

<논 문>

## 비선형성을 고려한 각가속도를 갖는 유연 회전원판의 동적 해석

### Dynamic Analysis of a Flexible Spinning Disk with Angular Acceleration Considering Nonlinearity

정진태\* · 정두한\*\*

J. Chung and D. H. Chung

(1999년 3월 12일 접수 ; 1999년 6월 2일 심사완료)

Key Words : Spinning Disk(회전원판), Dynamic Analysis(동적 해석), Angular Acceleration(각가속도), Nonlinearity(비선형성), Galerkin approximate Method(Galerkin 근사방법), Generalized- $\alpha$  Method (일반화된  $\alpha$  방법)

#### ABSTRACT

Dynamic behaviors are analyzed for a flexible spinning disk with angular acceleration, considering geometric nonlinearity. Based upon the Kirchhoff plate theory and the von Karman strain theory, the nonlinear governing equations are derived which are coupled equations with the in-plane and out-of-plane displacements. The governing equations are discretized by using the Galerkin approximation. With the discretized nonlinear equations, the time responses are computed by using the generalized- $\alpha$  method and the Newton-Raphson method. The analysis shows that the existence of angular acceleration increases the displacements of the spinning disk and makes the disk unstable.

#### 1. 서 론

CD-ROM 드라이브와 디지털 비디오 디스크(DVD) 드라이브와 같은 광디스크 드라이브에 이용되고 있는 회전원판은 알루미늄 원판에 피트(pit)라는 일정한 크기의 홈을 파서 정보를 저장하기 때문에 회전속도 대신에 선속도가 일정하다. 따라서 광디스크 드라이브의 픽업(pick-up)이 어느 한 트랙에서 다른 트랙으로 이동할 때 원판이 각가속도를 갖는다. 이러한 이유로 광디스크의 동적 특성을 규명하기 위하여 각가속도를 갖는 회전원판의 동적해석이 필요하다.

지금까지 회전원판의 진동과 동적 안정성에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 초기의 회전원판에 대한 연구는 자유진동에 대해 수행되었으며<sup>(1~4)</sup>, 그 이후 공간상에 고정된 횡하중을 받는 회전원판의 진동에 대한 연구가 수행되었다<sup>(5~9)</sup>. 그리고 Jeong과 Bogy<sup>(10)</sup>가 하드 디스크 드라이브에서 헤드가 하드 디스크 위에 놓여 질 때 하드 디스크가 작은 강제운동과 변형을 한다는 사실을 발표한 이후로 스피들의 병진운동이나 기울어짐을 고려한 회전원판의 진동과 동적 안정성에 대한 연구가 이루어졌다<sup>(11,12)</sup>. 또한 Hamilton 원리에 바탕을 둔 변분 방법으로 회전원판의 지배방정식을 체계적으로 유도하고, 이 과정에서 사용한 가정에 대한 고찰이 이루어졌으며<sup>(13)</sup>, 그 밖에도 회전원판의 고유진동수와 스피들 모터에서 가진되는 강제진동수 등을 고려한 하드 디스크이 안

\* 정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

\*\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과 (현재 한국중공업)

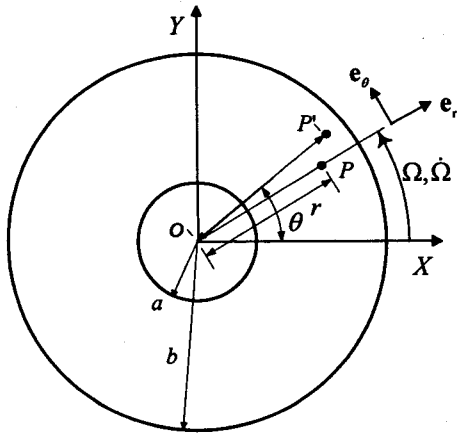


Fig. 1 Geometry of a spinning disk with angular acceleration

정성 확보에 대한 연구 등이 수행되었다<sup>(14)</sup>. 최근에 각가속도가 존재하는 회전원판의 선형 지배방정식을 유도하고 이를 바탕으로 동적 안정성을 해석하였다<sup>(15)</sup>.

본 연구에서는 기존의 연구에서 고려하지 못한 회전원판의 비선형성을 고려한 각가속도를 갖는 회전원판의 동적 거동을 분석하였다. 이를 위해 Kirchhoff 평판 이론과 von Karman 변형을 이론에 바탕을 두고 Hamilton 원리를 적용하여, 각가속도를 갖는 회전원판에 대한 비선형 지배방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식에 Galerkin 방법을 적용하여 이산화된 비선형 상미분방정식을 구하고, 일반화된  $\alpha$  방법과<sup>(16)</sup> Newton-Raphson 방법에 의해 각가속도를 갖는 회전원판의 시간응답을 계산하여 각가속도가 회전원판의 동적 거동에 미치는 영향에 대한 연구를 수행하였다.

## 2. 지배방정식

본 연구에서 기하학적 비선형성을 고려한 각가속도를 갖는 유연 회전원판에 대한 지배방정식을 유도하기 위하여 Kirchhoff 평판이론과 von Karman 변형을 이론에 바탕을 두고 Hamilton의 원리를 적용하였다. Fig. 1에 도시한 회전원판은 내경이  $a$ , 외경이  $b$ , 두께가  $h$ 이며, 내륜이 고정되어 있으나 외륜은 구속되어 있지 않다. 그리고  $X-Y$ 좌표계는 공간상에 고정된 관성 좌표계를 나타내고  $r-\theta$ 좌표계는 원판에 고정되어 원판과 함께 회전하는 좌표계이다.

축대칭인 회전원판 내부의 임의의 점에 대한 변위를 Kirchhoff 평판이론에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(r, t) - z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \\ v(r, t) - z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \\ w(r, \theta, t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $u_r, u_\theta, u_z$ 는 각각 원판 내부 임의의 점에서  $r, \theta, z$  방향의 변위를 나타내고,  $u, v$ 는 각각 중앙면 상에 있는 점에 대한 면내(in-plane) 변위를 나타내고  $w$ 는 면외(out-of-plane) 변위를 나타낸다.

회전원판의 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 von Karman의 변위-변형을 관계식을 사용하였다. 변위와 변형률의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \\ \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

선형화된 변위-변형률 관계식을 사용하여 지배방정식을 유도하면 면내 변위와 면외 변위는 서로 연성되지 않으나, 면내 응력이 면외 변위에 미치는 영향을 고찰할 수 없다.

응력-변형률 관계는 Hooke의 법칙을 만족한다고 가정하고, 원판의 두께가 반경에 비하여 매우 작기 때문에 응력 상태가 평면응력 상태라고 가정하였다. 이 경우에 원판의 변형에너지는 두께방향에 대하여 적분을 수행한 후 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_A (Q_r \epsilon_r^0 + Q_\theta \epsilon_\theta^0 + 2Q_{r\theta} \epsilon_{r\theta}^0 + M_r \kappa_r + M_\theta \kappa_\theta + 2M_{r\theta} \kappa_{r\theta}) dA \quad (3)$$

여기서,  $A$ 는 원판의 면적을 나타내고,  $\epsilon_r^0, \epsilon_\theta^0, \epsilon_{r\theta}^0$ 는 각각 중앙면에서의 변형률을 나타내며,  $\kappa_r, \kappa_\theta, \kappa_{r\theta}$ 는 변형된 중앙면의 곡률변화를 나타낸다. 그리고  $Q_r, Q_\theta, Q_{r\theta}$ 는 중앙면에서의 단위길이 당 내력이며,  $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$ 는 중앙면에서의 단위길이 당 내부모멘트를 나타내며 다음과 같이 정의 된다.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_i &= \epsilon_i^0 + z \kappa_i \\ Q_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz \\ M_i &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_i dz \end{aligned} \right\}, \quad i = r, \theta, r\theta \quad (4)$$

회전원판의 운동에너지를 계산하기 위하여 변형된 원판 내의 각 질점의 속도를 구해야 한다. 변형된 후의 임의의 점에 대한 위치벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$r = (r + u_r)e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z \quad (5)$$

여기서  $r$ 은 원판의 중심에서 변형 전의 점까지의 반경을 나타낸다. 속도벡터는 위치벡터를 시간에 대해 전미분을 취하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v = v^0 - z \phi \quad (6)$$

여기서,

$$v^0 = \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega v \right) e_r + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega(r + u) \right\} e_\theta + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \Omega \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) e_z \quad (7)$$

$$\phi = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} - \Omega \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \right\} e_r + \left\{ \frac{\partial^2 w}{r \partial t \partial \theta} + \Omega \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \right) \right\} e_\theta \quad (8)$$

회전원판의 운동에너지는 원판의 두께가 매우 얇고 가정하였으므로 회전관성 효과를 무시하면 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \int \rho v \cdot v dV \cong \frac{1}{2} \rho h \int v \cdot v dA \quad (9)$$

여기서  $\rho$ 는 원판의 밀도를 나타낸다.

변형에너지와 운동에너지에 변분을 취한 다음 Hamilton의 원리를 적용하여, 각속도를 갖는 유연회전원판에 대한 비선형 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\rho h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u - \dot{\Omega} v \right) - \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{q_r - q_\theta}{r} \right) = \rho h \Omega^2 r \quad (10)$$

$$\rho h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} u \right) - \left( \frac{\partial q_\theta}{\partial r} + 2 \frac{q_{r\theta}}{r} \right) = -\rho h \dot{\Omega} r \quad (11)$$

$$\rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \theta} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \dot{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + D \nabla^4 w - \frac{\partial}{\partial r} \left( r q_r \frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} + q_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (12)$$

여기서,

$$q_i = Q_i^{lin}, \quad i = r, \theta, r\theta, \quad (13)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (14)$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right)^2 \quad (15)$$

윗 식들에서  $q_i$ 는 선형화된 단위길이 당 내력,  $D$ 는 원판의 굽힘강성,  $\nabla^4$ 은 Bi-harmonic 연산자이다. 식 (10)~(12)에서 볼 수 있듯이 면내 변위  $u$ 와  $v$ 가 서로 연성되며, 면외 변위  $w$ 는 면내 변위  $u$ 와  $v$ 에 연성된다. 식 (12)에서 각속도  $\dot{\Omega}$ 을 0이라 하면, 이 식은 각속도가 일정한 기존의 유연회전원판의 지배방정식과 동일하게 된다<sup>(8,13)</sup>.

한편, 회전원판의 고정단과 자유단의 경계조건은 다음 식으로 표현된다.

$$u = v = \frac{\partial w}{\partial r} = w = 0 \quad \text{at } r = a \quad (16)$$

$$q_r = q_{r\theta} = M_r = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = 0 \quad \text{at } r = b \quad (17)$$

### 3. 지배방정식의 이산화

비선형 지배방정식의 이산화를 위해 Galerkin 근사방법을 사용하였다. 면내 변위는  $r$ 의 함수인 비교함수의 급수로, 그리고 면외 변위는  $r$ 과  $\theta$ 의 함수인 비교함수로 표현하면 다음과 같다.

$$u(r, t) = \sum_{i=0}^I U_i(r) T_i^u(t) \quad (18)$$

$$v(r, t) = \sum_{j=0}^J V_j(r) T_j^v(t) \quad (19)$$

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{nm}(r) [C_{nm}(t) \cos n\theta + S_{nm}(t) \sin n\theta] \quad (20)$$

여기서,  $I, J$ 는 면내 변위  $u, v$ 를 근사화하기 위해 사용된 비교함수의 수이며,  $N, M$ 은 면외 변위  $w$ 를 근사화하기 위해 사용된 절점직경과 절점원의 수이다.

비교함수  $U_i, V_j, W_{nm}$ 은 기하학적 경계조건과 하중에 대한 경계조건 모두를 만족하여야 한다. 먼저 기하학적 경계조건, 즉 고정단에서의 경계조건을 자

동적으로 만족하도록 비교함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_i(r) = (r-a)^{i+1} (A_i^u + B_i^u r) \quad (21)$$

$$V_j(r) = (r-a)^{j+1} (A_j^v + B_j^v r) \quad (22)$$

$$U_i(r) = (r-a)^{i+1} (A_i^u + B_i^u r) \quad (23)$$

여기서,  $A_i^u, B_i^u, A_j^v, B_j^v, A_{nm}, B_{nm}$  과  $C_{nm}$  은 자유단에서의 경계조건과 정규화 조건에 의해서 결정된다. 정규화 조건은 여러 방법이 있지만, 본 연구에서는 계산의 편의성을 위하여 다음과 같은 정규화 조건을 사용하였다.

$$U_i(b) = V_j(b) = W_{nm}(b) = 1 \quad (24)$$

Galerkin 근사방법을 이용하여 이산화한 방정식은 다음과 같이 비선형 상미분방정식으로 표현된다.

$$\sum_{i=0}^I [m_{ki}^u \ddot{T}_i^u + (k_{ki}^u - \Omega^2 m_{ki}^u) T_i^u] - \sum_{j=0}^J [2\Omega m_{kj}^{uv} \dot{T}_j^v + \Omega m_{kj}^{uv} T_j^v] = \Omega^2 \gamma_k^u \quad \text{for } k=0,1,\dots,I \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^J [m_{ij}^v \ddot{T}_j^v + (k_{ij}^v - \Omega^2 m_{ij}^v) T_j^v] + \sum_{i=0}^I [2\Omega m_{ii}^{vu} \dot{T}_i^u + \Omega m_{ii}^{vu} T_i^u] = -\dot{\Omega} \gamma_i^v \quad \text{for } k=0,1,\dots,I \quad (26)$$

$$\sum_{im0}^M [m_{nqm}^w \ddot{C}_{nm} + 2n\Omega m_{nqm}^w \dot{S}_{nm} + (k_{nqm}^w - n^2 \Omega^2 m_{nqm}^w) C_{nm}] + n\dot{\Omega} m_{nqm}^w S_{nm} + \sum_{i=0}^I \alpha_{nqmi}^u C_{nm} T_i^u + \sum_{j=0}^J \alpha_{nqmj}^v S_{nm} T_j^v = 0 \quad \text{for } n=0,1,\dots,N \text{ and } q=0,1,\dots,M \quad (27)$$

$$\sum_{im0}^M [m_{nqm}^w \ddot{S}_{nm} - 2n\Omega m_{nqm}^w \dot{C}_{nm} + (k_{nqm}^w - n^2 \Omega^2 m_{nqm}^w) S_{nm}] - n\dot{\Omega} m_{nqm}^w C_{nm} + \sum_{i=0}^I \alpha_{nqmi}^u S_{nm} T_i^u - \sum_{j=0}^J \alpha_{nqmj}^v C_{nm} T_j^v = 0 \quad \text{for } n=0,1,\dots,N \text{ and } q=0,1,\dots,M \quad (28)$$

여기서

$$m_{ki}^u = \rho h \int_0^b U_k U_i r dr, \quad m_{ij}^v = \rho h \int_0^b V_i V_j r dr \quad (29)$$

$$m_{kj}^{uv} = \rho h \int_0^b U_k V_j r dr, \quad m_{ii}^{vu} = \rho h \int_0^b V_i U_i r dr \quad (30)$$

$$m_{nqm}^w = \rho h \int_0^b W_{nq} W_{nm} r dr \quad (31)$$

$$k_{ki}^u = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^b U_k \nabla_i^2 U_i r dr \quad (32)$$

$$k_{ij}^v = -\frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_0^b V_i \nabla_i^2 V_j r dr \quad (33)$$

$$k_{nqm}^w = D \int_0^b W_{nq} \nabla_n^4 W_{nm} r dr \quad (34)$$

$$\gamma_k^u = \rho h \int_0^b U_k r^2 dr, \quad \gamma_i^v = \rho h \int_0^b V_i r^2 dr \quad (35)$$

$$\alpha_{nqmi}^u = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^b W_{nq} \left\{ \frac{d^2 W_{nm}}{dr^2} \left( \frac{dU_i}{dr} + \frac{\nu}{r} U_i \right) + \frac{dW_{nm}}{dr} \left( \frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1+\nu}{r} \frac{dU_i}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} W_{nm} \left( \nu \frac{dU_i}{dr} + \frac{U_i}{r} \right) \right\} r dr \quad (36)$$

$$\alpha_{nqmj}^v = -\frac{Eh}{2(1+\nu)} n \int_0^b W_{nq} \left\{ 2 \frac{dW_{nm}}{dr} \left( \frac{dV_j}{dr} - \frac{V_j}{r} \right) + W_{nm} \left( \frac{d^2 V_j}{dr^2} - \frac{dV_j}{r dr} + \frac{V_j}{r^2} \right) \right\} dr \quad (37)$$

이산화된 비선형 상미분방정식인 식 (25)~(28)을 다음의 행렬-벡터 방정식으로 표현할 수 있다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + N(x) = F \quad (38)$$

여기서,

$$x = \{T_0^u, T_1^u, \dots, T_I^u, T_0^v, T_1^v, \dots, T_J^v, C_{00}, C_{01}, \dots, C_{0M}, C_{10}, \dots, C_{NM}, S_{10}, S_{11}, \dots, S_{1M}, S_{20}, \dots, S_{NM}\}^T \quad (39)$$

그리고  $M, C$  와  $K$  는  $[I+J+2+(2N+1)(M+1)] \times [I+J+2+(2M+1)(M+1)]$  행렬이며,  $N$  은 비선형 내력벡터이고  $F$  는 외력벡터이다.

#### 4. 수치해의 검증 및 분석

비선형성과 각속도를 갖는 회전원판의 동특성을 해석하기 위해서 앞 절에서 유도된 이론을 바탕으로 수치해석 프로그램을 개발하였다. 수치해석에서 사용된 물성치는  $E=65.5$  Mpa,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=1200$  kg/m<sup>3</sup>,  $h=0.0012$  m,  $\alpha=0.0325$  m,  $b=0.0650$  m 이며, 사용된 근사함수의 수는  $I=3, J=3, N=3, M=8$ 이다.

개발된 프로그램의 타당성과 정확성을 검증하기 위해서 각속도가 일정한 경우, 즉  $\dot{\Omega}=0$ 인 경우를 살펴보자. 식 (38)로 표현되는 비선형 행렬-벡터 방정식에 섭동법을 적용하면, 평형위치에 대한 방정식

과 평형위치 부근에서 선형화된 방정식을 구할 수 있다. 즉,

$$Kx_0 + N(x_0) = F \quad (40)$$

$$M\ddot{x}_1 + C\dot{x}_1 + (K + K_1(x_0))x_1 = 0 \quad (41)$$

여기서,  $x_0$ 는 평형위치를 그리고  $x_1$ 은 평형위치로부터 섭동된 미소 변위를 의미하며,  $K_1$ 는 평형위치에서 비선형 내력 벡터에 대한 접선(tangent) 강성행렬이다.

먼저, 각속도와 각가속도가 0일 때, 즉  $\Omega = 0$ ,  $\dot{\Omega} = 0$ 인 경우 계산된 고유진동수를 Mote<sup>(3)</sup>의 엄밀해와 비교하여 Table 1에 정리하였다. 여기서, 모드 ( $n, m$ )에서  $m$ 은 절점원의 수를 나타내며,  $n$ 은 절점직경의 수를 표시한다. Table 1에서 볼 수 있듯이 Mote의 계산결과와 본 연구에서의 계산 결과와의 차이는 무시할 정도이다.

그리고 각속도가 일정한 회전원판의 임계속도를 비교함으로써 수치계산의 타당성을 검증할 수 있다. 임계속도 계산에 사용된 물성치는 내경을 제외하고 ( $a = 0.01742$  m) 앞서 사용된 값과 동일하다. Table 2에 면내응력의 영향을 고려한 임계속도에 대한 Hutton의 계산결과와 본 연구의 계산결과를 비교하였는데, 그 차이가 1%를 넘지 않는다.

마지막으로 각속도가 일정한 경우, 회전속도에 대한 회전원판의 고유진동수의 변화에 의해 수치해의 타당성을 검증하였다. 식 (40)과 (41)을 사용하여 계산된 회전속도에 대한 고유진동수의 변화를 Fig.

2에 도시하였다. Fig. 2에서 실선은 면내 응력의 면의 변위에 대한 영향을 고려한 결과이며, 점선은 이러한 영향을 무시한 결과이다. 다시 말해, 실선은 식 (41)에서  $K_1$ 를 고려했을 때의 결과이며, 점선은  $K_1$ 를 무시했을 때의 결과이다. Fig. 2에서 나타난 결과는 기존 연구의 계산결과와 일치한다.

비선형성을 고려한 각가속도를 갖는 회전원판의 동적 응답을 구하기 위해 식 (38)에 2차 정확도와 무조건적 안정성을 갖는 암시적(implicit) 시간적분법인 일반화된  $\alpha$ 방법<sup>(16)</sup>을 사용하였다. 그리고 각 시간간격의 계산에서 수렴해를 얻기 위해 Newton-Raphson 방법을 이용한 반복계산(iteration)을 수행하였다. 모든 수치계산에 사용된 일반화된  $\alpha$ 방법의 알고리즘 상수  $\rho_\infty$ 는 1이며, 시간간격은  $\Delta t = 0.001$

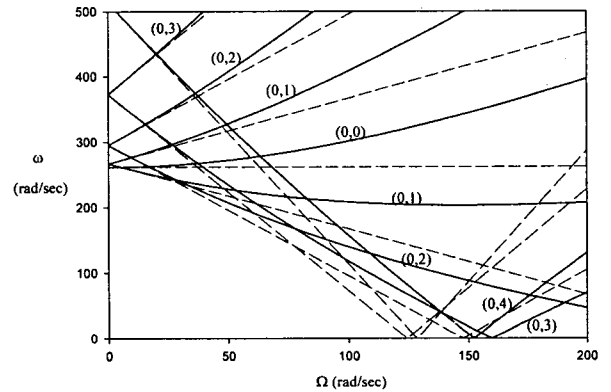


Fig. 2 Natural frequencies versus the spinning speed when  $\dot{\Omega} = 0$

Table 1 Natural frequencies when  $\Omega = \dot{\Omega} = 0$  (rad/s)

Mode	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)
Proposed	261.5328	266.8648	295.2596	372.7353
Exact(3)	261.5329	266.8644	295.2590	372.7321
Error (%)	0.00002	0.00013	0.00020	0.00084

Table 2 Critical speeds when  $\dot{\Omega} = 0$  (rad/s)

Mode	(0,2)	(0,3)	(0,4)
Proposed	114.93	114.56	137.52
Hutton(8)	114.46	114.46	136.55
Difference (%)	0.41	0.09	0.71

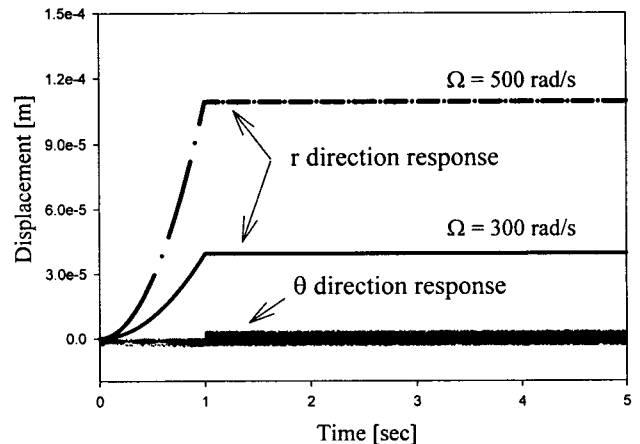


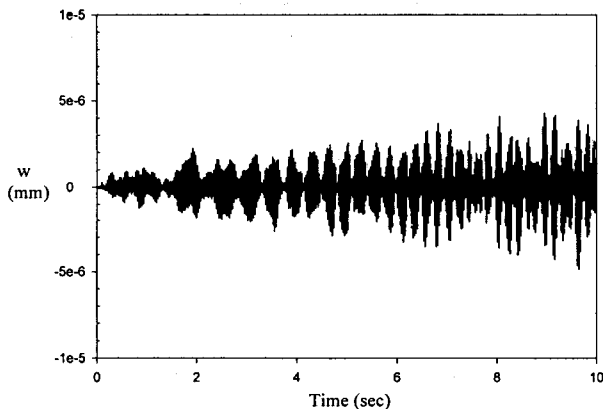
Fig. 3 In-plane displacements at the outer radius when the spinning speed is linearly increased during 1 sec and then maintains constant speed

sec이다.

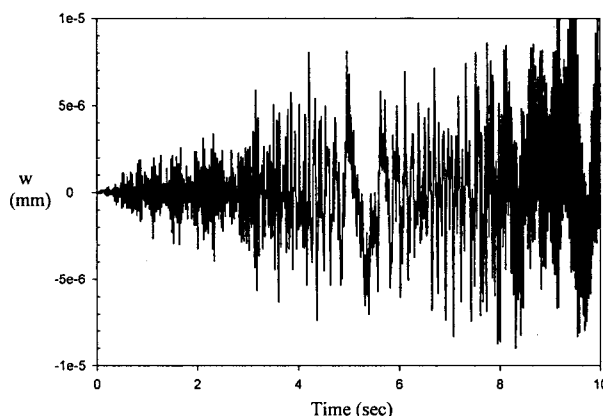
정지상태에 있는 원판을 1초 동안 일정한 각속도를 갖고 가속시킨 후 각속도를 300 rad/s와 500 rad/s로 유지한 경우의 자유단에서의 면내 변위를 Fig. 3에 도시하였다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 각속도가 존재할 때 시간에 대해 반경 방향의 면내변

**Table 3** Radial displacements at the outer radius when  $\dot{\Omega} = 0$  (mm)

Angular speed	100 rad/s	300 rad/s	500 rad/s
Proposed	0.00413	0.03933	0.10930
Exact(17)	0.00404	0.03929	0.10912
Error (%)	2.23	0.10	0.16



**Fig. 4** Out-of-plane displacement at the outer radius when the unit impulse is applied with  $\dot{\Omega} = 3$  rad/sec<sup>2</sup>



**Fig. 5** Out-of-plane displacement at the outer radius when the unit impulse is applied with  $\dot{\Omega} = 30$  rad/sec<sup>2</sup>

위가 증가하나 각속도가 존재하지 않을 때 반경 방향의 면내 변위에 변화가 없다. 그리고, 원주 방향의 면내 변위는 0에 가깝다는 사실을 알 수 있다. 이는 각속도가 일정한 회전원판의 면내 변위 및 응력에 대한 기존 연구의 가정과 일치한다. 계산된 면내 변위의 타당성을 검증하기 위하여, Fig. 3의 계산 결과와 각속도가 일정할 때 자유단에서의 반경방향의 변위에 대한 엄밀해<sup>(17)</sup>와 비교하여 Table 3에 정리하였다. Table 3은 식 (38)을 사용하여 구한 면내 변위의 수치계산 결과와 각속도가 일정한 경우의 엄밀해의 차이가 3%를 넘지 않음을 보여 준다.

각 각속도가 회전원판의 면외 변위에 끼치는 영향을 고찰하기 위하여 각속도를 갖는 회전원판의 비선형 지배방정식인 식 (38)로부터 동적 응답을 고찰하였다. 회전원판의 초기 속도와 변위를 모두 0으로 가정하고 면외 변위의 방향으로 단위 충격력(unit impulse)을 자유단에 가하여, 자유단에서의 면외 변위에 관한 시간응답을 구하여 Fig. 4와 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 4는 각속도가 3 rad/sec<sup>2</sup>일 때의 면외 변위의 시간응답이며, Fig. 5는 각속도가 30 rad/sec<sup>2</sup>일 때의 면외 변위의 시간응답이다. Fig. 4와 Fig. 5의 시간응답은 각속도가 면외 변위의 진폭을 증가시키고 각속도의 크기가 클수록 면외 변위에 대한 진폭의 증가율이 커짐을 보여 준다. 결론적으로 회전원판에서 각속도의 존재는 회전원판의 동적 불안정을 야기한다.

## 5. 결 론

본 논문에서 기하학적 비선형성을 고려하여 각속도를 갖는 회전원판에 대한 면내 및 면외 변위가 서로 연성된 비선형 지배방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식으로부터 이산화된 비선형 행렬-벡터 방정식을 구하고 이를 바탕으로 회전원판의 동적 응답을 시간적분법에 의해 계산하였다. 계산된 동적 응답으로부터 회전원판이 각속도를 갖게 되면 회전원판의 동적 불안정이 야기됨을 증명하였다.

본 논문에서 제안한 각속도가 회전원판의 동적 안정성에 미치는 영향을 규명할 수 있는 지배방정식의 정립과 해석 방법은 CD-ROM 혹은 DVD와 같은 광 디스크 드라이브의 회전속도의 제어 및 설계에 이용될 수 있다. 한편, 회전원판에 존재하는 편심이 원판의 동적 안정성과 관련이 있기 때문에 편심을 고려한 회전원판의 동특성 해석으로 연구를 확장할 필요가 있다.

## 후 기

본 연구는 1997년도 학술진흥재단 자유공모과제 (1997-001-E00083)에 의해 지원된 연구결과의 일부이며, 이에 관계자 여러분께 감사드린다.

## 참 고 문 헌

- (1) Lamb, H. and Southwell, R. V., 1921, "The Vibration of a Spinning Disk," Proceedings of the Royal Society, Vol. 99, pp. 272~280.
- (2) Simmonds, J. G., 1962, "The Transverse Vibrations of a Flat Spinning Membrane," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 29, No. 1, pp. 16~18.
- (3) Mote, C. D., 1965, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 89, pp. 258~265.
- (4) Everseman, W. and Dodson, R. O., 1969, "Free Vibration of a Centrally Clamped Spinning Circular Disk," AIAA Journal, Vol. 7, No. 10, pp. 2010~2012.
- (5) Adams, G. G., 1987, "Critical Speed for a Flexible Spinning Disk," International Journal of Mechanics, Vol. 29, No. 8, pp. 525~531.
- (6) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 485~490.
- (7) Benson, R. C. and Bogy, D. B., 1978, "Deflection of a Very Flexible Spinning Disk due to a Stationary Transverse Load," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 445~451.
- (8) Hutton, S. G., Chonan, S. and Lehmann, B. F., 1987, "Dynamic Response of a Guided Circular Saw," Journal of Sound and Vibration, Vol. 112, No. 3, pp. 527~539.
- (9) Ono, K., Chen, J.-S. and Bogy, D. B., 1991, "Stability Analysis for the Head-Disk Interface in a Flexible Disk Drive," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 1005~1014.
- (10) Jeong, T. G. and Bogy, D. B., 1991, "Slider-Disk Contacts During Dynamic Load-Unload," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, pp. 5073~5075.
- (11) Chen, J.-S. and Bogy, D. B., 1993, "Natural Frequencies and Stability of a Flexible Spinning Disk-Stationary Load System with Rigid-Body Tilting," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 470~477.
- (12) Lee, S. J., Chung, J. and Lee, J. M., 1998, "Free Vibrations of a Flexible Spinning Disk with Axial Translation and Rigid-Body Tilting," JSME International Journal, Series C, Vol. 41, No. 3, pp. 329~337.
- (13) Chung, J., Kang, N.-C. and Lee, J. M., 1996, "A Study on Free Vibration of a Spinning Disk," KSME Journal, Vol. 10, No. 2, pp. 138~145.
- (14) 정진태, 1995, "컴퓨터 하드 디스크의 안정성을 위한 스피들 모터 회전수 선정에 관한 연구," 한국소음진동공학회지, 제 5 권, 제 2 호, pp. 163~168.
- (15) 최태영, 정진태, 노대성, 1997, "비연성된 지배방정식을 이용한 각가속도를 갖는 회전원판의 동적 안정성 해석", 대한기계학회, 춘계학술대회 논문집 A, pp. 326~331.
- (16) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation : the Generalized- $\alpha$  Method," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 371~375.
- (17) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, Theory of Elasticity, McGraw-Hill.