

논문-99-4-2-06

곱셈기가 없는 이진수 QMF-웨이브렛 필터를 사용한 영상처리

신종홍*, 지인호*

Image Processing Using Multiplierless Binomial QMF-Wavelet Filters

Jonghong Shin* and Innho Jee**

요 약

이진수열은 간단하고 곱셈기가 필요 없이 생성될 수 있는 직교 수열이다. 이 논문은 곱셈기 작동이 없는 선택적인 주파수 영상 처리를 위하여 비 반복적인 다차원 필터를 도입하였다. 주파수 응답은 저역, 대역, 고역의 여파를 제공하여 주는 가우시안 형태를 가진 협대역이 된다. 이런 필터들의 효과적인 구현을 위한 소프트웨어와 하드웨어의 알고리즘을 제안하였다. 또한 이진수의 QMF(Quadrature Mirror Filter:QMF)는 좋은 대역 압축을 가진 최대한의 편평한 제곱 특성의 완전 회복의 Paraunitary 필터가 됨을 보이고 웨이브렛 변환으로 확장하였다. 웨이브렛 변환은 원래의 영상을 피라미드 구조를 사용하여 다른 스케일로 분할한다. 이 분할은 수직과 수평으로 수행되어 영상을 기술하는 데 필요한 픽셀의 수를 일정하게 유지시켜 준다. 효과적인 완전회복의 이진수 QMF-웨이브렛 신호의 분석구조를 제안하였다. 이 기술은 매우 좋은 주파수 응답과 대역분할을 해주는 필터 해법을 제공해 준다. 이 제안한 이산 수열의 QMF-필터의 구조는 효과적이고 VLSI 구현에 간단하고 다해상도 신호 분할과 코딩의 응용들에 적합함을 보였다.

Abstract

The binomial sequences are family of orthogonal sequences that can be generated with remarkable simplicity-no multiplications are necessary. This paper introduces a class of non-recursive multidimensional filters for frequency-selective image processing without multiplication operations. The magnitude responses are narrow-band, approximately gaussian-shaped with center frequencies which can be positioned to yield low-pass, band-pass, or high-pass filtering. Algorithms for the efficient implementation of these filters in software or in hardware are described. Also, we show that the binomial QMFs are the maximally flat magnitude square Perfect Reconstruction paraunitary filters with good compression capability and these are shown to be wavelet filters as well. In wavelet transform the original image is decomposed at different scales using a pyramidal algorithm architecture. The decomposition is along the vertical and horizontal direction and maintains constant the number of pixels required to describe the images. An efficient perfect reconstruction binomial QMF-Wavelet signal decomposition structure is proposed. The technique provides a set of filter solutions with very good amplitude responses and band split. The proposed binomial QMF-filter structure is efficient, simple to implement on VLSI, and suitable for multi-resolution signal decomposition and coding applications.

I. 서 론

최근 몇 년 사이에 개인용 컴퓨터의 보급 확산, 디지털 전송 기술의 발전, 고화질 디스플레이 장치 실현, CD의 보편화 및 각종 장치들의 성능 향상에 따라 다양한 서비스에 대한 욕구가 날로 커지고 있다^[1]. 이러한 욕구는 영

* 홍익대학교 전기공학과

Dept. of Electrical Engineering, Hongik University

** 홍익대학교 전기전자컴퓨터공학부

School of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Hongik University

※ 본 논문은 1998년도 정보통신부 지원하는 대학기초연구지원사업으로 연구되었음.

상이라는 정보 매체를 중심으로 한다는 특징을 보인다. 이는 일상 생활에서 대부분의 정보를 시각에 의해 얻고 영상이 주는 정보 전달 효과가 크다는 것을 반영하고 있다. 영상 신호를 디지털 형태로 처리할 경우 전송과 저장에 상당히 넓은 대역폭과 메모리를 필요로 하므로 주어진 영상 신호를 가능하면 충실하게 재생하면서 동시에 영상의 중복성(redundancy)을 효과적으로 제거하기 위한 데이터 압축 기법들이 많이 연구되어 왔다^[2]. 변환 부호화를 이용한 기존의 표준화된 영상 압축 기법은 DCT를 근간으로 하고 있으며, 균일하게 분할된 영상 블록에 코사인 함수의 커널을 적용하여 새로운 영역으로 변환될 때 얻어지는 에너지 압축 효과와 중복성 제거 효과를 이용한다^[3]. 그러나 이 방법은 변환 기법상 입력 영상과는 무관하게 고정적이고 적응적이지 않은 변환을 수행하므로, 인간의 시각 특성을 고려하지 않고 엔트로피적인 측면만을 강조함으로써 실제 복원된 영상에서 좋지 못한 시각 효과를 보인다. 즉 영상을 일정 크기의 블록 단위로 나누어서 부호화 하기 때문에 고압축 시 블록 현상이 심하게 나타난다. 이에 반하여 프레임 단위로 신호의 주파수 성분을 분해하여 부호화 하는 방법이 웨이브렛 변환(wavelet transform)^[4]에 최근에 많은 연구가 집중되고 있다. 실시간 동영상 통신이 신호 처리와 통신 기술에 VLSI기술의 출현으로 현실화되었다. 그런데 웨이브렛 변환은 계산량이 많은 데 곱셈기가 없는 필터를 사용하여 실시간 구현이 용이하게 하는 연구가 필요하다. 그래서 본 논문은 단지 덧셈 연산만을 사용하는 이진수 회로에 관한 철저한 연구를 시도하였다. 우선 이진수 수열의 특징을 연구하고 이진수의 QMF-웨이브렛 필터를 설계하였다. 또한 이차원 이진수열의 확장도 연구하고 영상신호의 처리를 위한 QMF-웨이브렛 필터의 구현방법을 제안하였다. 제안한 QMF-웨이브렛 필터의 계수들은 Daubechies의 웨이브렛 필터의 계수들과 같아서 성능이 같게 된다. 그러나 곱셈기가 없어서 구현시 속도가 빠르게 되는 장점이 있게 된다.

II. 이진수의 QMF 설계

1. 이진수 수열

직교성 수열의 일종인 이진수는 이진수열^[5]의 연속적인 차이로 발생되는 데 구간 $[0, N]$ 에서 다음과 같이 정의 된다.

$$x_0[k] = \begin{cases} \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

이진수열의 포락선은 절단(truncation), 천이(translation), 스케일 변화(scale change) 등을 제외한 상당한 정도로 Gaussian $e^{-t^2/2}$ 과 같다. 확률 이론의 이진수의 분포는 Gaussian 포락선으로 접근한다고 잘 알려져 있다^[3]. 특히 N 이 매우 커지면

$$\binom{N}{k} \sim \frac{2^N}{\sqrt{N\pi/2}} \exp\left\{-\frac{(k-N/2)^2}{N/2}\right\} \quad (2)$$

이진수군의 다른 수열은 다음으로서 얻어진다.

$$x_r[k] = \nabla^r \binom{N-r}{k}, \quad r=0,1,\dots,N \quad (3)$$

여기서 $\nabla f[n] = f[n] - f[n-1]$ 은 후진차(backward difference)의 연산자이다. 연속적인 뺄셈을 취하면

$$x_r[k] = \binom{N}{k} \sum_{\nu=0}^r (-2)^{\nu} \binom{r}{\nu} \frac{k^{(\nu)}}{N^{(\nu)}} = \binom{N}{k} H_r[k] \quad (4)$$

$k=0,1,\dots,N$

여기서 $k^{(\nu)}$ 은 forward factorial 함수이고 다음과 같이 표현된다.

$$k^{(\nu)} = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-\nu+1), & \nu \geq 1 \\ 1, & \nu = 0 \end{cases} \quad (5)$$

다항식 (5)의 $H_r[k]$ 은 이산 Hermite 다항식으로 수정된 부분은 변환 코딩에 사용된다. 그래서 이산의 이진수군의 $\{x_r[k]\}$ 는 이진수 수열 $\binom{N}{k}$ 의 window를 사용한 이산의 Hermite 다항식이 된다. 이런 점에서 이진수군은 연속적인 변수의 영역에서 Gaussian-windowed Hermite 다항식이 연속적인 변수의 Hermite 함수가 되듯이 이산변수의 영역에서 대응된다.

이진수의 행렬 X 는 $(N+1) \times (N+1)$ 행렬로 $X = [x_r[k]]$ 인데 여기서 $x_r[k]$ 는 r^{th} row와 k^{th} column 항이다. 이 행렬은 행과 열 항이 직교의 특성을 가지므로

$$\sum_{k=0}^N x_r[k]x_s[k] = (2)^N \delta_{r-s} \quad (6)$$

또는

$$X^2 = (2)^N I \quad (7)$$

I 는 identity 행렬이다. 이 순열들의 부가적인 특성은 식(4)와 (6)식으로부터 얻어진다.

1) 대칭특성: 식(4)로부터 Hermite 다항식은 대칭이 된다.

$$H_r[k] = H_k[r] \quad \text{. 그래서}$$

$$\frac{x_r[k]}{\binom{N}{k}} = \frac{x_k[r]}{\binom{N}{r}} \quad (8)$$

2) 행의 직교성: 식(6)과 식(8)을 조합하면

$$\sum_{k=0}^N x_r[k]x_s[k] \binom{N}{k}^{-1} = \binom{N}{r}^{-1} (2)^N \delta_{r-s}. \quad (9)$$

여기서

$$\delta_{r-s} = \begin{cases} 1, & r=s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$$

Kronecker delta 이다.

3) 변환과 점화의 관계식: 영차의 이진수로 시작하면 식(1)의 $\binom{N}{k}$ 과 식(3)의 차를 이용하면

$$X_0(z) = Z \left\{ \binom{N}{k} \right\} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} z^{-k} = (1+z^{-1})^N \quad (10)$$

$$\begin{aligned} X_r(z) &= Z \left\{ \nabla^r \binom{N-r}{k} \right\} \\ &= (1-z^{-1})^r Z \left\{ \binom{N-r}{k} \right\} \\ &= (1-z^{-1})^r (1+z^{-1})^{N-r} \end{aligned} \quad (11)$$

이 마지막 식은 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$X_r(z) = \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) X_{r-1}(z) = \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^r X_0(z) \quad (12)$$

시간 영역에서 식(12)은 점화식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} x_{r+1}[k] &= -x_{r+1}[k-1] + x_r[k] - x_r[k-1], \\ 0 \leq k, r \leq N \end{aligned} \quad (13)$$

초기 조건 $x_r[-1]=0, 0 \leq r \leq N$, 그리고 초기 순열 $x_0[k] = \binom{N}{k}$. 등식(11)과 (12)는 그림 1에 나타낸 이진수의 회로망이다. 이진수군의 구현은 단순하다. 모든 계수들이 1이고 회로는 곱셈기가 필요 없는 지연기(Delay)와 누산기(Adder)로 구현된다. 이 필터는 음성과 영상 신호 처리에 유용하게 사용된다.

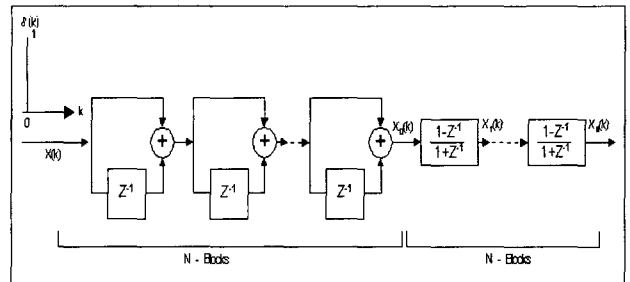


그림 1. 이진수열의 network

Fig. 1. Binomial network

4) 이진수군의 시간과 주파수 응답: 아날로그 Gaussian 함수의 시간-주파수 관계식은 다음과 같다.

$$e^{-t^2/2} \leftrightarrow \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} \quad (14)$$

식(2)는 이진수 수열의 포락선이 Gaussian 그래프로 접근함을 보여준다. 이진수군의 r th 항의 주파수 응답은

$$X_r(e^{j\theta}) = A_r(\theta) e^{j\phi_r \theta} \quad (15)$$

여기서

$$A_r(\theta) = (2^N) (\sin \theta/2)^r (\cos \theta/2)^{N-r}$$

$$\phi_r(\theta) = \frac{r\pi}{2} - \frac{N\theta}{2} \quad (16)$$

$\theta = \omega T$ 는 정규화된 주파수이고 T 는 표본화 시간 간격이다. 이진수군은 주파수 응답이 선형 위상을 가지고 리플이 없으며 $0 \leq \theta \leq \pi$ 사이의 주파수를 통과하는 저역, 대역, 고역 필터의 기저 수열을 제공하여 준다. 이것들은 half-band 필터를 구성하는데 선형으로 조합된다.

5) Quadrature Mirror Filter(QMF) 특성: 이진수의 필터는 선형 위상을 가지는 QMF 필터이다.

식(16)으로부터 보상(Complementary) 필터 $X_r(z)$ 와 $X_{N-r}(z)$ 는 magnitude 응답은 $\theta = \pi/2$ 에 관해 mirror 영향을 가진다

$$|X_r(e^{j(\frac{\pi}{2} + \theta)})| = |X_{N-r}(e^{j(\frac{\pi}{2} + \theta)})| \quad (17)$$

시간 영역에서 mirror의 관계식은 다음과 같다.

$$x_{N-r}[n] = (-1)^n x_r[n] \quad (18)$$

부가적으로,

$$x_r[N-n] = (-1)^r x_r[n] \quad (19)$$

그래서 보상의 X 의 행과 열은 mirror 형태를 취하여진다.

첫째의 반의 군 ($r=0,1,\dots,(N-1)/2$) 은 반대역 ($0, \pi/2$) 에 의미 있는 에너지를 가지고, 두 번째의 반대역 ($r=(N+1)/2,\dots,N$) 이 상위 반대역이 채워진다. 이런 생각이 저대역의 half-band QMF 필터는 이진수의 수열의 낮은 순차의 half set의 선형 조합으로 얻어질 수 있음을 알 수 있다. 다음에 이 확장의 계수들이 PR 조건을 만족시키기 위해서 결정될 수 있다.

2. 이진수의 QMF

우선 그림 2에서 half-band 필터를 다음과 같이 취하면

$$h_0[n] = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_r x_r[n] \quad (20)$$

$$H_0(z) = \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_r (1-z^{-1})^r (1+z^{-1})^{N-r}$$

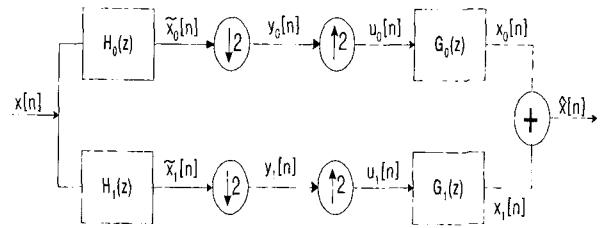


그림 2. 2-channel 필터 बैं크
Fig. 2. Two-channel filter bank

편의상 $\alpha_0=1$ 로 취하고, 완전 재생의 Paraunitary 필터는 다음의 조건[3]를 만족해야 한다.

$$\rho[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h_0[k]h_0[k+n] = \rho[-n] \equiv h_0[n] \odot h_0[n] \quad (21)$$

여기서 \odot 는 상관 연산자이다.

$$\begin{aligned} \rho[n] &= \left(\sum_{r=0}^{N-1} \alpha_r x_r[n] \right) \odot \left(\sum_{s=0}^{N-1} \alpha_s x_s[n] \right) \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_r \alpha_s [x_r[n] \odot x_s[n]] \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_r \alpha_s \rho_{rs}[n] \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \alpha_r^2 \rho_{rr}[n] + \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_r \alpha_s \rho_{rs}[n] \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $\rho_{rs}[n]$ 은 $x_r[n]$ 과 $x_s[n]$ 사이의 교차 상관으로

$$\rho_{rs} = \sum_{k=0}^N x_r[k]x_s[n+k] \leftrightarrow R_{rs}(z) \text{ 이고 } R_{rs}(z) = X_r(z^{-1})X_s(z) \text{이다.}$$

실수의 자기 상관 함수에 대하여

$$\rho_{rs}[-n] = \rho_{sr}[n], \quad \forall s,r \quad (23)$$

식(18)은

$$\begin{aligned} \rho_{rs}[n] &= -\rho_{sr}[n], [s-r] \text{ is odd} \\ \rho_{rs}[n] &= \rho_{sr}[n], [s-r] \text{ is even} \end{aligned} \quad (24)$$

식(23)은 식(22)의 두 번째 항의 연산자는 짝수의 항들

만으로 작동한다.

그래서 이진수의 half-band 저대역의 필터의 자기 상관 함수는

$$\rho[n] = \sum_{r=0}^{\frac{N-1}{2}} \alpha_r^2 \rho_{rr}[n] + 2 \sum_{r=1}^{\frac{N-3}{2}} \sum_{v=0}^{\frac{N-1}{2}-r} \alpha_r \alpha_{v+2r} \rho_{v,v+2r}[n] \quad (25)$$

마지막으로 PR 조건은

$$\rho[n]=0, \quad n=2,4,\dots,N-1 \quad (26)$$

이 조건은 $\frac{N-1}{2}$ 개의 미지수인 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\frac{N-1}{2}}$ 를 포함하는 $\frac{N-1}{2}$ 개의 비선형 등식을 제공해 준다.

III. 모의 실험 및 검토

1. QMF-웨이브렛 필터 설계

1) N=3 일 때의 필터 계수

식(1)과 (4)에 N=3 을 대입하면 아래와 같은 이진수 열을 얻을 수 있다.

표 1. N=3일 때의 이진수열
Table. 1. Binomial sequence for N=3

k \ r	0	1	2	3
$x_0(k)$	1	3	3	1
$x_1(k)$	1	1	-1	-1
$x_2(k)$	1	-1	-1	1
$x_3(k)$	1	-3	3	-1

z-변환 영역 식(11)에 적용하면

$$X_0(z) = (1+z^{-1})^3, \quad X_1(z) = (1-z^{-1})(1+z^{-1})^2, \\ X_2(z) = (1-z^{-1})^2(1+z^{-1}), \quad X_3(z) = (1-z^{-1})^3$$

식(20)에 적용하면 다음을 얻을 수가 있다.

$$h_0[k] = \sum_{r=0}^1 \alpha_r x_r[k] = \alpha_0 x_0[k] + \alpha_1 x_1[k] \\ H_0(z) = \alpha_0 X_0(z) + \alpha_1 X_1(z)$$

이 필터의 계수는 식(21)를 만족하므로 다음을 얻는다.

$$\rho[n] = \sum_{k=0}^3 h_0[k] h_0[n+k] \quad \text{에서} \quad \rho[0]=1, \quad \rho[2]=0$$

편의상 $\alpha_0=1$ 로 취하면 $\rho[2]=0$ 에서 α_1 을 얻는다.

$$\rho[2] = 6 - 2\alpha_1^2 = 0 \\ 6 - 2\alpha_1^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1^2 = 3 \Rightarrow \alpha_1 = \pm\sqrt{3} \quad (27)$$

구해진 α_1 을 식(21)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$H_0(z) = (z)(1+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})z^{-1} + (3-\sqrt{3})z^{-2} + (1-\sqrt{3})z^{-3} \quad (28)$$

$$H_1(z) = (1-\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3})z^{-1} + (3+\sqrt{3})z^{-2} + (1+\sqrt{3})z^{-3} \quad (29)$$

식(28)은 최소 위상(minimum phase)의 해가 되고 (29)는 비최소 위상(non-minimum phase)의 해가 된다. 두 필터의 위상은 거의 선형 위상을 가진다. 여기에 정규화 조건을 추가하면 표 2 이진수열 계수가 구하여진다.

표 2. 4-tap 이진수 QMF 계수
Table 2. 4-tap coefficients of Binomial QMF

n	h(n)	
	minimum phase	non-minimum phase
	4-tap	4-tap
0	0.4829629	-0.1294095
1	0.8365163	0.2241438
2	0.2241438	0.8365163
3	-0.1294095	0.4829629

2) N=5 일 때의 필터 계수

1)의 과정을 수행하면 식(21)에서 다음과 같은 두 개의 방정식을 얻을 수가 있다.

$$\rho[2] = 8\alpha_1^2 + 8\alpha_2^2 - 16\alpha_2 - 120 = 0$$

$$\rho[4] = 6\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 - 12\alpha_2 - 10 = 0$$

이 두 방정식의 α 에 관한 해는 다음과 같이 4개로 주어진다.

$$\alpha_1 = 3.365197664, \alpha_2 = \sqrt{10} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha_1 = -3.365197664, \alpha_2 = \sqrt{10} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1.3245532i}, \alpha_2 = -\sqrt{10} \dots\dots \textcircled{3}$$

이 중에서 최소 위상인 $\textcircled{1}$ 식을 선택하면 표 3의 6-tap의 이진수의 QMF계수를 얻을 수 있다.

3) $N=7$ 일 때의 필터 계수

이 경우에서도 과정을 반복하면 식(21)에서 비선형의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\rho[2] = -22\alpha_1^2 - 38\alpha_2^2 - 30\alpha_3^2 + 44\alpha_2 + 76\alpha_1\alpha_3 - 2002 = 0$$

$$\rho[4] = -100\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2 + 12\alpha_3^2 + 200\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_3 + 364 = 0$$

$$\rho[6] = -10\alpha_1^2 + 6\alpha_2^2 - 20\alpha_3^2 + 20\alpha_2 - 12\alpha_1\alpha_3 + 14 = 0$$

이 비선형 방정식은 Gauss-Newton method를 사용한 Matlab의 solve함수를 사용하여 풀면 8개의 해를 얻는다. 이 중에서 최소위상의 해는 다음과 같다.

$$\alpha_1 = 4.98921357311350,$$

$$\alpha_2 = 8.94612603906998,$$

$$\alpha_3 = 5.91607978309963$$

8-tap의 이진수의 QMF계수를 표 3에 나타내었다.

2. 2차원 이진수열

2차원의 이진수열은 1차원의 이진수열로부터 직접적으로 일반화된다. 이차원 이진수열 $\{x_{rs}[m,n]\}$ 는 주기 ($0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N$)에서 1차원 이진수열의 분리된 방향 성분들의 내적으로서 정의된다.

표 3. 6-tap과 8-tap 이진수 QMF 계수

Table 3. 6-tap and 8-tap coefficients of Binomial QMF

n	h(n)	
	6-tap	8-tap
0	0.33267055290	0.230377813309
1	0.806891509311	0.714846570553
2	0.459877502118	0.630880767930
3	-0.135011020010	-0.027983769417
4	-0.085441273882	-0.187034811719
5	0.035226291882	0.030841381836
6		0.032883011667
7		-0.010597401785

$$x_{rs}[m,n] = x_r[m]x_s[n], \quad r=0,1,\dots,M \quad s=0,1,\dots,N$$

$\{x_r[m]\}$ 과 $\{x_s[n]\}$ 는 1차원의 이진수열들이다. 1차원 경우와 같이, 이차원의 변환 형태는 다음과 같다.

$$X_{rs}(z_1, z_2) = X_r(z_1)X_s(z_2)$$

따라서 식(12)로부터 다음을 얻는다.

$$X_{rs}(z_1, z_2) = \left[\left(\frac{1-z_1^{-1}}{1+z_1^{-1}} \right)^r X_r(z_1) \right] \left[\left(\frac{1-z_2^{-1}}{1+z_2^{-1}} \right)^s X_s(z_2) \right] \quad (30)$$

$$= \left[\left(\frac{1-z_1^{-1}}{1+z_1^{-1}} \right)^r X_0(z_1) \right] \left[\left(\frac{1-z_2^{-1}}{1+z_2^{-1}} \right)^s X_0(z_2) \right] - [(1-z_1^{-1})^r (1+z_1^{-1})^M] [(1-z_2^{-1})^s (1+z_2^{-1})^N]$$

이차원의 주파수 응답은 식으로부터 얻어진다.

$$X_{rs}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = X_r(e^{j\omega_1})X_s(e^{j\omega_2}) = A_{rs}(\omega_1, \omega_2)e^{j\theta_{rs}(\omega_1, \omega_2)} \quad (31)$$

크기 $A_{rs}(\omega_1, \omega_2)$ 와 위상 θ_{rs} 는 1차원에 응답하는 곱과 합으로 표현된다.

$$A_{rs}(\omega_1, \omega_2) = A_r(\omega_1)A_s(\omega_2) \quad (32)$$

$$\theta_{rs}(\omega_1, \omega_2) = \theta_r(\omega_1) + \theta_s(\omega_2)$$

$$A_r(\omega_1) = (2)^M \left(\sin \frac{\omega_1}{2} \right)^r \left(\cos \frac{\omega_1}{2} \right)^{M-r}$$

$$A_s(\omega_2) = (2)^N \left(\sin \frac{\omega_2}{2} \right)^s \left(\cos \frac{\omega_2}{2} \right)^{N-s} \quad (33)$$

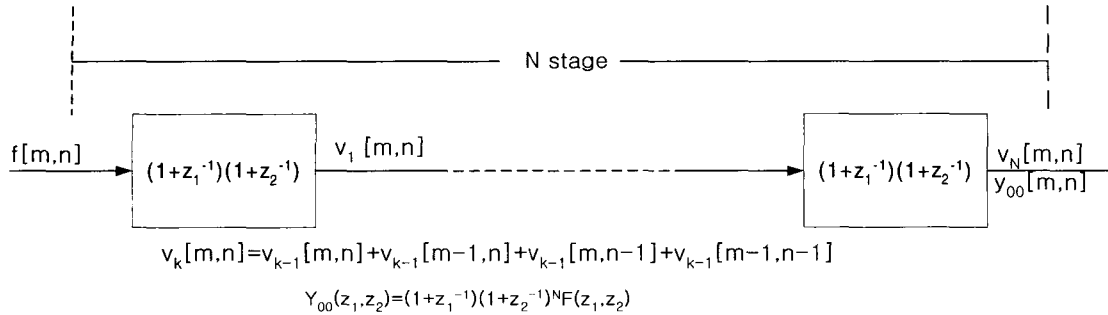


그림 3. 저역통과 이진수열 필터

Fig. 3. Low-pass Binomial filter

$$\theta_{rs}(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{r\pi}{2} - \frac{M\omega_1}{2} \right) + \left(\frac{s\pi}{2} - \frac{N\omega_2}{2} \right) \quad (34)$$

식(32)과 (33)에서의 크기 응답은 2차원 전개에 있어 Gaussian에 가까운 저역통과, 대역통과, 고역통과 필터를 구성한다. 이것들의 최대값은 다음에서 얻어진다.

$$\omega_1 = 2 \sin^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{r}{M}} \right\}, \quad \omega_2 = 2 \sin^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{s}{N}} \right\} \quad (35)$$

그리고 1차원에 응답하는 half-power bandwidth들이 된다.

3. 2차원 수열의 알고리즘

이 알고리즘은 식(30)과 관련된 변환과 그림 3이 기본이 된다. 간략화 하기 위해서 $M=N$ 라고 가정하고 저역통과 부분에서 $r=s=0$ 으로 하면

$$Y_{00}(z_1, z_2) = [(1+z_1^{-1})(1+z_2^{-1})]^N F(z_1, z_2) \quad (36)$$

식(36)은 연속적인 계산을 하는 구조로서 각 블록은 과정을 나타내며 식은 다음과 같다.

$$V_k(z_1, z_2) = (1+z_1^{-1})(1+z_2^{-1})V_{k-1}(z_1, z_2) \quad (37)$$

또는

$$v_k[m, n] = v_{k-1}[m, n] + v_{k-1}[m-1, n] + v_{k-1}[m, n-1] + v_{k-1}[m-1, n-1] \quad k=1, 2, \dots, N \quad (38)$$

그리고 식(38)은 그림 4에서와 같이 $0 \leq m \leq L_1$, $0 \leq n \leq L_2$ 의 범위 영상을 스캔하는 사각의 창을 형성한다.

그림 4의 스캔 과정은 다음과 같다.

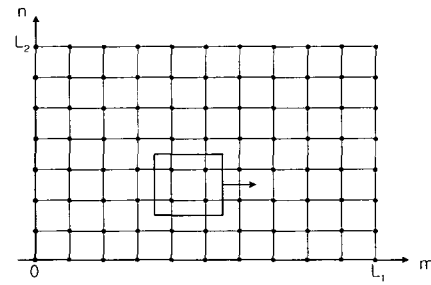


그림 4. 윈도우 함수의 영상 scanning 과정

Fig. 4. Window function scanning the image array

(i) 첫 행이 다음의 식을 사용하여 스캔이 된다.

$$v_1[m, 0] = f[m, 0] + f[m-1, 0] + f[m, -1] + f[m-1, -1], \quad m=0, 1, \dots, L_1$$

(ii) 다음의 행이 아래의 식으로 스캔된다.

$$v_1[m, 1] = f[m, 1] + f[m-1, 1] + f[m, 0] + f[m-1, 0], \quad m=0, 1, \dots, L_1$$

(iii) 이 스캔은 그림 4에서 마지막 행까지 실행된다.

$$v_1[m, L_1] = f[m, L_1] + f[m-1, L_1] + f[m, L_1-1] + f[m-1, L_1-1] \quad m=0, 1, \dots, L_1$$

고역통과 필터의 경우도 $r=s=N$ 일 때 식(37)으로부터 구해지면 고역통과의 윈도우도 중간 항목이 뺄셈으로 변하는 것을 제외하고는 저역통과의 경우의 식(38)과 유사하다.

$$\begin{aligned}
 v_k[m,n] &= v_{k-1}[m,n] - v_{k-1}[m-1,n] - \\
 &\quad v_{k-1}[m,n-1] - v_{k-1}[m-1,n-1] \\
 v_0[m,n] &= f[m,n]
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

또한 이 경우에서 스캔은 저역통과의 경우와 동일하다.

IV. 실험 결과

모의 실험에서는 실험 영상을 크기 512×512 의 8bit gray level의 Lena영상을 사용하였고 필터 설계 과정에서 두 번째로 구해진 6-tap 필터로 3단계의 웨이브렛 변환을 실행하였다. 그림 4와 그림 5는 이 필터의 주파수 응답과 임펄스 응답을 보였는데 저역통과 필터의 특성과 고역통과 필터의 특성을 잘 만족한다.

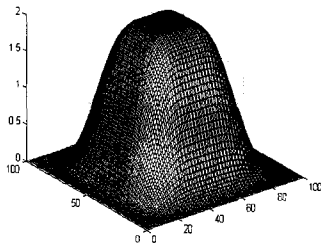


그림 4(a). 이진수 저역통과 QMF의 주파수 응답
Fig. 4(a). Magnitude frequency response of low-pass QMF Binomial filter

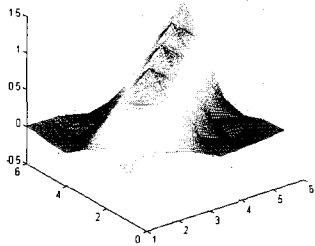


그림 4(b). 이진수 저역통과 QMF 임펄스 응답
Fig. 4(b). Impulse response of low-pass QMF Binomial filter

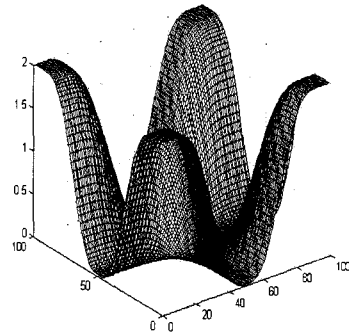


그림 5(a). 이진수 고역통과 QMF의 주파수 응답
Fig. 5(a). Magnitude frequency response of high-pass QMF Binomial filter

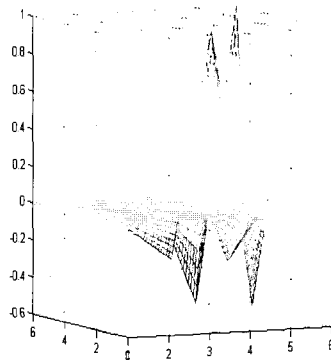


그림 5(b). 이진수 고역통과 QMF의 임펄스 응답
Fig. 5(b). Impulse response of high-pass QMF Binomial filter

그림 6과 그림 7은 제안된 모의 실험에서 사용한 다해상도 피라미드 구조와 이진수 QMF를 사용한 블록도를 나타낸 것으로 이 필터의 실행에 있어 보다 효율적으로 동작하고, 실제적인 설계에서 용이함을 보여준다.

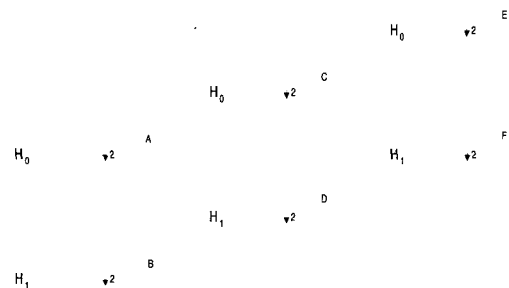


그림 6. 다해상도 dyadic tree 구조
Fig. 6. Dyadic tree structure for multi-resolution

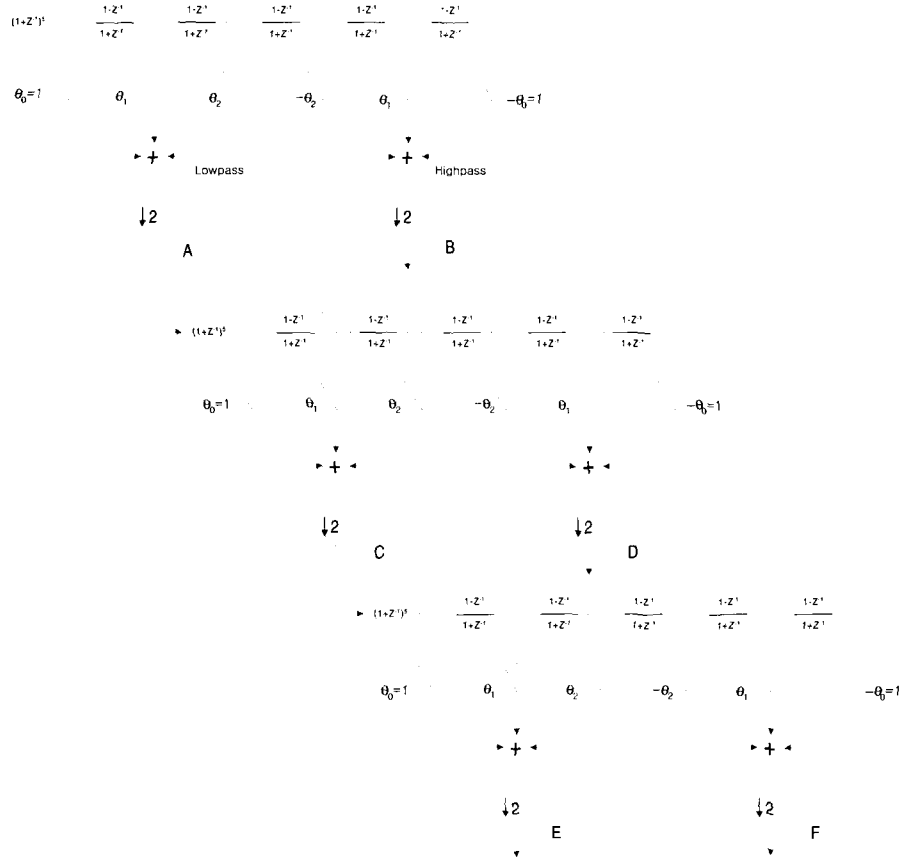


그림 7. 이진수 필터를 사용한 dyadic tree구조
 Fig. 7. Dyadic tree structure using Binomial filter

그림 8의 (a)와(b)는 웨이브렛 변환된 실험 영상의 주파수 대역별 위치와 대역별 부영상을 보여준다. 그림 9의

(a)와(b)는 원 실험 영상과 완전 재생된 영상을 보여주며 신호 대 잡음비(SNR)는 283dB를 얻었다.

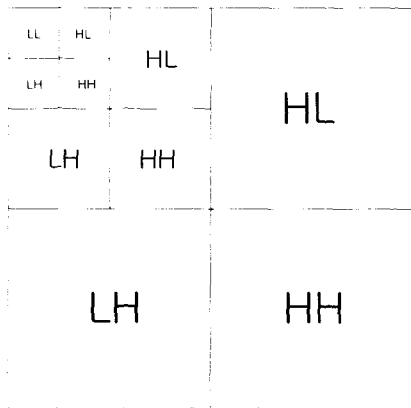


그림 8(a). 웨이브렛 변환을 통한 주파수대역별 분포
 Fig. 8(a). Frequency band distribution by wavelet transform

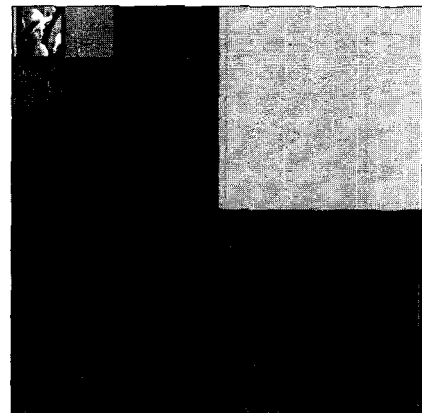


그림 8(b). 6-tap 이진수 QMF를 사용한 10개의 부대역 Lena영상
 Fig. 8(b). 10 subband Lena image using 6-tap Binomial QMF



그림 9(a). Original Lena 영상
Fig. 9(a). Original Lena image



그림 9(b). 이진수 QMF에 의해 재생된 Lena 영상
Fig. 9(b). Reconstructed Lena image using Binomial QMF

IV. 결론

결론적으로 효과적인 완전회복의 이진수 QMF-웨이브렛 신호의 분석구조를 제안하였다. 이 기술은 단지 더하기 연산만을 사용하는 이진수 회로를 사용하였다. 이 기술은 매우 좋은 주파수 응답과 대역분할을 해주는 필터 해법을 제공해준다. 이 필터들은 Daubechies의 웨이브렛 필터와 같아서 성능은 같게된다. 논문은 2-D 직교의 이진수열의 QMF-웨이브렛 필터의 시간과 주파수 영역의 특성을 기술하였다. 이 결과들은 3-D로 확장이 가능하고 다차원의 경우도 가능하다. 이 알고리즘들은 계산이 효과적인 저역과 고역의 QMF 필터의 구현을 가능하게 해준다. 또한 하

드웨어와 소프트웨어의 구현을 용이하게 해준다. 단지 더하기와 뺄셈의 연산은 순차적과 batch 모드에서 사용되게 된다. 이 알고리즘들은 특히 병렬 구조의 구현에 적합하게 된다. 곱하기 작동도 없어 roundoff의 오차도 없게 된다. 이 제안한 이진수열의 구조는 효과적이고 VLSI 구현을 쉽게 하고 다해상도 분할과 코딩의 응용들에 적합하다. 또한 biorthogonal 웨이브렛 필터 बैं크도 유도될 수 있다.

참고 문헌

- [1] P. P. Vaidyanathan, "Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: A tutorial," in *Proc. of IEEE*, vol. 78, pp. 56-93, Jan. 1990.
- [2] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform," in *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 205-220, Apr. 1992.
- [3] A. N. Akansu and R. A. Haddad, *Multi-resolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands, and Wavelets*: Academic Press, 1992.
- [4] S. Mallat, "A theory for multi-resolution signal decomposition: The wavelet representation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 84-95, Jan. 1980.
- [5] R. A. Haddad, "A class of orthogonal non-recursive binomial filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-19, no. 4, pp. 296-304, Dec. 1971.
- [6] P. J. Burt and E. H. Adelson, "The Laplacian pyramid as a compact image code," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-31, no 4, pp. 532-540, Apr. 1983.
- [7] Innho Jee and Jonghong Shin, "The binomial QMF-Wavelet filters for multi-resolution signal processing," *Proc. of Signal Processing Conf.*, no. 10, pp. 999-1002, Sept. 1997.
- [8] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner, *Multi-rate Digital Signal Processing*: Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1983.
- [9] Innho Jee and R. A. Haddad, "Modeling and analysis of vector-quantized M-channel subband codecs," in *Proc. of IEEE International Conference on ASSP*, pp. II 1320-1323, May. 1995.

- [10] Innho Jee and R. A. Haddad, "Modeling and design of multi-dimensional vector quantized M-channel subband codecs," in Proc. of *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. III 85-88, Oct. 1995.
- [11] J. W. Woods and S. D. O'Neil, "Subband coding of images," *IEEE Trans. ASSP*, vol. 34, no. 5, pp. 1278-1288, Oct. 1986.

저 자 소 개



신 종 홍

1997년 : 홍익대학교 전기공학과 졸업(공학사)
 1999년 : 홍익대학교 전기공학과 대학원 졸업(석사)
 1999년 3월 ~ : 현재 홍익대학교 전기공학과 대학원 박사 과정
 주관심 분야 : 신호처리, 영상처리, 비디오 부호화, 멀티미디어 통신



지 인 호

1980년 2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사)
 1983년 8월 : 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
 1995년 6월 : Polytechnic University(New York) 전기공학과 졸업(공학박사)
 1982년 2월 ~ : 1988년 6월 국방과학연구소 선임연구원
 1995년 8월 ~ : 현재 홍익대학교 전자전기 컴퓨터공학부 교수
 주관심 분야 : 통신 및 신호처리, 멀티미디어 통신