經營科學
第16卷 第1號
1999年 5月

쌍대단체법의 효율적인 구현을 위한 기법*

임성묵** · 박찬규** · 김우제*** · 박순달**

Efficient Implementation Techniques for the Dual Simplex Method*

Sungmook Lim** · Chan-Kyoo Park** · Woo-Je Kim*** · Soondal Park**

■ Abstract ■

The purpose of this paper is to develope efficient techniques for implementing the dual simplex method. In this paper we proposed one artificial row technique to get an initial dual feasible basic solution, a dual steepest-edge method coupled with a dropping row selection rule, and an anti-degeneracy technique which resembles the EXPAND procedure for the primal simplex method. The efficiency of the above techniques is shown by experiments. Finally, the dual simplex method is shown to be superior to the primal simplex method when it is used in the integer programming.

1. 서 론

선형계획법의 해법으로는 1940년대에 Dantzig에 의해 개발된 단체법이 대표적이며, 그 실용성으로 인해 요즘도 널리 이용되고 있다[1]. 단체법은 주어진 문제의 최적조건을 만족시켜가는 방법에 따라 원단체법과 쌍대단체법으로 크게 나눌 수 있는데, 원단체법은 원가능 정점해에서 출발하여 원목적함수값을 개선시키면서 쌍대가능이 만족될 때까지 정점들을 방문하는 반면, 쌍대단체법은 쌍대가능 정점해에서 출발하여 쌍대목적함수값을 개선시키면서 원가능이 만족될 때까지 정점들을 방문하게 된다.

주어진 문제에 대해 선형계획법만을 독립적으로 사용하여 해결하고자 할 때 주로 원단체법을 이용하여 문제를 풀게 된다. 그러나, 정수계획법에서

* 본 연구는 한국과학재단의 특정기초연구과제(과제번호 98-0200-07-01-2)의 지원을 받았음.
** 서울대학교 산업공학과
*** 대진대학교 산업공학과

선형계획법을 사용하거나 선형계획문제에 대한 매개변수계획법을 풀고자 할 때에는 쌍대단체법의 사용이 원단체법에 비해 훨씬 효율적인 것으로 알려져 있다[2]. 그러므로 다른 수리계획법 해법의 부분해법으로 단체법을 효과적으로 적용하기 위해서는 쌍대단체법의 효율적인 구현이 상당히 중요하게 된다. 쌍대단체법은 쌍대문제에 원단체법을 적용하였다고도 생각할 수 있으므로 원단체법의 구현에서 적용되었던 효율적 기법들이 똑같이 쌍대단체법에도 적용되어 그 성능을 향상시킬 수 있다.

쌍대단체법의 흐름은 쌍대가능성은 만족되지만 원가능성이 만족되지 못한 정점에서 출발하여 원가능성을 만족시켜나가는 과정이다. 즉, 현재의 쌍대가능기저해에서 원비가능이 되는 기저변수를 탈락시키고 쌍대가능이 어긋나지 않도록 기저에 진입할 변수를 선택하는 과정을 반복하게 된다. 원단체법에 비해서 쌍대단체법에서 가장 시간이 많이 소요되는 부분은 탈락행의 수정이다. 기저역행렬의 탈락행부분을 계산해내고, 그 행과 모든 비기저열에 대해 내적연산을 수행하는 것이 전체 계산시간의 상당한 부분을 차지한다. 그러나 원단체법과는 달리 수정된 탈락행을 이용하여 할인가의 갱신이 가능하기 때문에 단체승수, 할인가의 계산량이 줄어들게 되는 이점이 있다. 따라서 원단체법에서 단체승수와 할인가를 모든 비기저열에 대해 계산하기 위해 사용하는 계산 시간이 쌍대단체법에서는 탈락행을 수정하는데에 해당한다고 할 수 있고 기저역행렬에 곱해지는 벡터의 형태를 볼 때 탈락행의 수정에 소요되는 계산량이 약간 적다고 할 수 있다. 그러나 쌍대단체법에서는 원 해의 수정이 불가능하기 때문에 매회 계산해 내야 한다. 결국, 원단체법과 쌍대단체법의 매 반복횟수당 계산량은 거의 비슷하거나 쌍대문제의 특성상(행이 열보다 많음) 쌍대단체법의 계산량이 약간 더 많다고 할 수 있다. 반면 전체 반복횟수는 문제의 특성에 따라 차이가 나게 된다.

쌍대단체법을 구현할 때 문제가 되는 것들은 초기 쌍대 가능기저해의 도출, 효율적인 진입변수의 선정, 효과적인 퇴화방지 방법의 사용 등이다.

초기 쌍대 가능기저해를 얻기 위해 주로 사용되는 방법으로 인공행 기법과 원단체법을 사용하는 방법이 있다. 인공행 기법은 비음조건만 있는 문제의 경우와 상하한 한계가 주어진 문제의 경우로 나누어 볼 수 있다.

단체법에서 반복횟수를 줄이는 방법으로 효율적인 평가전략을 사용하는 것이 효과적이다. 현재까지 우수하다고 실험적으로 검증된 평가방법으로는 Goldfarb의 최급등법(最急登法, Steepest-edge method)[9]이 있다. 그러나 이 방법은 반복횟수마다 계산량이 많아 효율적 구현이 중요한 문제가 된다. 근사적으로 최급등법을 구현하는 동적 최급등법이 근사해법 중 효과적이다[3][6]. 이러한 평가전략은 쌍대단체법에도 그대로 적용될 수 있다.

단체법이 내부점 기법에 비해 약점으로 가지는 부분이 퇴화문제이다[5]. 현재까지 퇴화문제를 해결하는 방법으로 Bland법[1], 섭동법[8], EXPAND Procedure[11]등이 있고, 그 중 MINOS에 구현된 EXPAND Procedure가 효율적이라고 알려졌다. EXPAND Procedure는 변수의 비가능을 약간 허용하는 방법인데 이 방법도 쌍대단체법에 적용될 수 있다. 즉, 쌍대변수의 비가능을 허용하는 것이다.

본 연구에서는 이와 같은 쌍대단체법 구현문제에 대해 살펴본다.

2. 인공행을 이용한 쌍대단체법

원문제와 쌍대문제가 다음과 같이 주어져 있다고 하자.

$$
\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} \mathit{Max} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t. & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{l}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{u} \end{array}
$$

$$
\text{(D)}\quad \begin{array}{ll} \mathit{Min} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{l}^T\boldsymbol{z}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} \\ s.t. & A^T\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c} \\ & \qquad \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\ge 0 \end{array}
$$

(단, A: $m\times n$, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{u}$: $n\times 1$, $\boldsymbol{b}$: $m\times 1$)

이 문제에 대해 다음과 같은 정리가 성립하는데, 이에 대한 증명은 생략한다.

[정리 1] 기저 B에 대해 하한 비기저변수의 할인가가 비음이고, 상한 비기저변수의 할인가가 비양이면 기저 B는 쌍대가능 기저이다.

위 정리에 의하면 현재 주어진 기저 B에 대해 다음이 만족되면 B는 쌍대가능기저가 된다.

$$\bar{c}_j = A_j^T B^{-T} \boldsymbol{c}_B - c_j \geq 0 \quad \text{for } j \in \{k \mid x_k \text{ 는 하한 비기저변수}\}$$

$$\bar{c}_j = A_j^T B^{-T} \boldsymbol{c}_B - c_j \leq 0 \quad \text{for } j \in \{k \mid x_k \text{ 는 상한 비기저변수}\}$$

위의 조건을 만족하는 쌍대가능 기저 B를 얻기 위한 방법으로는 원단체법을 이용하는 방법과 인공행을 이용하는 기법이 대표적이다[5].

원단체법을 적용하면 최적해에서 쌍대가능이 된다는 것을 이용하여 초기 쌍대기저가능해를 구할 수 있다. 즉, 현재의 기저가 쌍대 비가능이면 우변상수를 조작함으로써 임의의 원가능기저해를 만든 다음, 원단체법을 적용하여 쌍대가능기저해를 구하는 방법이다. 현재 주어진 기저가 B라고 할 때, 변수의 상하한 한계를 만족하는 임의의 기저해를 $\boldsymbol{x}_B$라고 하고, 하한 비기저변수 지수 집합과 상한 비기저변수 지수 집합을 각각 N_1, N_2라고 하면 B는 우변상수를 $B\boldsymbol{x}_B + \sum_{j \in N_1} l_j A_j + \sum_{j \in N_2} u_j A_j$로 놓으면 원가능기저가 된다. 이후 새로운 우변상수 $B\boldsymbol{x}_B + \sum_{j \in N_1} l_j A_j + \sum_{j \in N_2} u_j A_j$를 가지고 원단체법을 진행하여 최적해를 구해내면 하나의 쌍대가능기저가 얻어지게 되는 것이다. 즉, 하한비기저변수의 할인가는 비음이 되고 상한비기저변수의 할인가는 비양이 된다. 쌍대가능성은 목적함수계수와 행렬 A에만 관련되고 우변상수와는 무관하므로 우변상수를 변형하고 원단체법을 적용하여 얻은 쌍대가능기저는 원래의 우변상수에 대해서도 쌍대가능이 되는 것은 자명하다.

초기쌍대가능기저해를 구해내는 두 번째 방법은 인공행을 삽입하는 방법이다. 변수에 비음조건만 존재하는 선형계획법 문제에서는 다음 그림과 같은 계수와 대수(大數) M을 우변상수로 가지는 인공행을 삽입하여 가장 작은 할인가를 가지는 비기저 변수를 진입시키고 x_0를 탈락시키면 다음 회에서 쌍대가능기저해가 만들어지게 된다[1].

[정리 2] 위 그림의 문제에서 가장 작은 할인가를 가지는 변수를 진입시키고 x_0를 탈락시키면 쌍대가능기저해가 만들어진다.

(증명) 가장 작은 할인가를 가지는 변수가 x_q라고 하자. 그러면 $\bar{c}_q \leq \bar{c}_j$이 모든 비기저 변수에 대해 성립한다. 한편 x_q가 진입하고 x_0가 탈락되면 각 비기저변수의 할인가는 다음과 같이 된다.

$$\hat{c}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_q \geq 0 \ \forall j$$

$$\begin{array}{llllll}
z & & + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} & + \bar{c}_{m+2}x_{m+2} & + \dots + \bar{c}_n x_n & = \bar{z} \\
x_1 & & + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} & + \bar{a}_{1m+2}x_{m+2} & + \dots + \bar{a}_{1n} x_n & = \bar{b}_1 \\
\quad x_2 & & + \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} & + \bar{a}_{2m+2}x_{m+2} & + \dots + \bar{a}_{2n} x_n & = \bar{b}_2 \\
 & \vdots & \vdots & & & \\
 & x_m & + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} & + \bar{a}_{mm+2}x_{m+2} & + \dots + \bar{a}_{mn} x_n & = \bar{b}_m \\
x_0 & & + x_{m+1} & + x_{m+2} & + \dots + x_n & = M \quad \leftarrow \text{인공행}
\end{array}$$

(단, 기저변수는 $x_0, \cdots, x_m$, $\bar{A} = B^{-1}A$, $\bar{a}_{pq}$는 $\bar{A}$의 (p, q)요소, $\bar{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b}$)

〈그림 1〉 쌍대단체법에서의 인공행 기법

따라서 다음 회에 쌍대가능기저해가 만들어진다. ■

그러나 문제 (P)와 같은 일반한계문제[1]에서는 위 방법을 그대로 적용하기가 곤란하다. 일반한계문제에 대한 원단체법에서의 단일인공변수법과 유사하게 변수의 상하한이 주어진 상황에서 쌍대단체법에서도 단일인공행 기법을 사용할 수 있다. 구체적인 방법은 다음과 같다.

우선, 기저변수가 $x_1, \cdots, x_m$이라고 할 때 쌍대비가능이 발생한 비기저변수 중 하나를 임의로 선택하고 그 변수를 $x_k(m+1 \le k \le n)$라고 하자. 그리고, 추가될 제약식 $x_0 + \boldsymbol{t}^T\boldsymbol{x} = M$에서 $n\times 1$ 벡터 $\boldsymbol{t}$를 다음과 같이 정의하자.

$$
\begin{aligned}
t_i &= 0 \ , i = 1, \cdots, m \\
t_i &= \left(-\frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_k} + \bar{c}_k\right) \cdot sign(\bar{c}_k), \\
&\quad x_i \text{ 는 하한 비기저변수}, \ i \neq k \\
t_i &= \left(-\frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_k} - \bar{c}_k\right) \cdot sign(\bar{c}_k), \\
&\quad x_i \text{ 는 상한 비기저변수}, \ i \neq k \\
t_k &= 1, \ x_k \text{ 가 하한 비기저변수일 때} \\
&= -1, \ x_k \text{ 가 상한 비기저변수일 때}
\end{aligned} \tag{1}
$$

그러면 위 식 (1)과 같이 정의된 제약식이 추가된 문제에서 기저변수는 $x_0, x_1, \cdots, x_m$이다. 이 때, x_0가 탈락되고 x_k가 진입되면 아래의 [정리 3]에 의해 다음 회에 쌍대가능 기저가 만들어 진다. 물론 새로 추가된 제약식의 우변상수가 어떤 수보다 큰 수라고 가정하므로 임의의 모든 해는 추가된 제약식을 만족하게 된다. 그러므로 추가된 제약식은 원래의 제약식 공간을 축소시키지 않는다는 것은 자명하다.

[정리 3] 식 (1)에 의해 만들어지는 제약식이 추가된 뒤 x_0가 탈락되고 x_k가 진입되면 다음 회에 쌍대가능 기저가 만들어 진다.

(증명)

case 1 : x_k가 상한 비기저변수로 쌍대가능성이 만족되지 못하는 경우, $\bar{c}_k > 0$

다음 회의 하한 비기저변수 x_j의 할인가를 계산해 보면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_0 &= \bar{c}_k > 0 \\
\hat{c}_j &= \bar{c}_j + t_j\bar{c}_k = \bar{c}_j + \left(-\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} + \bar{c}_k\right)\bar{c}_k = \bar{c}_k^2 > 0
\end{aligned}
$$

다음 회의 상한 비기저변수 x_j의 할인가를 계산해 보면 다음과 같다.

$$
\hat{c}_j = \bar{c}_j + t_j\bar{c}_k = \bar{c}_j + \left(-\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} - \bar{c}_k\right)\bar{c}_k = -\bar{c}_k^2 < 0
$$

case 2 : x_k가 하한 비기저변수로 쌍대가능성이 만족되지 못하는 경우, $\bar{c}_k < 0$

다음 회의 하한 비기저변수 x_j의 할인가를 계산해 보면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_0 &= -\bar{c}_k > 0 \\
\hat{c}_j &= \bar{c}_j - t_j\bar{c}_k = \bar{c}_j + \left(-\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} + \bar{c}_k\right)\bar{c}_k = \bar{c}_k^2 > 0
\end{aligned}
$$

다음 회의 상한 비기저변수 x_j의 할인가를 계산해 보면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_j &= \bar{c}_j - t_j\bar{c}_k = \bar{c}_j + \left(-\frac{\bar{c}_j}{\bar{c}_k} - \bar{c}_k\right)\bar{c}_k \\
&= -\bar{c}_k^2 < 0
\end{aligned}
$$
■

앞에서 살펴본 바와 같이 쌍대가능을 만들기 위해 인공행 각 요소가 취할 수 있는 값의 범위가 주어지게 되는데 실제로 그 값을 결정할 때에는 수치적 안정성을 고려하여야 한다. 또한 값을 임의대로 정한 다음 그 행에 대해 규모화[4]를 수행할 수도 있다.

3. 쌍대 최급등법(Dual steepest-edge method)

원문제와 쌍대문제가 다음과 같이 주어져 있다

고 하자.

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{ll} Max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t. & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq 0 \end{array} \qquad \text{(D)}\quad \begin{array}{ll} Min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\pi} \\ s.t. & A^T\boldsymbol{\pi}\leq \boldsymbol{c} \end{array}$$

(단, $A: m\times n$, $\boldsymbol{c}: n\times 1$, $\boldsymbol{b}: m\times 1$)

최급등법의 기본 개념은 목적함수의 개선방향과 가장 작은 각도를 이루는 능선방향에 해당 하는 진입변수를 선택하는 것이다[6]. 즉, 최대화문제의 경우 목적함수개선방향은 목적함수계수 $\boldsymbol{c}$가 되고 이것과 가장 작은 각도를 이루는 능선방향을 택한다. 원단체법에서 한 비기저변수의 할인가는 그 비기저변수가 진입했을 때의 능선방향과 그 변수의 목적함수계수의 내적으로 이루어진다. 즉, 기저가 B일 때 다음과 같이 할인가가 계산된다.

$$\overline{c}_j=-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\eta}_j \quad \boldsymbol{\eta}_j=\begin{bmatrix}-B^{-1}N\\ I\end{bmatrix}\boldsymbol{e}_{j-m},$$
$$j=m+1,\ldots,n$$

(단, $A=[B,\ N]$, $N: m\times(n-m)$, $I:(n-m)\times(n-m)$ 단위행렬 $\boldsymbol{e}_j$: j번째 단위벡터)

그러나 이 할인가는 능선방향과 목적함수 개선방향과 이루는 각도를 정확히 반영하지 못한다. 즉, 내적의 결과에는 각도이외에 능선방향의 크기(norm)도 같이 곱해져 있다. 그러므로 정확한 각도를 계산해 내려면 능선방향의 크기로 정규화해야 하며 따라서 최급등법에서는 다음과 같이 평가(pricing)를 한다.

$$\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\eta}_q}{\|\boldsymbol{\eta}_q\|}=\max_{j>m}\left\{\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\eta}_j}{\|\boldsymbol{\eta}_j\|}\right\}=\min_{j>m}\left\{\frac{\overline{c}_j}{\|\boldsymbol{\eta}_j\|}\right\}$$

쌍대단체법에서도 위와 같은 개념을 적용할 수 있다. 쌍대문제는 최소화문제이고, 쌍대목적함수계수는 $\boldsymbol{b}$이므로 개선방향은 $-\boldsymbol{b}$가 된다. 따라서, 쌍대단체법에서의 최급등법에서는 $-\boldsymbol{b}$와 가장 작은 각도를 이루는 능선방향을 선택하게 된다. p행이 탈락하고 q열이 진입되었을 경우의 쌍대해의 변화는 다음과 같다.

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}=\boldsymbol{\pi}-(\overline{c}_q/\overline{a}_{pq})B^{-T}\boldsymbol{e}_p$$

(단, $\overline{A}=B^{-1}A$, $\overline{a}_{pq}$는 $\overline{A}$의 (p,q) 요소, $\boldsymbol{e}_p$: p번째 단위벡터)

위 식에서 알 수 있듯이 쌍대단체법에서의 능선방향은 $B^{-T}\boldsymbol{e}_p$가 된다. 여기서 $B^{-T}\boldsymbol{e}_p$는 기저역행렬의 탈락행 부분을 나타낸다. 따라서 쌍대목적함수 개선방향과 능선방향과의 각도를 θ라고 할 때 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\cos\theta=\frac{-\boldsymbol{e}_p^TB^{-1}\boldsymbol{b}}{\|B^{-T}\boldsymbol{e}_p\|\,\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{-\boldsymbol{e}_p^T\overline{\boldsymbol{b}}}{\|B^{-T}\boldsymbol{e}_p\|\,\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{-\overline{b}_p}{\|B^{-T}\boldsymbol{e}_p\|\,\|\boldsymbol{b}\|}$$

목적함수 개선방향 $-\boldsymbol{b}$와 현재의 해가 진행할 능선방향은 예각을 이루어야 목적함수값이 개선이 되므로 $\overline{\boldsymbol{b}}_p$가 음이 되어야 한다. 즉, 기저변수의 값이 음인 행이 탈락되면 목적함수값이 개선된다.

일반적인 쌍대단체법에서는 기저변수의 값, $\overline{\boldsymbol{b}}$를 탈락될 행을 선택하는 평가기준으로 삼는다. 그러나, $\overline{\boldsymbol{b}}$는 목적함수 개선방향과 능선방향의 정확한 각도를 나타내지 못한다. 즉, 기저변수의 값을 능선방향 $B^{-T}\boldsymbol{e}_p$의 크기(norm)으로 나누어 주어야 정확한 각도를 이용한 기준이 되는 것이다.

그래서 쌍대 최급등법에서는 다음과 같은 탈락변수선정방법이 사용된다.

$$\frac{\boldsymbol{\rho}_p^T\overline{\boldsymbol{b}}}{\|\boldsymbol{\rho}_p\|\|\boldsymbol{b}\|}=\min_{i\leq m}\left\{\frac{\boldsymbol{\rho}_i^T\overline{\boldsymbol{b}}}{\|\boldsymbol{\rho}_i\|\|\boldsymbol{b}\|}\right\},\ \text{단}\ \boldsymbol{\rho}_j^T$$
는 기저역행렬의 j번재 행, 즉 $\boldsymbol{e}_j^TB^{-1}$

위에서 $\|\boldsymbol{b}\|$는 공통이므로 생략가능하다. $\dfrac{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\rho}_p}{\|\boldsymbol{\rho}_p\|}$의 값이 비음이면 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\rho}_p=\overline{\boldsymbol{b}}_p$도 비음이므로 원

가능이 만족되므로 최적이다. 그렇지 않을 때, p 행의 기저변수가 탈락되고 최소비율검정에 의해 x_q가 진입되며 그 때의 최소비율이 $\alpha(\geq 0)$라고 한다면 목적함수값은 다음과 같이 개선된다.

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{b} &= -(\overline{c_q}/\overline{a_{pq}})\overline{\boldsymbol{b}}_p \\ &= \alpha\overline{\boldsymbol{b}}_p = \alpha\frac{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\rho}_p}{\|\boldsymbol{\rho}_p\|}\|\boldsymbol{\rho}_p\| \leq 0\end{aligned}$$

위 식을 보면 알 수 있듯이 쌍대단체법에서 최급등법을 적용하기 위해서는 기저역행렬의 모든행에 대한 크기(norm)을 매회 유지해야 한다.

기저역행렬의 모든행에 대한 크기를 매회 계산하는 하는 것은 많은 시간이 소요되므로 매회 갱신하는 방법이 효율적이다. $\boldsymbol{\rho}_j$와 $\beta_j=\|\boldsymbol{\rho}_j\|^2$의 갱신식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{\rho}}_p=(1/\overline{a}_{pq})\boldsymbol{\rho}_p, \\ &\overline{\boldsymbol{\rho}}_i=\boldsymbol{\rho}_i-(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})\boldsymbol{\rho}_p, \quad i=1,\cdots,m,\ i\neq p\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\overline{\beta}_p=(1/\overline{a}_{pq})^2\beta_p \\ &\overline{\beta}_i=\beta_i-2(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})\boldsymbol{e}_i^TB^{-1}(B^{-T}\boldsymbol{e}_p)+ \\ &\qquad(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})^2\beta_p, \quad i=1,\ldots,m,\ i\neq p\end{aligned} \tag{2}$$

위 식 (1)은 선회연산의 과정이므로 당연하다. 그리고, 식 (2)는 식 (1)로부터 다음과 같이 유도된다

$$\|\overline{\boldsymbol{\rho}}_p\|^2=(1/\overline{a}_{pq})^2\|\boldsymbol{\rho}_p\|^2, \quad \overline{\beta}_p=(1/\overline{a}_{pq})^2\beta_p$$

$$\begin{aligned}\|\overline{\boldsymbol{\rho}}_i\|^2 &= \|\boldsymbol{\rho}_i-(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})\boldsymbol{\rho}_p\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{\rho}_i\|^2-2(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{\rho}_i)_k(\boldsymbol{\rho}_p)_k \\ &\quad+(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})^2\|\boldsymbol{\rho}_p\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{\rho}_i\|^2-2(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})(B^{-T}\boldsymbol{e}_i)^T(B^{-T}\boldsymbol{e}_p) \\ &\quad+(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})^2\|\boldsymbol{\rho}_p\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{\rho}_i\|^2-2(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})\boldsymbol{e}_i^TB^{-1}(B^{-T}\boldsymbol{e}_p) \\ &\quad+(\overline{a}_{iq}/\overline{a}_{pq})^2\|\boldsymbol{\rho}_p\|^2\end{aligned}$$

일반적으로 쌍대단체법의 최급등법이 원단체법의 그것보다 계산량이 더 작다[6]. 이유는 최급등법계수(β_j)의 수정에서 원단체법이 쌍대단체법보다 많은 내적연산이 필요하고, 일반적으로 원문제는 행의 개수가 열의 개수보다 훨씬 작기 때문에 쌍대 최급등법 계수의 수정연산이 원단체법보다 훨씬 작다고 할 수 있기 때문이다. 또한 쌍대 최급등법에서 이루어지는 $B^{-T}\boldsymbol{e}_i$ 연산이 원최급등법에서 이루어지는 $B^{-1}\overline{A}_j$ 보다 희소도를 잘 이용할 수 있기 때문이다. 그리고 위의 갱신식에서 $\overline{a}_{iq}(i=1,\cdots,m)$은 기저역행렬과 해를 수정할 때 필요한 수정된 진입열 $B^{-1}A_q$에 해당한다.

실험 결과

앞에서 설명한 쌍대 최급등법에 대한 성능을 평가하기 위해 쌍대단체법 프로그램의 평가전략으로 구현하여 실험하였다. 일반적으로 사용하는 탈락변수선정법은 최대비가능 기저변수선정법(최대비가능법)인데 이것을 비교대상으로 삼았다. 실험 대상 문제로는 Netlib. 문제[7]를 대상으로 삼았고, 다음은 그 실험결과를 나타낸 표이다.

〈표 1〉 쌍대 최급등법 구현결과

문 제			쌍대 최급등법		최대비가능법	
이름	행	열	수행 횟수	수행 시간	수행 횟수	수행 시간
pilot4	441	1000	945	5.38	2465	11.41
tuff	334	587	81	0.28	106	0.34
d6cube	416	6184	3362	65.67	5070	74.01
greenbea	2393	5405	3095	44.97	4678	79.65
25fv47	822	1571	2642	24.87	6048	57.65
bnl2	2325	3489	1723	24.69	3669	34.05
perold	626	1376	1615	13.22	4446	23.49
maros	847	1443	409	9.06	456	11.70
degen2	445	534	514	1.78	998	3.06
평 균			1598	21.10	3104	32.80

위의 실험결과를 보면 알 수 있듯이 쌍대 최급등법이 최대비가능법보다 수행시간면에서 30% 정도 우수한 것으로 판명되었다.

4. 쌍대 단체법에서의 퇴화방지 기법

일반한계문제에서 쌍대단체법은 하한의 값을 가지는 비기저변수의 할인가가 모두 비음이고 상한의 값을 가지는 비기저변수의 할인가가 모두 비양인 상태를 쌍대가능으로 인식하고 국면 2를 시작한다. 국면 2에서는 쌍대가능을 계속 유지하면서 원가능을 만족시켜 간다.

원단체법에서의 퇴화방지 기법중 하나인 Devex rule의 기본개념은 기저변수의 상하한을 섭동시켜 탈락변수를 선정하는 것이다[10]. 원래 이 기법의 목적은 기저변수의 비가능성을 약간 허용하여 절대값이 큰 선회요소를 선택함으로써 수치적 안정성을 도모하는 것이었지만 의외로 퇴화방지의 효과가 있었다. 또 다른 퇴화방지 기법으로 MINOS에 구현된 EXPAND Procedure가 있다. 이 기법은 기저변수뿐만 아니라 비기저변수에서의 비가능성도 허용하여 Devex rule를 개선하였고, 섭동량도 늘려나가다가 재설정하는 것을 반복하는 방법을 취하고 있다. 그리고 Devex rule과는 달리 개선폭의 하한을 설정하여 최소한의 목적함수값 개선을 보장하였다[11].

원단체법에서의 퇴화방지기법을 쌍대단체법에서도 똑같이 적용할 수 있다. 즉, 쌍대변수의 비가능성을 약간 허용하면서 선회요소의 절대값이 최대한 크게 되도록 진입변수를 선택하는 것이다. 쌍대단체법에서 쌍대여유변수값은 할인가로 표현이 되므로 진입변수를 선택하기 위한 최소비율검정을 할 때 할인가의 한계를 약간 섭동시켜 검정을 수행한다. 쌍대단체법에 적용된 EXPAND Procedure를 D-EXPAND Procedure라고 하자.

일반적으로 일반한계문제를 쌍대단체법으로 풀 때 진입변수를 선정하기 위한 최소비율검정은 다음과 같이 수행한다. 단, 기저변수는 $x_1, \cdots, x_m$이라고 가정한다.

i) 탈락변수 x_r이 하한보다 작은 경우

이 경우는 탈락변수의 값을 증가 시켜야 하기 때문에 $\bar{a}_{rj} < 0$인 비기저 변수가 하한에 있는 경우나 $\bar{a}_{rj} > 0$인 비기저변수가 상한에 있는 경우 진입가능 변수가 된다. 그리고 하한비기저변수의 할인가는 하한이 영이고, 상한비기저변수의 할인가는 상한이 영이므로 진입변수의 선택 방법은 다음과 같다.

$$min\ \{-\bar{c}_j/\bar{a}_{rj} \mid \bar{x}_j = u_j, \bar{a}_{rj} > 0 \text{ or } \bar{x}_j = l_j, \bar{a}_{rj} < 0,\ j = m+1, \cdots, n\}$$

ii) 탈락변수 x_r이 상한보다 큰 경우

이 경우는 탈락변수의 값을 감소시켜야 하기 때문에 $\bar{a}_{rj} < 0$인 비기저 변수가 상한에 있는 경우나 $\bar{a}_{rj} > 0$인 비기저변수가 하한에 있는 경우 진입가능변수가 된다. 위와 유사하게 진입변수의 선택 방법은 다음과 같다.

$$min\ \{\bar{c}_j/\bar{a}_{rj} \mid \bar{x}_j = u_j, \bar{a}_{rj} < 0 \text{ or } \bar{x}_j = l_j, \bar{a}_{rj} > 0,\ j = m+1, \cdots, n\}$$

D-EXPAND Procedure에서는 EXPAND Procedure와 동일하게 two-pass 방식으로 최소비율검정을 수행한다[11]. 첫째 pass에서는 할인가의 한계를 섭동시킨 후 최소비율검정을 수행한다. 두번째 pass에서는 첫째 pass에서 구한 최소비율값보다 작으면서 선회요소의 절대값을 크게하는 진입변수를 선정한다. 즉 이 방법은 쌍대가능성을 약간 위반하면서 선회연산시의 수치적 안정성을 추구하게 된다. 또한 EXPAND Procedure 처럼 섭동량을 매회 증가시키고 어느 이상 증가했을 때 원래값으로 재설정한다. 그리고 최소한의 쌍대목적함수값 개선을 위해 개선폭의 하한을 설정할 수도 있다. 이러한 방법을 pseudo code로 구현하면 다

음과 같다.

procedure D_EXPAND

$\alpha_1 \leftarrow ratio\_test(\bar{c}, \bar{A}_{r.}, \delta)$
$r \leftarrow 0, p_{\max} \leftarrow 0$
for $j = m+1$ *until* n *do*
  $\alpha_j \leftarrow step(\bar{c}_j, \bar{a}_{rj})$
  if $\alpha_j \leq \alpha_1$ and $|p_j| > p_{max}$ *then*
    $r \leftarrow j;\ \alpha_2 \leftarrow \alpha_j;\ p_{max} \leftarrow |p_j|$
  endif
endfor
$\alpha_{min} \leftarrow \tau / |p_r|$ (*minimum acceptance step*)
$\alpha = max\{\alpha_2, \alpha_{\min}\}$

〈그림 2〉 D__EXPAND Procedure

위의 pseudo code에서 *ratio_test*()는 주어진 섭동량 δ로 최소비율검정을 하는 첫째 pass를 수행하는 함수이고, *step*()은 j번째 변수에 대해 할인가의 한계를 섭동시키지 않고 비율검정을 수행하는 함수이다. 그리고 p_j는 선회요소를 나타낸다. 또한 α_{min} 은 최소한의 개선폭이고, τ는 이를 결정하는 상수이다.

할인가의 상하한을 섭동시켜 최소비율검정을 수행하는 함수인 *ratio_test*()의 내용은 다음과 같다.

i) 탈락변수가 하한보다 작은 경우

$$min\ \{-(\bar{c}_j - \delta) / \bar{a}_{rj} \mid \bar{x}_j = u_j, \bar{a}_{rj} > 0\ ,$$
$$\delta > 0 \text{ or } \bar{x}_j = l_j, \bar{a}_{rj} < 0\ , \delta < 0\}$$

ii) 탈락변수가 상한보다 큰 경우

$$min\ \{(\bar{c}_j - \delta) / \bar{a}_{rj} \mid \bar{x}_j = u_j, \bar{a}_{rj} < 0\ ,$$
$$\delta > 0 \text{ or } \bar{x}_j = l_j, \bar{a}_{rj} > 0\ , \delta < 0\}$$

〈그림 3〉 ratio__test()의 내용

또한, 매회 섭동량 δ를 τ만큼 증가시키고, 일정 회수 이후 초기 섭동량으로 재설정한다.

실험 결과

앞에서 설명한 퇴화방지 기법에 대한 성능을 평가하기 위해 쌍대단체법 프로그램에 구현하여 실험하였다. 아무런 퇴화방지 기법이 적용되지 않았을 때를 비교대상으로 삼았다. 실험 대상 문제로는 Netlib. 문제를 대상으로 삼았고, 다음은 그 실험결과를 나타낸 표이다.

〈표 2〉 퇴화방지 기법 구현결과

문 제			퇴화방지 기법 사용		퇴화방지 기법 미사용	
이름	행	열	수행 횟수	수행 시간	수행 횟수	수행 시간
ganges	1310	1681	408	3.17	513	3.72
scrs8	491	1169	410	1.09	416	1.17
capri	272	353	259	0.48	300	0.54
nesm	663	2923	2832	16.80	3325	21.92
woodw	1099	8405	3009	36.87	3271	39.51
pilotnov	976	2172	1228	11.10	1237	11.75
pilot4	441	1000	1476	7.78	1864	15.10
czprob	930	3523	872	5.08	890	5.66
e226	224	282	330	0.50	343	0.58
평 균			1202	9.21	1351	11.11

5. 정수계획법에서의 쌍대단체법

정수계획법의 대표적인 해법은 분지한계법과 절단평면법등이다[2]. 두 가지 해법 모두 선형계획법 문제를 부문제로 하기 때문에 효율적인 선형계획법 프로그램의 개발은 필수적이다. 분지한계법은 매회 푸는 부문제들이 쌍대가능성은 유지된채 원비가능성만 발생하게 되고, 절단평면법 또한 추가되는 절단제약식으로 인해 원비가능성만 발생한다. 그러므로, 쌍대가능성을 효과적으로 이용할 수 있는 쌍대단체법이 원단체법에 비해 훨씬 유리하게 된다.

실험 결과

다음은 분지한계법을 해법으로 사용하는 혼합정수계획법 프로그램에서 선형계획법 해법 프로그램으로 원단체법 프로그램을 사용하는 경우와 쌍대단체법 프로그램을 사용하는 경우의 실험결과이다. 그리고, 실험 대상은 MIPLIB.에 있는 10문제를 채택하였다.

〈표 3〉 정수계획법에서 쌍대단체법의 사용에 대한 실험결과

정수계획법 문제				원단체법의 사용		쌍대단체법의 사용	
문제이름	제약식	변수	정수변수	LP Iter.	전체수행시간	LP Iter.	전체수행시간
air02	50	6774	6774	492	8.97	169	4.69
air03	124	10757	10757	1978	43.19	410	13.06
stein9	13	9	9	144	0.08	129	0.05
stein15	36	15	15	1560	0.49	1152	0.39
bm23	20	27	27	13249	3.33	10618	2.99
p0040	23	40	40	1071	0.15	1071	0.15
sentoy	30	60	60	8321	4.98	4667	2.96
lp41	85	1086	1086	5347	7.41	551	1.35
rgn	24	180	100	74288	18.55	52610	16.94
mod008	6	319	319	51818	25.63	36902	22.79
평 균				15826	11.28	10828	6.54

6. 결 론

본 연구에서는 쌍대단체법을 구현할 때 중요한 구현 문제들에 대해 살펴보았다. 첫째, 쌍대단체법에서 필요한 초기 쌍대기저가능해의 도출을 위한 일반한계문제에서의 단일인공행 기법을 제시하였고, 둘째, 탈락변수를 효과적으로 선정하기 위한 쌍대 최급등법의 구현에 관해 살펴보고 그 우수성을 실험을 통해 검증하였다. 그리고, 쌍대퇴화를 효율적으로 방지하기 위한 방법으로 원단체법의 EXPAND Procedure와 같은 개념의 할인가 섭동법(D-EXPAND Procedure)을 제시하였다. 마지막으로 정수계획법에서 쌍대단체법이 원단체법에 비해 아주 유리하게 사용될 수 있는 것을 실험을 통해 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 「선형계획법(3정판)」, 민영사, 1992

[2] 박순달, 「OR(경영과학)」, 민영사, 1991

[3] 박찬규, 임성묵, 박순달, "동적 steepest-edge 방법과 퇴화방지기법의 구현", 「한국경영과학회/대한산업공학회 '97 춘계 공동학술대회 논문집」(1997).

[4] 안재근, 김우제, 박순달, "단체법에서의 규모화와 허용오차", 「전산활용연구」, 제6권 1호 (1994), pp.29-39

[5] Fang, S., Sarat, P., *Linear Optimization and Extensions : Theory and Algorithms*, Prentice Hall, 1993.

[6] Forrest, J. J, Goldfarb, D., "Steepest-edge simplex algorithms for linear programming," *Mathematical Programming* 57(1992), pp. 341-374.

[7] Gay, D. M., "Electronic mail distribution of linear programming test problems," *Mathematical Programming Society Committee on Algorithms Newsletter* 13(1985).

[8] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

[9] Goldfarb, D., Reid, J.K., "A practical steepest-edge simplex algorithm," *Mathematical Programming* 5(1973), pp.1-28.

[10] Harris, P. M. J., "Pivot selection methods of the Devex LP code," *Math. Prog.*, 5(1973), pp.1-28.

[11] Gill, P. E., Walter Murray, Michael A. Saunders, Margaret H. Wright, "A Practical Anti-Cycling Procedure for Linear Constrained Optimization," *Mathematical Programming* 45(1989), pp.437-474.