 를 구하고 Caustics법에 의해 K_{III} 를 구하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 3차원 경사크랙으로부터 응력확대계수 K_I , K_{II} 및 K_{III} 의 값을 분리하여 구하였다.
- 2) 비틀림모멘트를 받는 3차원 경사크랙의 응력확대계수 K_{II}/K_I 의 비는 크랙의 표면에서 최대이고, 크랙의 최심점에서 최소가 된다. 또한 K_{II} 의 값은 크랙의 최심점에서 최소이고 표면에 가까워짐에 따라 증가하고,

K_I 의 값은 경사각도 45° 에서 최대이다.

- 3) Caustics법에 의해 구한 K_{III} 의 값은 크랙의 최심점에서 최대이고 크랙의 표면에 가까워짐에 따라 감소하여, 크랙의 경사각도 15° 의 경우 K_{III} 의 값은 최대이고 크랙의 경사가 45° 에 가까워짐에 따라 감소하여 45° 에서 거의 영이 된다.
- 4) K_{II} , K_{III} 의 값에 비하여 K_I 의 값이 크기 때문에 K_I 의 영향이 크게 작용하여 크랙은 표면에서 진전하여 내부로 확대된다.

참 고 문 헌

- 1) R.J.Sanford and J.W.Dally, " A General Method for Determining Mixed-mode Stress-intensity Factors from Isochromatic Fringe Patterns", Engineering Fracture Mechanics, Vol.11, pp.621-633. 1979.
- 2) 高橋 賞, 野方 文雄, "광탄성법의 기계공학에의 적용과 그 응용(2)", 기계의 연구, Vol.38, No.2, pp.318-322. 1986
- 3) J.W.Dally and R.J.Sanford, " Classification of Stress-intensity Factors from Isochromatic-fringe Patterns", Experimental Mechanics, Vol.18, No.12, pp.441-448. 1978.
- 4) G.R.Irwin, " Discussion of the Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Cracks - A Photoelastic Analysis, Proc. of SESA, Vol.16, No.1, pp.93-96. 1958.
- 5) 清水 維治, 高橋 賞, "초기곡선 및 광학계가 Caustics 법의 정도에 미치는 영향", 일본 비파괴검사 협회, Vol.31, No.4, pp.253-257. 1982.
- 6) Youngmin Ha, Tsutomu EZUMI and Susumu TAJAHASHI, "Basic Stress-intensity Factors K_{II} , K_{III} of Hollow Cylinder Subjected to Torsion", Asian-pacific Conference on Strength of Materials and Structures, Beijing, China, pp.173-178. 1996.
- 7) C.W.Smith, " Experiments in Three-dimensional Fracture Problems", Experimental Mechanics, Vol.33, No.12, pp.249-262, 1993.
- 8) L.S.Srinath, N. Srinivasa Murthy and T.V. Hareesh, "Determination of Stress-intensity Factors for Cracks in Tubes Under Torsion", Experimental Mechanics, Vol.23, No.9, pp.262-267. 1983.
- 9) C.W.Smith and O. Olaosebikan, " Use of Mixed-mode Stress-intensity Algorithms for Photoelastic Data", Experimental Mechanics, Vol.24, No.12, pp.300-311. 1984.