

# 형상 최적화를 위한 성장-변형률법의 적용

한석영\*, 이경래\*\*

## Application of the Growth-Strain Method for Shape Optimization

Seog-Young Han\*, Kyong-Lae Lee\*\*

### Abstract

The growth-strain method was used for shape optimization, which carries out the optimization by distributing uniformly the distributed parameter such as von Mises stress and shear strain energy density. Shape optimization is carried out by iteration of stress analysis and growth strain analysis. In this study, the effect of growth ratio in the method was investigated and then the range of the adequate value of the growth ratio was determined. Also the growth-strain method was improved by applying the linear PID control theory in order to control volume required by a designer. Finally, an automatic shape optimization system was built up by the improved growth-strain method with a commercial software using finite element method. The effectiveness and practicability of the developed shape optimization system was verified by some examples.

Keywords: Shape Optimization(형상 최적화), Volume Control(체적 제어), Growth-Strain Method(성장-변형률법), Finite Element Method(유한요소법)

### 1. 서론

최근 환경보존 및 연비절감에 대한 각종 규제가 강화되면서 세계 자동차 시장에서는 자동차의 안전성 뿐만 아니라 경량화의 필요성이 크게 대두되었다. 따라서 자동차의 안전성을 유지 또는 향상시킴과 동시에 경량화를 이루기

위한 연구들이 광범위하게 진행되고 있다. 현재 차체 경량화를 위한 연구는 상황에 따라 다르게 진행되고 있으나 일반적으로 차체 구조의 합리적 설계, 차체의 소형화, 기존의 강판으로 구성된 차체를 경량 소재로 대체하는 방법 등을 통하여 이루어지고 있다. 차체 구조의 합리적 설계는 샤시 및 바디를 구성하고 있는 요소 부품의 치수 및 형상

\* 한양대학교 기계공학부

\*\* 한양대학교 기계설계공학과

을 최적화 하기 위한 구조 최적설계에 관한 연구에 해당하며, 여러 가지 제안된 최적설계 기법을 이용하여 차체 요소의 경량화에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.

구조 최적설계 문제는 크게 치수(sizing), 형상(shape), 위상(topology)의 세 분야로 나눌 수 있다. 그러나 이미 발표되어 자동차에 적용시킨 대부분의 것들은 치수 최적설계(sizing)에 관한 것들이다. 형상 최적설계는 설계 대상의 형상이 설계 도중에 연속적으로 변화하므로 치수 최적설계보다 복잡하다. 하지만 형상 최적설계는 마지막 단계에서의 기능적인 필요성 때문에 노치(notches)나 구멍(holes), 필렛(fillets) 등을 위해 세부 설계를 하고자 할 때나 초기 설계 단계에서 무게나 비용을 고려할 때에 개념 설계를 하는데 있어서 매우 중요하다. 따라서, 실제 설계시에 형상 최적설계는 치수 최적설계에 비해 더 유용하며 다양한 설계를 가능하게 한다.

지금까지 형상 최적화 기법에 관한 많은 이론들이 제안되었으나, 대부분의 이론들이 목적함수(objective function)를 최소화 하기 위한 수학적인 프로그램에 기초를 두고 경계 매개변수화(boundary parametrization)와 설계 민감도(design sensitivity)의 해석을 통하여 최적화를 이루도록 되어 있다.<sup>(1)(2)</sup> 따라서 최적화를 수행하는데 많은 계산을 필수적으로 수반하게 되며 대규모의 기억용량을 필요로 한다. 최근에 이와는 대조적으로 Mises 응력 또는 전단변형 에너지 밀도(shear strain energy density)와 같은 분포 매개변수(distributed parameter)를 균일하게 분포시킴으로써 최적화를 이루는 성장-변형률법(growth-strain method)<sup>(3)(4)</sup>이 제안되었다.

본 연구에서는 성장-변형률법에 기초를 두고 임의의 상수값으로 처리한 성장비에 대한 영향과 적절한 범위를 결정하였으며, 설계자가 원하는 체적으로 제어하기 위하여 선형 PID 제어이론을 적용하였다. 이러한 개선된 이론을 유한요소법을 이용한 상용 소프트웨어(I-DEAS)와 함께 통합된 프로그램으로 개발하여 최적화가 효율적이고 실질적이며 조직적으로 이루어지도록 형상 최적설계 시스템을 구축하였다. 그리고 실제 자동차 부품을 개발된 최적설계 시스템에 의해 최적화를 수행함으로써 그 신뢰도를 검증하였다.

## 2. 성장-변형률법(growth-strain method)

성장-변형률법은 매개변수를 일정하게 분포시키고자 하는 과정에서 발생하는 체적변형을 이용하여 형상을 최적

화시킨다. 이 최적화 과정은 Fig. 1과 같은 2단계의 반복으로 구성된다. 첫 단계는 역학적인 조건하에서 매개변수를 계산하기 위한 응력해석 단계이며, 두 번째 단계는 형상 구속조건하에서 체적변형의 발생 법칙에 기초를 둔 성장변위 및 형상 수정을 계산하기 위한 성장해석 단계이다. 각 단계에서의 해석은 유한요소 해석법을 이용하여 수행되어진다. 매개변수는 강도를 균일하게 하는 문제에 대해서는 Mises 응력, 전단 변형에너지 밀도, 최대 주응력 등이 사용되고, 강성 최대화 문제에 있어서는 포텐셜 에너지 밀도가 사용될 수 있다. 본 연구에서는 강도를 균일하게 만드는 것을 취급하며 Mises 응력을 매개변수로 사용하였다.

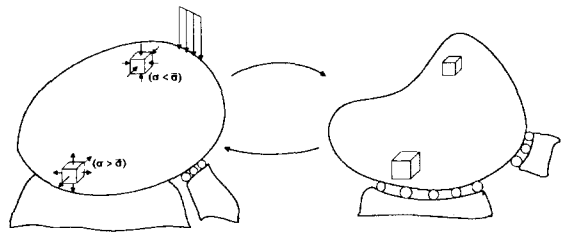


Fig. 1 Principle of growth-strain method

매개변수가 Mises 응력과 같이 단위 체적이나 단위 면적의 양으로 정의되고 무한 요소 사이의 상호작용이 무시될 때, 매개변수는 일반적으로 국부적인 극소 체적안에서 체적의 증가에 따라 감소하는 특성을 갖는다. 그러므로 매개변수가 균일화된 형상을 만들기 위해서는 체적변형의 발생법칙이나 성장법칙에 따라 매개변수의 함수로서 체적변형을 발생시킬 수 있다. Fig. 1과 같이 모든 요소에서 축소 체적변형은  $\sigma$ 와  $\bar{\sigma}$ 의 편차에 비례해서  $\sigma$ 가  $\bar{\sigma}$ 보다 작은 곳에서 발생하고, 팽창 체적변형은  $\sigma$ 가  $\bar{\sigma}$ 보다 클 때 발생한다. 성장법칙은 다음 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{ij}^h = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sigma} \delta_{ij} h \quad (1)$$

식(1)에서  $\epsilon_{ij}^h$ 는 체적 변형,  $\sigma$ 는 매개변수(Mises 응력),  $\bar{\sigma}$ 는 매개변수의 기준값(예를 들면 평균응력, 최대응력),  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta, 그리고 h는 성장변형의 크기를 조절하며 1보다 훨씬 작은 임의의 상수인 성장률이다.

각 요소에서 발생하는 체적변형에 의한 성장변형은 수정된 형상을 정의하기 위해서 등가 절점의 성장변위로써 바뀌어야만 한다. 체적변형에 의해서 발생한 총 변형에너지가 최소화된다는 기준으로 성장변형이 결정된다고 가정하면 성장변위를 위한 성장해석은 다음과 같이 정식화된다. 체적변형에 의해서 발생한 변형에너지  $U^G(u_i^G)$ 는 성장변위( $u_i^G$ )의 함수로서 다음 식과 같이 주어진다.

$$U^G(u_i^G) = \frac{1}{2} \int_{V^0} (\epsilon_{ij}^G - \epsilon_{ij}^B) D_{ijkl} (\epsilon_{ij}^G - \epsilon_{ij}^B) dV^0 \quad (2)$$

여기서  $V^0$ 는 성장변형 전의 체적,  $D_{ijkl}$ 는 탄성 구성텐서이다.  $x_i^0$ 는 성장변형 전의 위치 좌표이다. 식(2)에서  $\epsilon_{ij}^B$ 는  $u_i^G$ 와 관계가 없다. 그러나 성장 변형을 텐서  $\epsilon_{ij}^G$ 는  $u_i^G$ 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} (u_{i,j}^G + u_{j,i}^G) \quad (3)$$

변형에너지  $U^G(u_i^G)$ 를 최소화 하는 조건은 식(4)와 같다.

$$\delta U^G(u_i^G) = \int_{V^0} (\epsilon_{ij}^G - \epsilon_{ij}^B) D_{ijkl} \delta \epsilon_{kl}^G dV^0 = 0 \quad (4)$$

여기서  $\delta$ 는 가상 변화량이다. 식(4)를 매트릭스 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\int_{V^0} \delta \{\epsilon^G\}^T [D] \{\epsilon^G\} dV^0 = \int_{V^0} \delta \{\epsilon^G\}^T [D] \{\epsilon^B\} dV^0 \quad (5)$$

유한요소법을 사용하면 각 요소의 성장 변형을 벡터  $\{\epsilon^G(x_i^0)\}$ 는 다음과 같이 절점 성장변위  $\{u^G\}$ 에 의해 표현된다.

$$\{\epsilon^G(x_i^0)\} = [B(x_i^0)] \{u^G\} \quad (6)$$

여기서  $[B(x_i^0)]$ 는 변형률과 변위 매트릭스,  $(x_i^0)$ 는 요소의 독립변수를 의미한다.

식(4)에  $[B(x_i^0)]$ 와  $\{u^G\}$ 를 대입하고 전체 매트릭스

로 합하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta \{u^G\} \int_{V^0} [B(x_i^0)]^T [D] [B(x_i^0)] dV^0 \{u^G\} \\ = \delta \{u^G\}^T \int_{V^0} [B(x_i^0)]^T [D] \{\epsilon^B(x_i^0)\} dV^0 \{u^G\} \end{aligned} \quad (7)$$

성장변형의 지배 방정식은 식(7)을 정리하여 다음과 같이 표현된다.

$$[K] \{u^G\} = \{f\} \quad (8)$$

여기서  $[K]$ 는 강성 매트릭스,  $\{f\}$ 는 체적변형 벡터  $\{\epsilon^B\}$ 에 의해서 발생한 등가 절점력 벡터이다. 이는 다음과 같이 표현된다.

$$[K] = \int_{V^0} [B(x_i^0)]^T [D] [B(x_i^0)] dV^0 \quad (9)$$

$$\{f\} = \int_{V^0} [B(x_i^0)]^T [D] \{\epsilon^B(x_i^0)\} dV^0 \quad (10)$$

성장변위 벡터  $\{u^G\}$ 는 식(8)로부터 얻어진다.  $[K]$ 는 형상 데이터로부터 계산되고  $\{f\}$ 는 식(1)과 식(10)을 이용해서 얻어진다. 식(8)로부터 얻어진 절점 성장변위 벡터  $\{u^G\}$ 는 형상 수정 전에 절점 좌표  $\{x_{OLD}\}$ 와 새로운 형상을 정의하는 절점 좌표 벡터  $\{x_{NEW}\}$  사이에 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\{x_{NEW}\} = \{x_{OLD}\} + \{u^G\} \quad (11)$$

### 3. 체적 제어

위에서 기술한 최적화 과정을 반복함으로써 균일 응력 형상이 얻어질 수 있으나 설계자가 원하는 체적값을 목표값으로 제어하기 위해서는 식(1)을 개선할 필요가 있다. 각 반복에서 성장변형에 의한 체적의 변화량은 자동제어 이론에서의 외란(disturbance)으로 간주될 수 있다. 따라서 체적 제어는 외란에 대한 자동 제어에 대응할 수 있으므로 성장법칙 식(1)을 선형 PID제어의 개념을 이용하여 식(12)와 같이 개선하였다. 식(12)에 사용되는 기본값으로는 식(13)과 같이 계산된 평균 응력값이 사용된다.

$$\epsilon_{ij}^{B(n)} = \frac{\sigma^{(n-1)} - \bar{\sigma}^{(n-1)}}{\bar{\sigma}^{(n-1)}} \delta_{ij} \dot{h} - \left\{ K_P \frac{V^{(n-1)} - V_{obj}}{V_{obj}} + K_I \sum_{k=1}^{n-1} \frac{V^{(k)} - V_{obj}}{V_{obj}} + K_D \frac{V^{(n-1)} - V^{(n-2)}}{V_{obj}} \right\} \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}^{(n-1)} = \sum_e \frac{\sigma_e v_e}{V^{(n)}} \quad (13)$$

여기서 (n)은 n번째 반복횟수이고  $K_P$ ,  $K_I$ , 그리고  $K_D$ 는 비례상수이며,  $v_e$ 는 각 요소의 체적,  $\sigma_e$ 는 각 요소의 대표 응력,  $V_{obj}$ 는 목표하는 총 체적,  $V^{(n)}$ 는 n 반복횟수에서의 총 체적을 의미한다. 식(12)의 오른쪽 첫 번째 항은 식(1)에서와 같이 응력을 균일하게 만드는 역할을 하며, 각 요소에서의 비교 응력에 따라 체적변형을 발생시킨다. 새롭게 추가된 두 번째 항은 체적을 목표값으로 제어하여 체적변형이 모든 요소에서 균일하게 발생하도록 한다. 각 반복횟수에서 체적의 목표값과의 차이에 따라 유사한 균일 형상 변형이 얻어진다. 식(12)에서  $K_P$ 를 가진 두 번째 항은 선형 PID 제어에서 비례동작에 대응하고 목표체적과의 편차에 따라 체적변형을 발생시키며,  $K_I$ 를 가진 세 번째 항은 적분동작에 대응하고 잔류편차를 줄인다. 마지막으로  $K_D$ 를 포함한 네 번째 항은 미분동작에 대응하며 외란에 대한 응답을 가속화시킨다. 각 항에서 각 상수가 증가할 때 그것의 상대적인 영향력은 커진다. 따라서, 첫 번째 항의 비례상수와  $K_P$ ,  $K_I$ , 그리고  $K_D$ 의 값에 의한 균일 성장이 더해짐으로써 체적을 목표값으로 제어하면서 응력을 균일하게 만드는 것이 가능하게 된다.

#### 4. 형상 최적설계 시스템

형상 최적설계 시스템의 도식적인 흐름도를 Fig. 2에 보인다. 이 시스템은 상용 유한요소 소프트웨어 (I-DEAS)<sup>5)</sup>와 개발된 성장-변형률법을 이용한 형상 최적화 프로그램으로 구성되어 있다. 초기 형상의 유한요소 모델을 만든 다음 표준 응력해석이 수행된다. 표준 응력해석 후 성장해석에서 필요한 모든 데이터들은 후처리 작업(post-processing task)을 이용하여 새로운 데이터 파일을 생성한다. 후처리 작업에서는 각 요소에 대한 분포 매개변수(Mises 응력)가 구해지고, 발생하는 체적 변형값, 온도 하중( $\Delta T$ )이 다음 단계의 성장해석을 위한 경계조건과 하중조건으로 주어지도록 외부에서 C언어로 개발된 프로그램에 의

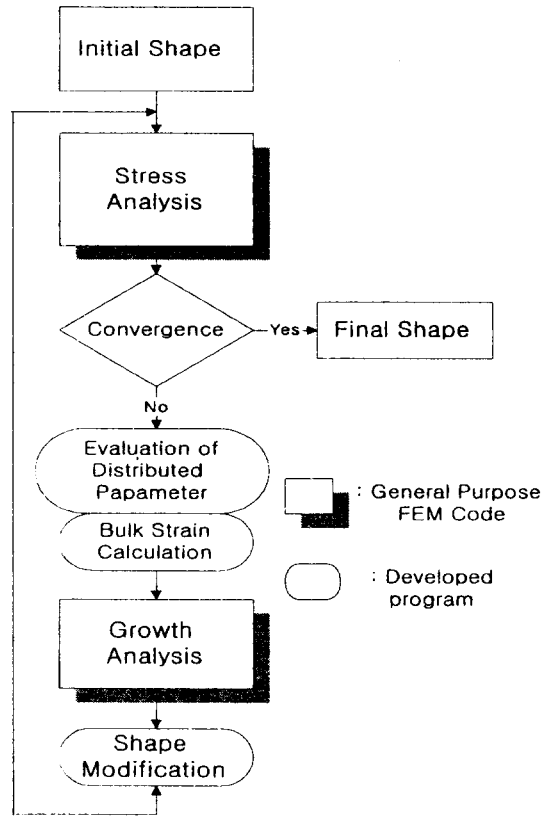


Fig. 2 Schematic flow chart of shape optimal design system

해 계산되어진다.

다음 단계로, 상용 소프트웨어의 열변형 해석 프로그램을 사용하여 성장해석을 수행한다. 물체를 열등방성이라고 가정할 때 발생된 열변형은 전단 성분이 없는 체적변형을 발생시킨다. 열변형은 성장법칙 식(1)과 유사한 식(14)로 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{ij}^T = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (14)$$

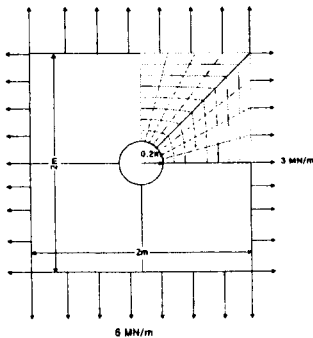
성장해석을 위한 경계조건은 초기 응력해석에 대한 경계조건과는 독립적으로 설정한다. 성장해석에서의 경계조건은 온도 조건과 기하학적인 조건이다. 마지막으로, 개발된 프로그램을 통해서 형상을 수정한다. 최적화된 형상은 이 과정을 반복함으로써 계산되어진다. 다만, 반복작업이 여

러번 수행됨에 따라 유한요소 모델의 요소 크기가 극단적인 차가 생길 수 있으므로 응력 해석단계로 넘어가기 전에 요소의 형상을 검토하여 요소 재수정 과정을 수행한다. 통합된 형상 최적설계 시스템은 상용 소프트웨어인 I-DEAS의 프로그램 파일로 되어 있으며, 이를 실행함으로써 형상 최적화 과정이 자동으로 수행되도록 하였다.

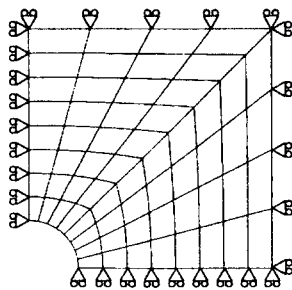
### 5. 형상 최적 설계 적용에

#### 5.1 중앙부에 구멍을 가진 평판

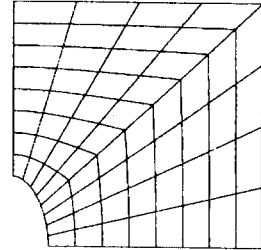
Fig. 3(a)와 같이 중앙부에 구멍을 가진 평판에 양방향으로 인장하중이 가해진 경우에 대하여 체적 제어를 통한 형상 최적화를 수행하였으며, 성장해석에 사용되는 모델은 Fig. 3(b)와 같다. 성장비  $h$ 값에 대한 영향과 적절한  $h$ 값의 범위를 결정하기 위하여 체적의 목표값을 초기 체적값으로 제어되도록 설정하였다.



(a) plate with a hole with biaxial stresses



(b) growth analysis



(c) final optimized shape

Fig. 3 Shape optimization of plate with a hole

$h$ 값의 영향을 조사하기 위해서  $h$ 값은 0.025에서 0.8까지  $h$ 를 두 배씩 증가시키면서 최적화를 수행하였으며 그 결과를 Table 1에 나타내었다. 이 결과로부터  $h$ 값이 크면 수렴하는 속도는 빨라지나, 어느 값 이상이 되면 발산하는 결과를 나타냄을 알 수 있었다. Fig. 4는  $h$ 값이 0.05, 0.1, 0.2, 0.4 일 때 각각의 최대 Mises 응력값의 변화를 보여준다. 이 문제에 대해  $h$ 값은 0.05~0.2 정도가 적절한 것으로 계산되었다.

Table 1 The iteration number of convergence due to growth ratio  $h$

$h$	0.025	0.05	0.1	0.2	0.4	0.8
Iteration number	23	12	6	3	2	diverge

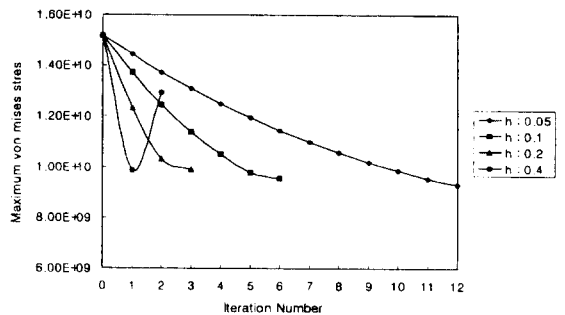


Fig. 4 The effect of growth ratio  $h$

체적 제어를 보다 효율적으로 수행하기 위한 선형 PID 제어이론의 계수  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  값은 여러 가지 최적화를 수행한 결과 일반적으로 적용할 수 있는 것으로 생각되는 값인 0.5, 0.5, 0.0으로 설정하였다.  $h$ 값이 0.1에 대해서 초기값에 대한 체적과 최대 Mises 응력의 비의 변화를 Fig. 5에 나타내었으며, 최적화된 형상은 Fig. 3(c)에 나타내었다. 이 때 체적은 초기값으로 일정하게 유지되었으며, 최대 Mises 응력값의 비는 63% 정도로 감소하였다.

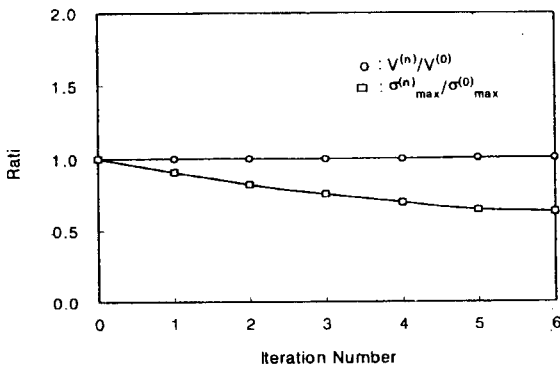


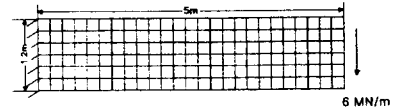
Fig. 5 Iteration history of plate with a hole

### 5.2 외팔보

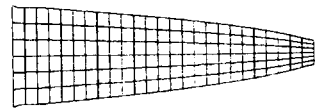
Fig. 6(a)와 같은 외팔보의 자유단에 분포 전단하중이 가해진 경우에 대하여 체적의 목표값을 초기 체적값의 100%와 70%로 설정하고,  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  값을 각각 0.5, 0.5, 0.0으로 설정하여 성장비  $h$ 값을 0.05에서 0.8까지 두 배씩 증가시키면서 형상 최적화를 수행하였다. 그 결과 평판의 경우와 같이  $h$ 값이 2배 증가하면 수렴속도도 약 2배 증가하는 결과를 보였으며, 두 경우 모두  $h$ 값이 0.4나 0.8일 경우에도 수렴하기는 하지만 최적화된 형상에서의 체적값이 목표 체적값에서 더 큰 차이를 보이므로 이 문제에 대해서도  $h$ 값은 0.05~0.2 정도가 적절한 것으로 나타났다.

체적의 목표값이 100%와 70%일 때,  $h$ 값이 0.1인 경우에 대하여 최적화된 형상은 각각 Fig. 6(b)와 (c)에, 초기 체적값에 대한 체적(면적)과 최대 Mises 응력의 비의 변화를 각각 Fig. 7(a)와 (b)에 나타내었다. 두 경우 모두 체적은 목표값으로 수렴하였으며 최대 Mises 응력값은 체적의 목표값이 100%인 경우 초기 응력값의 50%로, 체적의 목표값이 70%인 경우는 초기 응력값과 비슷한 값을 나타내었다. 위의 결과

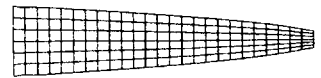
로부터 적절한  $h$ 값은 0.05~0.2 범위의 값을 갖는 것으로 나타났다.



(a) initial shape of cantilever beam with a load

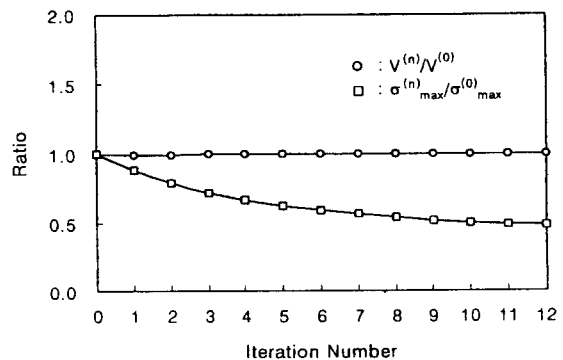


(b)  $V_{obj} = V^{(0)}$

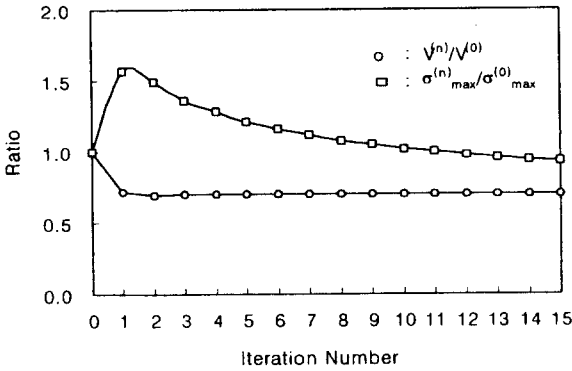


(c)  $V_{obj} = 0.7V^{(0)}$

Fig. 6 Shape optimization of a cantilever beam



(a)  $V_{obj} = V^{(0)}$

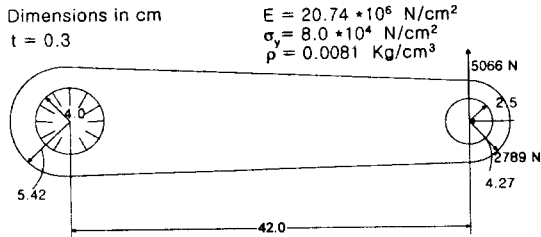


(b)  $V_{obj} = 0.7V^{(0)}$

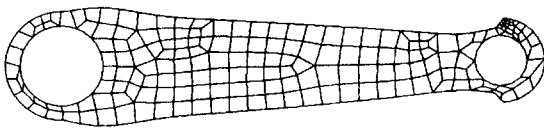
Fig. 7 Iteration history for a cantilever beam

5.3 토크암

다음으로 실제 자동차 부품인 Fig. 8(a)와 같은 토크암에 대하여 체적의 목표값을 초기 체적의 85%로 설정하고 h값을 0.05로  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  값을 각각 0.5, 0.5, 0.으로 설정하여 형상 최적화를 수행하였다. 이 때 초기값에 대한 체적(면적)과 최대 Mises 응력의 비의 변화를 Fig. 9에 나타내었으며, 최적화된 형상은 Fig. 8(b)에 나타내었다.



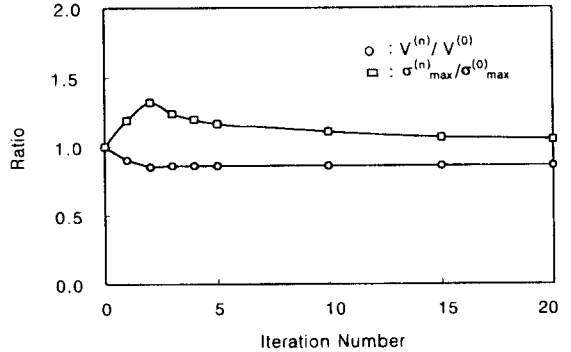
(a) initial shape



(b) final optimized shape

Fig. 8 The result of shape optimization for a torque arm

최적화된 형상의 최대 Mises 응력값은 초기 응력값과 거의 같은 값을 가졌으며, 체적은 설정한대로 85%로 감소하였다. 위의 적용예로부터 개발된 최적설계 시스템의 신뢰도를 확인할 수 있었다.



$V_{obj} = 0.85V^{(0)}$

Fig. 9 Iteration history of a torque arm

6. 결론

본 연구를 통하여 개발된 형상 최적설계 시스템을 이용하여 형상 최적화를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 개발된 형상 최적화 시스템은 수학적 프로그래밍 기법을 사용하는 것과 달리 많은 계산과 기억 용량을 필요로 하지 않으므로 보다 효율적인 형상 최적화를 수행할 수 있었다.
- (2) 효율적인 형상 최적화를 위한 체적 제어시 적절한 h 값은 0.05~0.2 범위의 값을 갖는다.
- (3) 설계자의 요구에 따라 체적을 원하는 값으로 제어할 수 있는 선형 PID 제어이론을 적용하여 상용 소프트웨어와 통합된 효과적이고 실질적인 자동 형상 최적설계 시스템을 개발하였다.
- (4) 3차원 형상 최적화에 의한 구조물의 경량화 및 그에 따른 비용절감 효과가 기대된다.

참고 문헌

1. Haftka R. and G.Randhi R., "Structural shape

- optimization - A survey", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 57, pp.91-106, 1986.
2. Hsu Y., "A review of structural shape optimization - A survey", *Comput. in Industry*, Vol. 26, pp.3-13, 1994.
  3. Azegami H., "Proposal of a shape-optimization method using a constitutive equation of growth", *JSME Int. J., Ser. 1*, Vol. 33, No. 1, pp. 64-71, 1990.
  4. Azegami H., "Shape Optimization of Solid Structures Using the Growth-Strain Method", *SAE 921063*, pp. 1136-1145, 1992.
  5. I-DEAS Master Series Manual, SDRC Inc. 1994.