

# 자유곡선 기어의 창성 알고리즘에 관한 연구

한흥삼\*, 최종근\*\*, 이동주\*\*\*

## A Study of Algorithm on the Freeform Curve Gear

Heung-Sam Han\*, Jong-Geun Choi\*\*, Dong-Ju Lee\*\*\*

### Abstract

This study suggests an algorithm for tooth profile generation of free form curve involute gear, a special gear, of which the pitch line is a free curve instead of a circular one. For the first, a methodology for calculation of the tooth curve is developed and formulated. Then the formulated algorithm is programmed for manufacturing and verified by computer graphics. Next, the calculated results are changed into NC codes to apply to wire electric discharge machine(WEDM). Finally, the machined gear is examined in engagement with a standard involute gear.

**Key Words :** Involute Gear(인볼류트 기어), Free form Curve Gear(자유곡선 기어), Gear Tooth Profile(기어치형), Virtual Pitch Circle(가상 피치선), Generation Process(창성법), Line of Action(작용선)

### 1. 서론

동력전달의 한 방법으로서 기어(Gear) 전동은 상대적으로 큰 힘을 정확한 속도비로 전달할 수 있어 비교적 축간 거리가 작은 두 축사이의 동력전달에 널리 사용되고 있다. 최근 가전제품을 비롯한 많은 제품들이 고급화를 위해 경박단소(輕薄短小)화 되는 추세에 있으며, 이러한 과정에서 소형으로서 큰힘의 전달이 가능한 기어전동이 보다 중요한 동력전달 수단이 되고 있다. 이러한 동력전달 수단 가운데에는 구동력의 유지와 설치공간의 최소화를 위해

비원형 기어가 적용되는 예가 적지 않다. 이 중에는 각종 계측기, 절단기, 콘베어 드라이브, 크랭크슬라이더, 계량기 등의 메커니즘(Mechanism)이 있다. 따라서 이에 대한 연구도 적지않게 진행되어 왔으며<sup>(1-2)</sup>, Grant에 의해 비원형 기어에 대한 연구가 1888년에 처음 시작되었고<sup>(3)</sup>, Richard는 편심 원형기어를 인쇄기에 사용하였다.<sup>(4)</sup> 窪田雅男은 비원형기어에 응용될 수 있는 피치곡선의 수학적 성질에 대한 연구를 하였고<sup>(5)</sup>, Litvin은 기하학적 해석에 관해 연구를 하였으나 기어 필렛부에 대해서는 취급되지 않아 치형의 완전한 수학적모델이 이루어지지 않았으며<sup>(6)</sup>,

\* 충남대학교 대학원  
 \*\* 순천대학교 자동차공학과  
 \*\*\* 충남대학교 기계공학과

横山良明 등은 보조기구에 의한 치절장치의 개발에 관해서 연구하였다.<sup>[17]</sup> 이론적으로 정확한 치형의 설계는 정도 높은 기어의 제작 및 검사를 위한 일차적인 과제이다. 일반적으로 기어는 기하학적 곡선을 정의하여 치형(Tooth profile)을 얻으며, 알려진 바와 같이 많이 사용되는 치형으로는 인볼류트 곡선(Involute curve)과 사이클로이드 곡선(Cycloid curve)이 있다.<sup>[18]</sup> V. Simon은 치형의 최적화는 두 기어의 접촉이 원활하고 하중을 받을 때 하중 분포 요소가 최소화 되기 위한 계산을 이용하여 컴퓨터 프로그램을 개발하여 치형의 형상을 가공하는 실험을 하였다.<sup>[19]</sup> 최상훈은 타원계 엽형기어의 언더컷을 피하기 위해 기어를 전위시켜 모델링하여 이뿌리부분의 치형곡선을 수식화하고 언더컷 방지를 위한 타원기어의 최소잇수를 이심율과 전위계수의 변화에 따라 구하였다.<sup>[11]</sup> 유명섭은 타원계 비원형기어에서 이심율의 변화에 따라 CNC 와이어 컷 방전가공기(Wire Cut EDM)로 가공하여 진동실험을 함으로써 그 성능을 증명하였다.<sup>[12]</sup> 이들에 대한 정확한 설계방법이 많은 자료에 나타나 있으며 컴퓨터를 이용하면 곡선의 정확한 좌표 값을 계산할 수 있다. 그러나 이와 같이 주어지는 산출 알고리즘은 모두 원형형태의 기어에 관한 것으로 캠형상이나 타원 등과 같이 비원형 형태를 취하는 소재에 치형을 형성시킬 수 있는 알고리즘은 찾아보기 힘들다. 이러한 비원형기어를 가공할때 대부분 수치제어를 이용한 와이어 컷 방전가공기에서 가공한다. 이 경우 기어가 공법 중 창성법은 적용되기 어려우며 수치제어 와이어 컷 방전가공에 의해 가공하기에 필요한 좌표값이 요구된다. 이러한 경우에는 원형기어 치형의 기하학적 정의에 의하여 그 값을 얻을 수 있으나 원(Circle)이 아닌 곡면에 치형을 형성시키고자 할때에는 지금까지의 기하학적 정의만으로는 용이하지 않게 된다. 특히 자유곡면과 같은 피치선(Pitch line)을 갖는 기어에 대해서는 불가능하게 여겨진다. 원이 아닌 자유곡선 형태의 피치선 위에 치형을 형성시키고자 할때 종래의 방법으로는 Fig. 1과 같이 한 치형에 대하여 그 중심선과 교차되는 피치 점에서 그에 대한 곡률반경(Radius of curvature)을 갖는 원을 가상하여 이 원을 표준 원형기어의 피치원으로 보고 하나의 치형을 구성하였다. 이 경우 치형은 그림에서 알 수 있는 바와 같이 실제 구름운동이 이루어지는 피치선과는 다른 피치원 위에서 형성되므로 어느 정도 오차를 갖기 마련이며, 결국 정확한 이 물림을 얻을 수 없게 된다. 이러한 오차는 동작시 진동과 소음의 원인이되어 제품의 전체적인 품질을 떨어뜨리고, 한편으로는 제품의 수명을 단축시키는 결함으

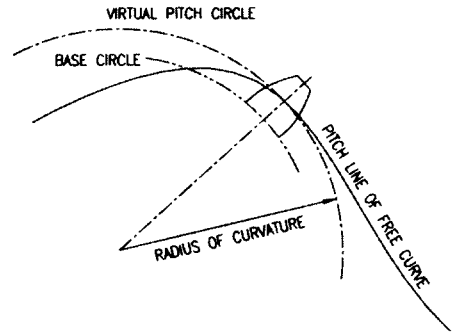


Fig. 1 Tooth Profile on Virtual Pitch Circle

로 작용할 것이다. 비원형 특히 자유곡선의 피치선을 갖는 기어는 제품의 소형화 과정에서 상대적으로 복잡하고 공간을 많이 차지하는 링크기구(Link mechanism)를 대신하는 캠 메카니즘(Cam mechanism) 등에 적지 않게 사용되고 있으며, 이에 대한 보다 정확한 설계기술이 확보된다면 그 활용범위는 훨씬 확대될 것으로 기대된다.

본 연구는 자유곡선을 피치선으로 갖는 인볼류트 기어의 설계에 필요한 정확한 수치 값을 얻는데 그 목표를 두었다. 이를 위해 먼저 비원형 기어의 치형 구성원리를 고안하고 이를 수식화 하였다. 다음으로 수식화된 알고리즘을 실제가공에 활용될 수 있도록 컴퓨터 프로그래밍하였으며, 이를 컴퓨터 그래픽으로 확인하였다. 계산된 결과는 수치제어 와이어 컷 방전가공기에 적용될 수 있도록 NC 데이터로 전환되었으며, 비원형 자유곡선 기어를 실제 가공하여 표준기어와의 물림 및 동작 상태를 확인하였다.

## 2. 자유곡선 기어 이론

### 2.1 자유곡선 기어의 치형 생성원리

인볼류트 곡선은 기어의 치형에 사용되는 대표적인 곡선이다. 이러한 치형곡선은 원형 기어의 경우 일정 각속도 비를 만족시킴으로 두 치면상의 물림 점은 Fig. 2에 나타난 바와 같이 작용선(Line of action)이라 부르는 하나의 직선 위를 이동한다. 이러한 치형 곡선의 기구학적 원리는 하나의 기어를 커터(Cutter)로 하고 이에 맞물려 회전하는 쪽을 하나의 원형소재로 하여 절삭 되도록 함으로써 새로운 기어를 가공할 수 있게 한다. 이와 같은 기어 절삭법은 흔히 창성법(Generation process)으로 알려져 있으며, 이때 커터에 해당하는 기어를 피니언 커터(Pinion cutter)라 한다.

이러한 원리는 소재가 고정되고 피니언 커터가 소재의

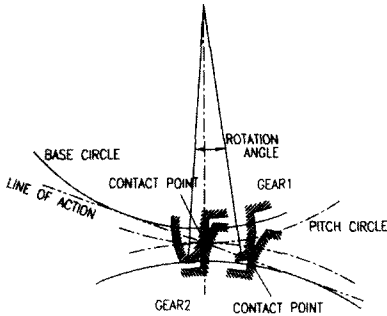


Fig. 2 Trace of Contact Points on the Line of Action

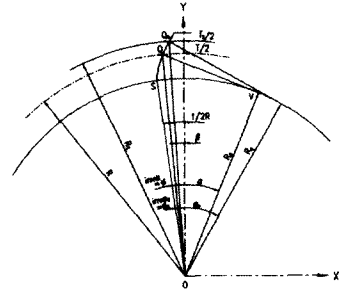


Fig. 4 Involute Curve Generation

피치원상을 구름운동하는 경우에도 동일하게 만족된다. 이를 바탕으로 Fig. 3과 같은 자유곡선을 갖는 소재에 치형을 형성시키고자 하는 경우를 생각한다. 만일 소재가 밀가루 반죽과 같이 소성변형이 용이한 재질이라 가정하고 소재 위 가상의 피치선을 따라 피니언 기어(Pinion gear)를 굴린다면 소재에는 표준 피니언 기어와 맞물리는 또 하나의 정확한 표준치형이 형성될 것이다. 따라서 피니언 기어가 소재의 가상 피치선 위를 구름운동 하게 하고 피니언의 회전에 따른 예상 물림점을 연속적으로 계산해 낸다면 소재에 형성되는 새로운 치형의 좌표값을 얻을 수 있게 된다.

### 2.2 치형 산출 알고리즘

인볼류트 곡선을 치형으로 갖는 두 기어가 서로 맞물려 회전할때 두 치형사이에 이루어지는 일련의 물림점들은 흔히 작용선이라 불리는 직선상을 이동한다. 이러한 인볼류트 치형의 성질을 이용하면 자유곡선 치형은 이들 맞물림 점들의 위치에 대한 기하관계를 소재에 고정된 좌표에 대하여 수식화 함으로써 구해질 수 있다.

이 과정을 수식화하기 위해 먼저 인볼류트 곡선 치형에 대한 기하학적 관계를 정리하면 다음과 같다. Fig. 4에서

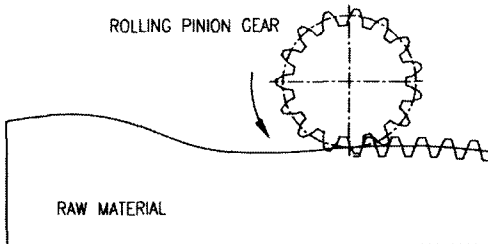


Fig. 3 Gear Creating on Free Form Surface Using Rolling Pinion Gear

보여지는  $\phi$ 는 인볼류트 함수(Involute function)로 불리우며, 다음 식(1)과 같이 정의된다.

$$\text{inv}\alpha = \phi = \tan \alpha - \alpha \quad (1)$$

여기서  $\alpha$ 는 기어의 압력각(Pressure angle)으로 다음 식(2)로 정의되며, 인볼류트 곡선에 있어서 기초원에 대한 피치원의 크기를 정의한다.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_g}{R}\right) \quad (2)$$

여기서  $R$ 과  $R_g$ 는 각각 피치원 및 기초원의 반경이다. 식(1)의 인볼류트 함수를 이용하여 반경  $R_2$ 되는 곳의 이두께  $T_2$ 를 구해보면 다음 식(3)으로 나타난다.

$$T_2 = 2R_2\left(\frac{\pi m}{4R} + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_2\right) \quad (3)$$

여기서  $m$ 은 해당 기어의 모듈(Module)이며,  $\alpha_2$ 는 인볼류트 곡선의 특성에 따라 다음 식(4)로 얻는다.

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{R_g}{R_2}\right) \quad (4)$$

이제 피니언 기어가 피치선 위를 구를때 형성되는 치형상의 물림점을 구하기 위해 먼저 원형의 두 기어가 맞물려 회전하는 경우를 생각한다. Fig. 5에서 피니언 기어가 임의의 순간으로부터  $\phi_0$ 만큼 회전했을 때 두 기어의 물림은 점 S에서 이루어지고, 다시  $\phi$ 만큼 추가로 회전한 후에는 점 T로 이동된 모습을 나타낸다.

그림에서 피니언 기어의 중심 O로부터 피치원상에서의 물림점까지 벡터를  $\vec{p}_1$ 이라 하면, 피니언 기어가  $\phi$ 만큼 회전한 후 치형상의 물림점까지 벡터  $\vec{p}_2$ 가 여기서 구하

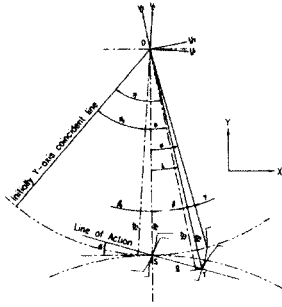


Fig. 5 Geometric Relation of a Pair of Engaged Gears

고자 하는 물림점의 자취가 된다. 물림점의 이동을 나타내는 S점로부터 점 T까지의 벡터를  $\vec{q}$ , 두 물림점 사이의 각 축,  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  사이의 각을  $\lambda$  라 하면 이들의 크기는 다음 식(5)와 식(6)으로 표현된다.

$$|\vec{p}_2| = \frac{R}{\cos \lambda - \sin \lambda \cdot \tan \alpha} \quad (5)$$

$$|\vec{q}| = \frac{R \cdot \sin \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)} \quad (6)$$

식(5)를 계산하기 위해서는 기어의 회전각  $\phi$ 에 따른 두 물림점사이의 회전각  $\lambda$ 를 알아야 한다. 인볼류트 곡선 치형의 특징에서 물림점의 이동거리는 물림점에서 기초원에 접선을 그렸을 때 기초원위 점들의 이동거리와 같으며, 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$|\vec{q}| = R_s \cdot \phi \quad (7)$$

식(6)과 식(7)로부터  $\lambda$ 를  $\phi$ 의 함수로 구하면 다음 식으로 된다.

$$\lambda = \tan^{-1} \left[ \frac{\phi(1 + \cos 2\alpha)}{2 + \phi \sin 2\alpha} \right] \quad (8)$$

따라서 피니언 기어의 회전각  $\phi$ 가 주어지면 식(5)와 식(8)로부터 새로운 물림점까지의 벡터의 크기  $|\vec{p}_2|$ 를 구할 수 있다. 한편,  $\vec{p}_2$  벡터의 각도는 Fig. 5에서 보여지는 기하관계에 의하여 다음 식(9)로 주어진다.

$$\angle \vec{p}_2 = \frac{\pi m}{4R_1} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_2 \quad (9)$$

이제 평면상의 2차원 자유곡선을 피치선으로 갖는 기어

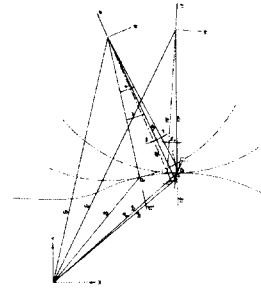


Fig. 6 Gear tooth generation on the Free form Curve

의 치형을 얻기 위하여 피니언 기어가 피치선 위를 구르는 경우를 생각한다. Fig. 6은 하단에 자유곡선의 피치선을 갖는 기어가 고정되어 있고 이에 맞물려 피니언 기어가 구름운동할때 정의되는 기하요소들의 변화를 나타낸다. 그림에서와 같이 시스템 전체의 고정좌표는 피니언의 구름운동에 따른 물림점의 추적 계산 결과가 곧바로 자유곡선 기어의 치형에 대한 좌표값이 될 수 있도록 자유곡선 기어 측에 설정하였다.

고정좌표 계 원점으로부터 피니언 기어 중심까지의 벡터  $\vec{c}_1$ 은 피니언의 구름운동에 따라  $\vec{c}_2$ 로 옮겨가고, 피니언과 피치선 위의 물림점  $\vec{a}_1$ 은  $\vec{a}_2$ 로 이동한다. 이때 고정좌표계 원점으로부터 치형 물림점까지의 벡터  $\vec{q}_1$ 은 새로운 물림점  $\vec{q}_2$ 로 옮겨간다. 여기서 피니언이 자유곡선의 피치선과 접하는 두점  $Q_1, Q_2$ 에서의 단위 법선벡터(Unit normal vector)를 각각  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 라 하고 이들사이의 관계를 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\vec{c}_2 = \vec{a}_2 + R\vec{u}_2 \quad (10)$$

$$\vec{q}_2 = \vec{c}_2 + [T]\vec{p}_2 \quad (11)$$

$$\text{여기에서 } [T] = \begin{bmatrix} \cos \eta - \sin \eta \\ \sin \eta \quad \cos \eta \end{bmatrix}$$

새로운 물림점의 위치 벡터  $\vec{q}_2$ 가 구하고자 하는 치형곡선 위의 한 점이 되므로 지금까지 전개한 식들을 이용하여 피니언 기어의 구름운동에 따른 개개의  $\phi$ 값으로 일련의 계산을 반복해 나가면 새로운 표준 인볼류트 치형을 얻게 된다.

### 3. 가공실험

고안된 자유곡면 상에서의 치형 구성원리를 수식화하고 실제 기어가공에 적용하기 위하여 이를 컴퓨터 프로그래

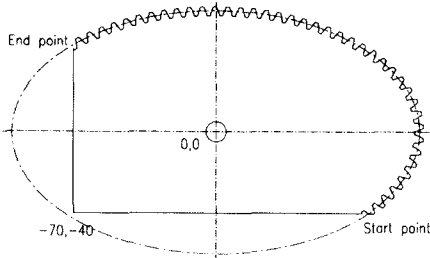


Fig. 7 Schematic of Involute Gear

밍하였다. Fig. 7은 작성된 알고리즘에 의해 계산된 수치를 컴퓨터 그래픽으로 나타낸 것이며 필요한 결과가 얻어졌음을 확인할 수 있다.

이 결과는 다시 수치제어 와이어 컷 방전가공기(Wire Cut EDM)에서 가공데이터로 활용할 수 있도록 G코드로 전환하였다. 이 과정에서 컴퓨터 그래픽 검증에 AutoCAD 소프트웨어가 사용되었으며, 또한 이로부터 생성된 DXF 파일로부터 NC코드로의 전환에는 캠(CAM) 소프트웨어인 X-CAM이 사용되었다.

본 연구에서 가공실험의 예로 프로그래밍된 자유곡면은 곡선의 기하학적 정의가 확실한 타원을 선택하였다. 흔히 타원형상의 기어가 지금까지의 연구 및 산업체에서 많이 활용되어 온 것은 사실이나 이들은 어디까지나 한 점을 회전중심으로 갖는 일종의 캠기어(Cam gear)란 점에서 본 연구에서 가공하고자 하는 자유곡면기어와는 확연한 차이가 있다. 즉 여기서는 주어진 한 점을 중심으로 회전하는 기어가 아니고 타원의 외면을 하나의 자유곡면으로 이용하여 그 위에 피니언이 구르는 경우란 점에서 기존의 캠 기어와는 다르다. 이 경우 구성되는 실제 치형은 타원면에 수직하게 된다. Fig. 8은 산출된 NC데이터를 이용하여 실제 가공한 결과이며, 실제가공에서 사용된 와

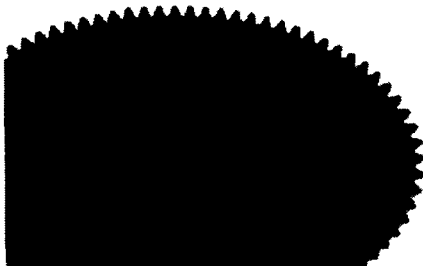


Fig. 8 Gear machined with a NC Program on the CNC Wire Cut EDM

Table 1 Machining Conditions of CNC Wire Cut -EDM

Machine	Fanuc W1	Wire Tention	1200
Controller	Fanuc	Wire Speed	10 Mm/min
Material	SM45C	Gap	0.03 mm
On Line	7 sec	Cutting Speed	2.2 Mm/min
Off Time	8 sec	Resistance	2~3 × 10e4 Ωcm
Wire Dia	0.25 mm	Offset	Axial: G40 H170 Radial: H150 um

이어 컷 방전가공기 및 가공조건은 Table 1과 같다.

#### 4. 검사 및 고찰

Fig. 8은 와이어 컷 방전가공기에 의해 제작된 타원면을 피치선으로 갖는 자유곡면기어를 보여 준다. 일반적으로 기어의 측정은 치차 버어니어, 치차 마이크로메타 등과 같은 계측기나 광학 프로젝트를 이용한 이상치차와의 비교 등으로 이루어진다. 그러나 자유곡면기어는 이러한 측정기구로 치차의 치 높이나 피치 그리고 치형검사등의 극히 일부분을 측정할 수 있으나 자유곡면기어는 표준치형에 대한 정의 또한 자유곡면의 수 만큼이나 무한하므로 이러한 방법에 의한 측정은 가능하지 않다. 다만 컴퓨터 그래픽으로 얻어진 곡면을 투명용지 위에 확대 출력하여 프로젝트에서 확인할 수 있으나, 이 또한 동일한 데이터를 비교하는 상황이 되기 때문에 기어 치형 산출알고리즘의 정확성에 대한 검사라기보다는 오히려 가공기 또는 가공 정도를 측정하는 의미가 되고 만다. 따라서 대안적인 검사방법은 정확한 치수로 가공된 피니언 기어를 이용하여 이들의 맞물림운동이 얼마나 정확한지를 확인하는 방법이 고려될 수 있다. Fig. 9에서 피니언기어는 모듈이 2mm이고,

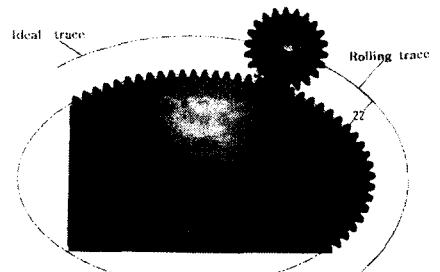


Fig. 9 Comparison of the Ideal and the Rolling Traces on the Freeform Gear

잇 수가 22개, 피치원의 반지름이 22mm이다. 피니언의 물림 운동시 피니언 기어의 중심점에 펜을 꽂아 두 기어를 맞물려 이동시킬 때 그리는 궤적(Rolling trace)과 이에 대응하는 이상적인 타원궤적(Ideal trace)과의 비교를 나타낸 것이다. 그림에서 실제 피니언의 궤적은 수학적 타원궤적과 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 물림운동에서 피니언 기어의 흔들림은 매우 작았으며, 여타의 표준 인볼류트 기어(Involute gear)끼리 물리는 경우와 하등의 차가 없었다.

## 5. 결 론

본 연구에서 자유곡선을 피치선으로 갖는 인볼류트 기어를 제작하기 위한 방법으로 흔히 인볼류트 기어의 창성법인 맞물려 구르게 하는 개념을 이용하여 치형곡선을 얻는 방안을 제시하고 이를 수식화 하였다. 또 수식화된 알고리즘을 바탕으로 실제 가공에 활용할 수 있도록 컴퓨터 프로그래밍하였으며 그 결과를 컴퓨터 그래픽으로 확인하였다. 여기서 얻어진 데이터를 G코드로 전환하여 수치 제어 방전가공기에서 기어를 제작하고 표준 기어와의 물림정도 및 동작상태를 검사하였다. 본 연구에서 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 인볼류트 기어의 구름 창성법의 원리를 이용한 자유곡선 기어의 구현방법으로, 자유곡선상에서의 정확한 치형의 설계가 가능하였다.
- (2) 제시된 알고리즘은 치형을 나타내는 정확한 수치 데이터를 산출할 수 있게 함으로써 와이어 컷방전가공기를 이용한 기어 제작에 직접 이용될 수 있었다.
- (3) 실제 제작된 타원형상의 자유곡선기어는 여타의 표준기어와 동질의 물림정도를 보였으며 제시된 알고리즘이 유효함을 입증하였다.
- (4) 제시된 알고리즘은 주어진 한 점을 중심으로 회전하지 않으면서도 비 원형 상에 치형이 필요한 여러 메커니즘 분야에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

## 참 고 문 헌

- (1) A.Cardou and G.V.Tordion, "A study of Super Gear Geometry Factor Through Complex Potential Areas", Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. ASME, Vol. 111/433, 1989.
- (2) Y.Cai and T. Hayashi, "The Linear Approximated Equation of Vibration of a pair of Spur Gears Theory and Experiment". ASME 6, Vol. 116, 1994.
- (3) Grant, Amer. Machinist, pp.4, Aug. 25. 1888.
- (4) Richard, Amer. Machinist, p.20, Apr. 22. 1897.
- (5) 窪田雅男, "非圓形齒車に關する 研究", 日本機械試驗所報告, No30, 3月, 1959.
- (6) Faydor L. Litvin, "Gear Geometry and Applied Theory", University of Illinois at Chicago 1994.
- (7) 漢山良明, "非圓形齒車 機構의設計,製作", 日本設計製圖學會論文集, Vol 22, No.5, pp.1~7, 1987.
- (8) 新井哲夫, "橢圓系形葉形齒車の設計", 日本機械會論文集, Vol 34, No.6, pp.82~93, 1990.
- (9) 山崎隆, "非圓形齒車の設計,製作および應用", 日本機械學會論文集, vol29, No11, pp47-51, 1985.
- (10) V.Sinon, "Optional Tooth Modifications for Spur and Helical Gears", Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design 2. ASME, Vol.111/ 611, 1989.
- (11) 최상훈, "인볼류트-트로코이드 치형을 갖는 타원계 엽형기어의 최소잇수에 관한연구", 한국 정밀공학회 제15권 제5호, pp.85~99, 1998.
- (12) 유명섭, "타원계 엽형기어의 설계 및 동특성에 관한연구", 한국 정밀공학회 제 15권 제 4호, pp.7~14, 1998.