

< 논 문 >

원통형 스프링의 동특성 해석을 위한 헬리컬 로드 유한요소 개발

Development of Helical Rod Finite Element for the Dynamic Analysis of Cylindrical Springs

김 도 중* · 이 덕 영**

Do-Joong Kim and Dug-Young Lee

(1999년 1월 30일 접수 ; 1999년 4월 1일 심사완료)

Key Words : Helical Spring(원통형 스프링), Finite Element Method(유한요소법), Helical Rod Element(원통형 막대 요소), Valve Spring(밸브스프링)

ABSTRACT

A 3-dimensional helical rod finite element is developed for the dynamic analysis of cylindrical springs. Element matrices are formulated using the Galerkin's method, and an exact static deflection curve is used as a shape function. Because the resultant mass and stiffness matrices of the model are symmetric, effective direct solution method can easily be applied for analysing dynamic behavior of springs. The model is used to analyze the dynamic characteristics of a typical automotive valve spring. The effectiveness of the developed helical rod element is verified by comparing the results of the proposed method with those of a classical theory and experiments. The helical element developed in this study is superior to a straight beam element and a 2-dimensional curved beam element for this problem.

기 호 설 명

A : 스프링 와이어의 단면적
 E : 스프링 재료의 탄성계수
 G : 스프링 재료의 전단 탄성계수
 I : 와이어의 단면 2차 모멘트
 J : 와이어의 극 단면 2차 모멘트
 N : 스프링 유효코일의 수
 R : 스프링의 평균 코일반경
 X, Y, Z : 글로벌(global) 좌표계의 축

\hat{e} : 단위 벡터
 k : 와이어 단면의 회전반경
 r : 스프링 와이어 단면의 반경
 s : 나선을 따라 정의된 곡선 좌표
 u, v, w : 와이어의 동적 변위를 나타내는 축
 x, y, z : 극부 좌표계의 축
 α : 스프링의 나선각
 ρ : 스프링 재료의 밀도
 γ : 와이어 단면의 전단계수
 μ : 스프링 와이어의 선밀도
 κ : 헬리컬 요소의 곡률(curvature)
 τ : 헬리컬 요소의 비틀림(torsion)

* 정회원, 울산대학교 기계자동차공학부

** 정회원, 대구대학교 자동차산업공학부

$\psi(s)$: 형상함수
 $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$: 작용력에 대한 와이어 단면의 강성
 $\beta_u, \beta_v, \beta_w$: 모멘트에 대한 와이어 단면의 강성

1. 서 론

원통형 헬리컬 스프링은 기계장치에 널리 사용되는 요소이다. 특히 내연기관의 밸브스프링과 같은 것은 장치의 정상적 운전에 매우 중요한 영향을 미치는 부품이다. 고속으로 운전되는 엔진에서 밸브트레인의 동적 거동은 밸브스프링 내부의 공진현상 즉 스프링 서어징 현상과 밀접한 관계가 있다. 스프링의 고유진동수, 진동모드, 응력파의 과도특성, 등 스프링 동특성에 대한 이해는 밸브트레인 설계시 반드시 확인되어야 할 사항이다.

지금까지 헬리컬 스프링의 진동특성에 관한 많은 연구가 수행되었는데, 1차 고유진동수 예측을 위한 Wahl⁽¹⁾의 이론이 가장 널리 사용되고 있다. 그러나 이 이론은 양단이 고정된 스프링의 종방향 1차 고유진동수에 관한 정보는 제공하지만 비틀림 진동 및 횡방향 진동에 관한 예측이 불가능하다. 또한 예측된 고유진동수도 스프링의 유효코일 수가 클 때는 어느 정도 정확한 값을 제공하지만 밸브스프링과 같이 유효코일의 수가 작을 때는 큰 오차를 보이고 있다. 헬리컬 스프링의 3차원 진동에 관해서는 Yoshimura⁽²⁾ 등이 연구를 수행했는데, 이들은 스프링 와이어의 회전관성 및 자유도, 전단력 및 축력에 의한 변형, 등을 고려하지 않은 매우 단순한 해석을 수행했다. 와이어의 회전관성, 전단변형, 축방향 변형, 등을 포함하는 가장 완전한 형태의 스프링 해석은 Wittrick⁽³⁾에 의해 완성되었으며, 헬리컬 스프링의 3차원 진동을 6개의 상미분 방정식과 6개의 편미분 방정식의 형태로 표현했다. Pietra와 Guido^(4,5) 등은 원통형 헬리컬 스프링의 와이어 비틀림 변형과 굽힘 변형 사이의 연성에 관하여 연구를 수행했으며, 축방향 가진에 의해서도 스프링의 비틀림 및 횡방향 진동들이 가진 됨을 실험적으로 보였다.

Mottershead⁽⁶⁾와 Sawanobori⁽⁷⁾ 등은 스프링의 3차원 진동을 유한요소법을 이용하여 해석했다. Sawanobori의 해석은 와이어의 회전관성과 전단변형을 고려하지 않은 불완전한 형태이며, Mottershead의 해석은 Wittrick의 운동방정식을 기초로 했으므로 회전관성 및 전단변형 등은 완벽하게 고려되었지만 결과적으로 얻어지는 질량 및 강성행렬이 비대

칭(non-symmetric) 형태를 가지는 단점이 있다. Pearson⁽⁸⁾은 Wittrick의 운동방정식에 근거하여 고유진동수에 미치는 스프링 압축력의 영향을 전달행렬법을 이용하여 해석했다.

내연기관 밸브트레인과 같은 비선형 시스템의 동적 거동을 해석하기 위해서는 미분방정식을 시간영역에서 수치적분을 통하여 시뮬레이션하는 방법이 일반적으로 사용된다. 시스템에 스프링 요소가 포함되면 스프링의 강성이 비교적 낮기 때문에 동특성 모델의 자유도가 크게 증가할 수밖에 없다. 이러한 문제에 효과적으로 대응하기 위하여 분포변수모델, 집중질량모델, 유한차분모델, 등 다양한 형태의 시도들이 이루어지고 있다^(9~12). 스프링을 직선보 혹은 2차원적 곡선보(curved beam)로 모델링할 경우 지나치게 많은 자유도로 인하여 해석 시간의 증가는 물론이고 시뮬레이션의 단계별 수렴 과정에서 많은 문제점들을 야기하게 된다. 이러한 관점에서 스프링 내부진동 효과를 포함하는 동적계의 효과적인 해석을 위해서는 정확성을 충족시키며 자유도의 증가를 억제할 수 있는 스프링 모델이 필요하다.

본 연구에서는 스프링의 진동 문제를 해석하기 위하여 3차원 헬리컬 유한요소를 개발했다. 12개의 미분방정식 형태로 표현되는 Wittrick의 운동방정식을 6개의 연성된 2차 편미분 방정식의 형태로 변형시키고 Galerkin 방법을 적용하여 유한요소의 질량 및 강성행렬을 구했다. Mottershead는 Wittrick의 운동방정식을 직접 적용시켰기 때문에 얻어지는 질량 및 강성 행렬이 비대칭이었지만, 본 연구에서 개발한 유한요소 행렬들은 대칭성이 보장되는 장점이 있다. 그러므로 스프링 모델을 기존의 동특성 해석 프로그램들과 연결시켜 해석할 때, 행렬의 대칭성이 주는 많은 장점들을 그대로 이용할 수 있다. 개발된 방법의 효용성을 검증하기 위하여 전형적인 자동차 엔진 밸브스프링 해석을 수행했으며, 고전적 이론과 실험으로부터 얻어지는 결과들과 비교했다. 또한 상용프로그램 IDEAS를 이용하여 스프링을 직선 보 요소 및 곡선 보 요소로 모델링하고 모델링 요소의 수를 변화시켜가며 결과의 수렴성을 비교했다.

2. 헬리컬 스프링의 동특성

2.1 운동방정식

헬리컬 스프링의 3차원 진동에 관한 가장 완전한 형태의 지배방정식은 Wittrick⁽³⁾에 의하여 제시되었다. 운동방정식은 Timoshenko 보 이론을 이용하여

$$k_u = k_v = \frac{\gamma}{2}, \quad k_w = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$$

식 (15)와 (16)에 주어진 벡터 식은 실제로는 각각 3 방향의 스칼라 미분방정식을 의미하므로 6개의 1차 편미분방정식이 된다. 식 (9)에서 식 (16)까지 주어진 Wittrick의 미분방정식들을 와이어 단면의 변위와 회전에 관한 항으로만 나타내면 6개의 2차 편미분방정식의 형태로 표현될 수 있다. 식 (9)에서 식 (14)까지의 식들을 식 (15)와 식 (16)에 대입하고 힘과 모멘트 항들을 소거하면 헬리컬 스프링의 운동방정식은 다음과 같이 행렬식으로 표현된다.

$$[M] \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = [A] \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial s^2} + [B] \frac{\partial \vec{d}}{\partial s} + [C] \vec{d} \quad (17)$$

식 (17)의 벡터와 행렬들은 다음과 같다.

$$\vec{d} = [u \ v \ w \ \theta_u \ \theta_v \ \theta_w]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu k_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu k_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu k_w^2 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_w \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -\tau(\sigma_u + \sigma_v) & x(\sigma_u + \sigma_w) \\ \tau(\sigma_u + \sigma_v) & 0 & 0 \\ -x(\sigma_u + \sigma_w) & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_v & 0 \\ \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sigma_u & 0 \\ \sigma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(\beta_u + \beta_v) & x(\beta_u + \beta_w) \\ \tau(\beta_u + \beta_v) & 0 & 0 \\ -x(\beta_u + \beta_w) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -\tau^2 \sigma_v - x^2 \sigma_w & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^2 \sigma_u & \tau x \sigma_u \\ 0 & \tau x \sigma_u & -x^2 \sigma_u \\ -\tau \sigma_v & 0 & 0 \\ 0 & -\tau \sigma_u & x \sigma_u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\tau \sigma_v & 0 & 0 \\ 0 & -\tau \sigma_u & 0 \\ 0 & x \sigma_u & 0 \\ -\sigma_v - \tau^2 \beta_v - x^2 \beta_w & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_u - \tau^2 \beta_u & \tau x \beta_u \\ 0 & \tau x \beta_u & -x^2 \beta_u \end{bmatrix}$$

식 (17)은 헬리컬 스프링의 진동을 표현하는 지배 방정식의 압축된 형태로서, 행렬 $[M]$, $[A]$, $[C]$ 는 대칭(symmetric)이며 $[B]$ 는 반대칭(anti-symmetric)이다. 이 점으로부터 아래 식으로 주어지는 시스템의 self-adjoint 성질을 증명할 수 있다⁽¹⁴⁾.

$$\int_D \vec{u}^T M \vec{v} dD = \int_D \vec{v}^T M \vec{u} dD \quad (18)$$

$$\int_D \vec{u}^T L \vec{v} dD = \int_D \vec{v}^T L \vec{u} dD + \text{boundary terms} \quad (19)$$

위 식에서 \vec{u} , \vec{v} 는 임의의 벡터이며, 선형 연산자 L 은 다음과 같다.

$$L = [A] \frac{\partial^2}{\partial s^2} + [B] \frac{\partial}{\partial s} + [C]$$

$[M]$ 행렬이 diagonal 이기 때문에 식 (18)은 당연하며, 식 (19)도 부분적분을 이용한 다소 복잡한 연산을 통하여 증명할 수 있다.

2.2 헬리컬 스프링의 유한요소해석

지금까지 유도된 헬리컬 스프링의 운동방정식을 유한요소법을 이용하여 해석했다. 먼저 (u, v, w) 좌표계는 헬리컬 축을 따라서 계속 방향이 변하는 좌표계이므로 Fig. 2와 같이 헬리컬 요소 전체에서 일관된 국부좌표계(local coordinate system) (x, y, z) 를 정의했다. 'y' 축은 방향이 스프링 축과

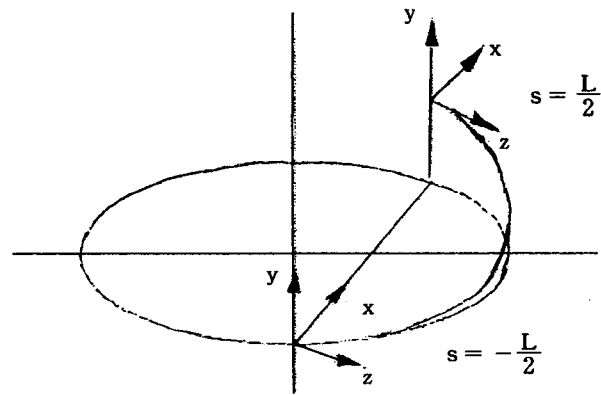


Fig. 2 Local coordinate system of helical element

일치되게 설정했으며 양의 방향은 노드 1에서 노드 2로 향하도록 했다. 또 'x' 축은 노드 2를 스프링 축에 수직하며 노드 1을 지나는 평면에 투영시킨 다음, 노드 1에서 노드 2의 투영 지점을 향하도록 설정했다. 'z' 축은 x 축과 y 축에 수직하며 좌표계의 오른손 법칙이 성립되도록 설정했다.

노드의 변위 벡터를 $\{\vec{d}\}^{(e)}$ 로 표현한다면 (u, v, w)와 (x, y, z) 좌표계 사이에는 다음과 같은 변환관계가 성립한다.

$$\{\vec{d}\}_{s=-l/2}^{(e)} = [T_1] \vec{d}(-l/2) \quad (20)$$

$$\{\vec{d}\}_{s=l/2}^{(e)} = [T_2] \vec{d}(l/2) \quad (21)$$

식 (20)과 (21)에 나타난 벡터와 행렬들은 구체적으로 다음과 같다.

$$\{\vec{d}\}^{(e)} = [x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^T$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \lambda_s & -\lambda_c \mu_s & \lambda_c \mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_c & \mu_s & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_c & -\lambda_s \mu_s & \lambda_s \mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_s & -\lambda_c \mu_s & \lambda_c \mu_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_c & \mu_s \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_c & -\lambda_s \mu_s & \lambda_s \mu_c \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} -\lambda_s & -\lambda_c \mu_s & \lambda_c \mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_c & \mu_s & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_c & \lambda_s \mu_s & -\lambda_s \mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_s & -\lambda_c \mu_s & \lambda_c \mu_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_c & \mu_s \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_c & \lambda_s \mu_s & -\lambda_s \mu_c \end{bmatrix}$$

$$\lambda_c = \cos(\phi/2) \quad \lambda_s = \sin(\phi/2)$$

$$\mu_c = \cos(\alpha) \quad \mu_s = \sin(\alpha)$$

여기서 각 ϕ 는 스프링 축을 따라서 정의된 노드 1 과 노드 2 지점의 사이각을 의미한다.

Galerkin 방법은 유한요소 행렬을 유도하는 과정에서 변위 벡터와 가중 함수(weighting function)를 근사화시키데 동일한 형태의 형상함수를 이용한다. 진동 시스템의 지배 미분방정식이 self-adjoint 인 경우 Galerkin 방법은 유도되는 질량 및 강성 행렬의 대칭성을 보장한다⁽¹⁵⁾. 그러므로 본 연구에서는 Galerkin 방법을 응용했으며, 식 (17)의 지배방정식에 가중함수 \vec{w}^T 를 곱하고 요소 전체에 대하여 적분함으로써 다음과 같은 적분식 형태의 지배방정식을 유도했다.

$$\int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [M] \vec{d} ds - \int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [A] \vec{d} ds$$

$$- \int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [B] \vec{d}' ds - \int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [C] \vec{d} ds = 0 \quad (22)$$

여기서 l 은 s 축을 따라서 측정된 요소의 길이를 의미하며, 행렬 $[B]$ 는 반대칭(anti-symmetric)이기 때문에 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$[B] = \frac{1}{2}([B] - [B]^T) \quad (23)$$

이 관계를 적분식 (22)에 대입하고 부분적분을 이용하여 정리하면 아래 식 (24)와 같은 대칭 형태의 수식으로 표현할 수 있다.

$$\int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [M] \vec{d} ds + \int_{-l/2}^{l/2} (\vec{w}' + \frac{1}{2} [A]^{-1} [B] \vec{w})^T \times [A] (\vec{d}' + \frac{1}{2} [A]^{-1} [B] \vec{d}') ds$$

$$- \frac{1}{4} \int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [B]^T [A]^{-1} [B] \vec{d} ds$$

$$- \int_{-l/2}^{l/2} \vec{w}^T [C] \vec{d} ds - \vec{w}^T [A] \vec{d} \Big|_{-l/2}^{l/2}$$

$$- \frac{1}{2} \vec{w}^T [B] \vec{d} \Big|_{-l/2}^{l/2} = 0 \quad (24)$$

변위 벡터 $\vec{d}(s)$ 는 다음과 같이 형상 함수(shape function)로서 근사화된다.

$$\vec{d}(s) = [\Psi(s)] \vec{c}_d \quad (25)$$

여기서 \vec{c}_d 는 (12×1) 크기를 가지는 임의의 계수 벡터이며, $[\Psi(s)]$ 는 형상함수 행렬이다. 노드의 변위 $\{\vec{d}\}^e$ 는 식 (25)에 $s = -l/2$ 혹은 $s = l/2$ 을 대입함으로써 바로 계산될 수 있다.

$$\{\vec{d}\}^e = \begin{bmatrix} \vec{d}(-l/2) \\ \vec{d}(l/2) \end{bmatrix} = [X] \vec{c}_d \quad (26)$$

여기서 행렬 $[X]$ 는 다음과 같이 계산되는데, $[T_1], [T_2]$ 행렬은 식 (20)과 (21)에 주어진 좌표 변환 행렬이다.

$$[X] = \begin{bmatrix} [T_1] [\Psi(-l/2)] \\ [T_2] [\Psi(l/2)] \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (25)와 (26)에서 임의 벡터 \vec{c}_d 를 소거하면 헬리컬 요소 임의지점의 변위 벡터는 다음 식과 같이 노드 지점의 변위들로 표현된다.

$$\vec{d}(s) = [\Psi(s)][X]^{-1} \{\vec{d}\}^e \quad (28)$$

형상함수가 s 만의 함수이기 때문에 변위 벡터의 s 에 대한 1차 미분도 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{d}'(s) = [\Psi'(s)][X]^{-1} \{\vec{d}\}^e \quad (29)$$

Galerkin 방법은 가중함수(weighting function)를 근사화하는 데도 동일한 형상 함수(shape function)를 사용하므로 \vec{w} 와 \vec{w}' 의 1차 미분도 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{w}(s) = [\Psi(s)][X]^{-1} \vec{c}_w \quad (30)$$

$$\vec{w}'(s) = [\Psi'(s)][X]^{-1} \vec{c}_w \quad (31)$$

여기서 \vec{c}_w 는 임의의 계수 벡터이다.

식 (28), (29), (30), (31)을 적분 형태의 지배방정식 (24)에 대입하면 유한요소의 질량 및 강성 행렬이 다음과 같이 유도된다.

$$[m]^e = X^{-T} \left\{ \int \Psi^T M \Psi ds \right\} X^{-1} \quad (32)$$

$$[k]^e = X^{-T} \left[\int \left\{ \left(\Psi' + \frac{1}{2} A^{-1} B \Psi \right)^T A \left(\Psi' + \frac{1}{2} A^{-1} B \Psi \right) - \Psi^T \left(C + \frac{1}{4} B^T A^{-1} B \right) \Psi \right\} ds \right] X^{-1} \quad (33)$$

행렬 $[M]$, $[A]$, $[C]$ 와 $[B^T A^{-1} B]$ 가 대칭(symmetric)이기 때문에 식 (32)와 (33)에서 구해지는 질량 및 강성 행렬은 반드시 대칭 행렬임을 알 수 있다.

이제 남은 문제는 형상 함수(shape function)를 어떻게 선택하느냐 하는 것이다. 유한요소법에서 형상함수는 해의 정확도에 영향을 미치며, 요소의 크기가 큰 경우에 그 영향이 더욱 커지게 된다. 그러므로 형상 함수는 가능하면 헬리컬 와이어의 실제 거동을 잘 표현할 수 있도록 선택되어야 한다. 헬리컬 스프링의 정적 변형곡선이 얻어질 수 있기 때문에 본 연구에서는 이를 형상함수로 선택했다. 식 (17)에 주어진 지배방정식에서 관성의 영향을 무시하면 스프링의 정적 변형은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$[A] \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial s^2} + [B] \frac{\partial \vec{d}}{\partial s} + [C] \vec{d} = 0 \quad (34)$$

위의 서로 연성된 2차 상미분방정식(2nd order coupled ordinary differential equations)들은 일반적으로 다음과 같은 1차 상미분방정식의 형태로 표현될 수 있다.

$$\vec{q}' = [H] \vec{q} \quad (35)$$

여기서,

$$\vec{q} = \{ \vec{d} \ \vec{d}' \}^T \quad (36)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -[A]^{-1}[C] & -[A]^{-1}[B] \end{bmatrix} \quad (37)$$

식 (35)에 주어진 1차 상미분방정식의 일반해는 아래 식과 같다.

$$\vec{q} = e^{[H]s} \vec{c}_q \quad (38)$$

여기서 c_q 는 (12×1) 의 임의 계수 벡터이며, $e^{[H]s}$ 는 급수 형태로 표현될 수 있다.

$$e^{[H]s} = [I] + s[H] + \frac{s^2}{2!} [H]^2 + \dots + \frac{s^n}{n!} [H]^n + \dots \quad (39)$$

식 (28)과 (29)로부터 변위 벡터와 변위의 1차 미분 벡터는 다음과 같이 요약된다.

$$\begin{bmatrix} \vec{d} \\ \vec{d}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi(s)] \\ [\Psi'(s)] \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\vec{d}\}^e \quad (40)$$

식 (38)과 (40)을 비교하면 형상함수가 급수형태로 다음 식과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} [\Psi(s)] \\ [\Psi'(s)] \end{bmatrix} = e^{[H]s} \quad (41)$$

식 (41)의 형상함수를 식 (32)와 (33)에 대입하고 수치 적분을 수행하면 헬리컬 와이어 유한요소의 질량 및 강성 행렬이 얻어진다.

3. 유한요소 해석 및 실험

본 연구에서 개발한 유한요소법을 이용하여 벨브 스프링의 내부진동에 관하여 해석했다. Fig. 3은 헬리컬 로드 요소로 모델링된 벨브스프링을 나타낸다. 각각의 고정되지 않은 노드들은 3방향의 변위 및 3방향의 회전을 의미하는 6개씩의 자유도에 대응된

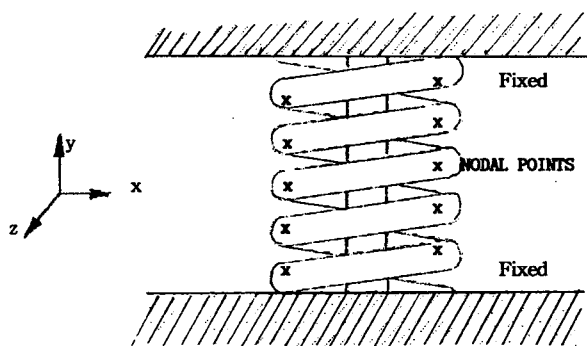


Fig. 3 F.E.M. model of a helical spring

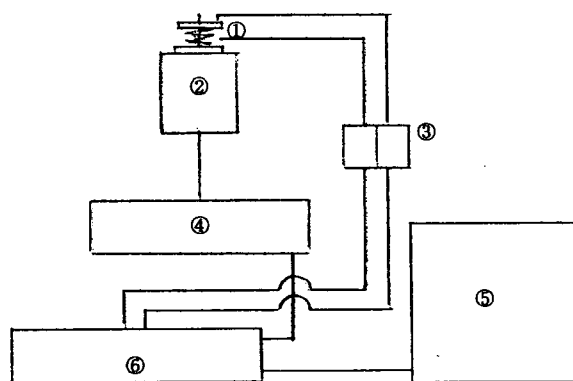
Table 1 Parameters of a typical valve spring

Contents	Data
Number of active turn	4.0
Wire radius [m]	0.00254
Mean coil radius [m]	0.01702
Helix angle [degree]	6.6
Shear coefficient of wire cross section	0.8863
Young's modulus [N/m^2]	2.06×10^{11}
Poisson's ratio	0.3
Density of spring material [kg/m^3]	7900.0

다. 스프링 양 끝단에 해당하는 노드들은 변위와 회전 이 구속된 상태이다. 실제 밸브스프링의 운동을 살펴보면 스프링 하단은 실린더 헤드에 고정되어 있지만 상단은 움직이는 밸브에 고정되어 있다. 밸브 트레인의 동적 거동에서 스프링을 제외한 나머지 부분의 진동은 스프링의 고유진동수보다 훨씬 높은 영역에 있으므로 실제 밸브스프링 상단은 밸브의 기구학적 거동을 따르는 정해진 운동을 하게 된다. 그러므로 스프링의 내부진동에 관한 해석은 양단 고정 상태(clamped-clamped)의 경계조건을 적용하는 것이 타당하다.

본 해석에 사용된 밸브스프링의 사양이 표 1에 주어졌다. 먼저 스프링의 유효 코일이 10개의 헬리컬 요소로 나누어졌는데, 경계 노드가 고정되어 있으므로 움직이는 자유도는 9개이다. 각각의 노드가 6개씩의 자유도를 가지므로 모델 전체의 자유도는 54개이다.

스프링의 고유진동수를 측정하기 위하여 Fig. 4와 같은 실험장치를 구성했다. 먼저 스프링을 두 개의 평판 사이에 고정시키고 평판에 고정된 볼트와 너트를 이용하여 초기 장착하중을 작용시킬 수 있도록 했다. 스프링의 장착 길이는 유효 코일의 수가 4.0



- ① Accelerometers
- ② Exciter
- ③ Charge amplifiers
- ④ Power amplifier
- ⑤ Signal analyzer
- ⑥ Data acquisition

Fig. 4 Schematic diagram of experimental apparatus

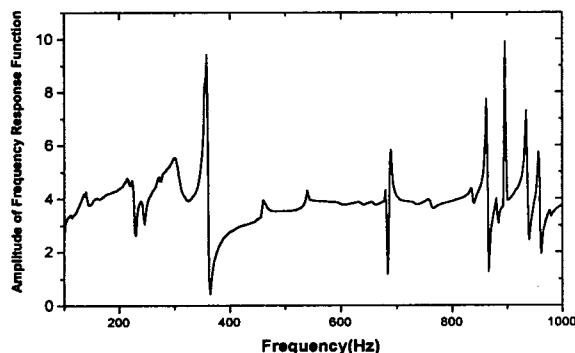


Fig. 5 Amplitude of frequency response function of a typical valve spring

개되도록 조정했다. 유효코일의 수는 잭 게이지를 이용하여 코일과 인접 코일이 분리되는 지점을 측정하여 확인했다. 평판 사이에 고정된 스프링을 진동 가진기 가진판 위에 위치시키고 신호발생기의 swept 사인파를 이용하여 가진 주파수를 연속적으로 변화시키며 실험을 수행했다. 스프링 하단 평판의 운동과 상단 평판의 운동을 가속도계를 이용하여 측정하고, 신호분석기를 이용하여 이들 사이의 주파수 응답함수를 계산했다. Fig. 5는 측정된 주파수 응답함수의 크기를 나타내며 1000 Hz 이내에서 몇 개의 공진 주파수를 확인할 수 있다.

4. 결과 및 토의

Fig. 6에서 Fig. 10까지는 본 연구에서 개발된 유한 요소법을 이용하여 계산한 밸브 스프링의 고유

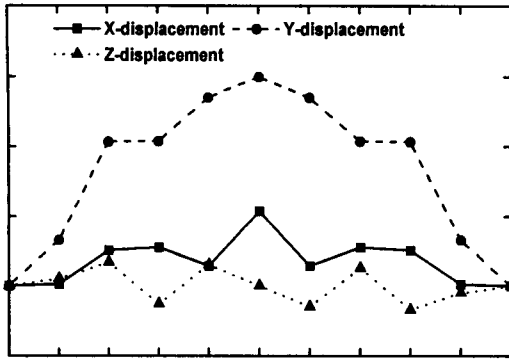


Fig. 6 First mode(374.06 Hz) shape

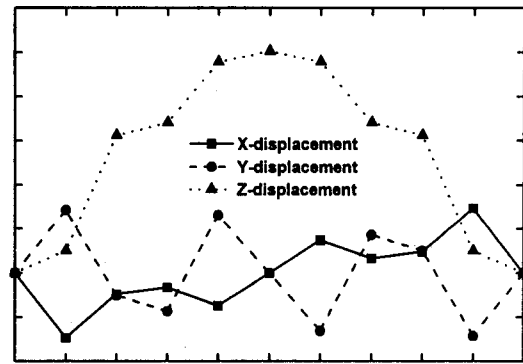


Fig. 8 Third mode(491.07 Hz) shape

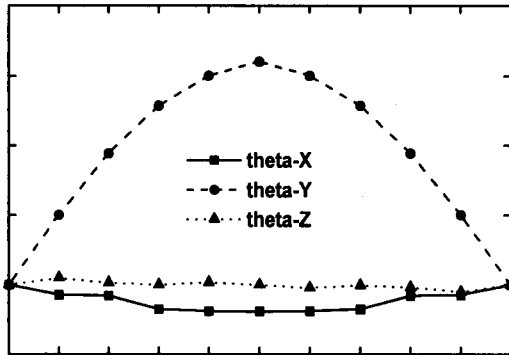


Fig. 7 Second mode(429.07 Hz) shape

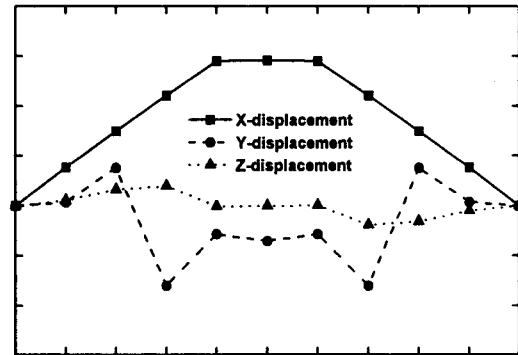


Fig. 9 Fourth mode(510.66 Hz) shape

진동수 및 모드형상(mode shape) 중 진동수가 낮은 것부터 5개를 나타낸 것이다. 헬리컬 스프링의 기하학적 형상이 단순하지 않지만 각각의 모드에 나타나는 주운동 형태는 파악이 가능하다. 먼저 1차 진동모드는 Y축 방향의 변위가 가장 크므로 스프링축 방향의 종진동임을 알 수 있다. 마찬가지로 Fig. 7에 나타난 2차 진동모드는 θ_Y 방향의 운동이 탁월한데 이는 스프링축을 중심으로 하는 비틀림 진동을 의미한다. 이때 스프링 와이어에는 주로 길이 방향의 변형이 발생하게 된다. 3차 모드와 4차 모드는 각각 Y-Z 평면과 X-Y 평면에 대한 스프링의 굽힘 진동을 의미한다. Fig. 10의 5차 진동 모드는 2차 종방향 진동의 형태를 나타내고 있다. 지금까지 설명한 진동 모드는 대체적인 진동 형상을 의미하는 것이며, 정확한 진동 형태는 헬리컬 스프링 양 끝단의 경계 조건, 끝점의 상대 위치, 등에 따라서 서로 복합적으로 나타날 수 있다.

Fig. 5의 실험 결과로부터 몇 개의 중요한 고유진동수를 확인할 수 있다. 먼저 첫 번째 큰 peak 값은 363.7 Hz에서 나타나며 진폭이 비교적 큰 두 번째

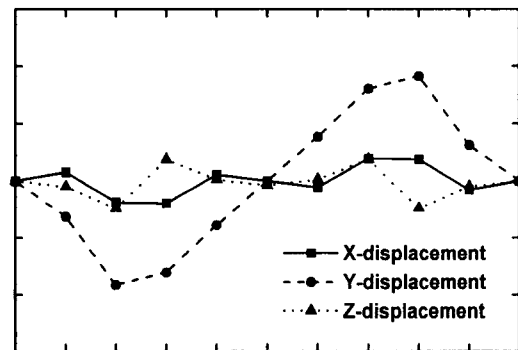


Fig. 10 Fifth mode(704.14 Hz) shape

peak는 690.0 Hz에서 나타난다. 이들 고유진동수는 계산 결과의 1차 진동 모드와 5차 진동 모드의 고유진동수들과 매우 근접한다. 실험에서 가진력을 작용시킨 방향과 가속도를 측정된 방향이 모두 스프링축 방향이기 때문에 종방향 진동 모드만이 크게 가진된 것으로 생각된다. 500 Hz 주위에 있는 두 개의 작은 peak는 부분적으로 가진된 굽힘진동의 영향으로 판단된다. 2차 진동 모드인 비틀림 진동은 본 실험

Table 2 Comparison of longitudinal natural frequencies

	First longitudinal	Second longitudinal
Experiments	363.7 Hz	690.0 Hz
Classical theory (error)	390.7 Hz (7.42%)	
Method presented in this paper (error)	374.1 Hz (2.86%)	704.1 Hz (2.04%)

험에서는 가진될 가능성이 전혀 없으므로 실험 결과에서도 나타나지 않은 것으로 추측된다.

헬리컬 스프링의 종방향 기본 고유진동수는 아래 식과 같이 간단한 이론으로도 계산된다⁽¹⁾.

$$f_0 = \frac{r}{8\pi NR^2} \sqrt{\frac{2G}{\rho}} \quad (42)$$

이 이론으로는 스프링의 비틀림 및 굽힘 진동 모드의 고유진동수 계산이 불가능하기 때문에 종방향 진동수만을 계산했다. Table 2는 본 연구에서 개발한 유한요소법을 이용하여 계산한 고유진동수, 실험적으로 측정된 고유진동수, 식 (42)를 이용하여 계산한 고유진동수를 비교한 것이다. 이 때 사용된 스프링의 사양은 Table 1에 주어졌다. 유한요소법을 이용하여 계산된 고유진동수 값이 실험 결과에 훨씬 더 근접함을 알 수 있다.

본 연구에서 개발한 유한 요소법의 수렴성을 검증하기 위하여 Table 1에 주어진 밸브스프링을 유한 요소 모델의 요소 수를 바꾸어 가며 해석했다. 또한 동일한 문제를 상용 유한요소 프로그램 IDEAS가 제공하는 직선보 및 2차원적 곡선보(curved beam) 요소로 모델링하여 해석했다. 그리고 각각의 방법을 이용하여 계산한 기본 고유진동수 값을 Fig. 11에 비교했다. IDEAS를 이용한 직선보 및 곡선보 모델에서는 스프링의 1회전을 최소한 4개 이상의 요소로 모델링할 때만 해석이 가능했다. 예상대로 직선보 모델에서는 요소의 수가 작을 때는 큰 오차를 나타내며, 스프링 1회전을 수십 개의 요소로 모델링 할 때만 비교적 의미있는 결과를 보여줬다. 곡선보 모델은 1회전을 4개 이상의 요소로 모델링 한다면 비교적 안정된 고유진동수 예측이 가능하지만 헬리컬 스프링의 기하학적 형상을 정확히 표현하지 못하므로 어느 정도의 오차는 불가피했다. 본 연구에서 개발한 헬리컬 유한요소를 이용할 경우 모델의 요소 수를 획기적으로 줄일 수 있다. 스프링의 1회전을 단지 한 개의 요소로 모델링한 경우에도 계산된 기본

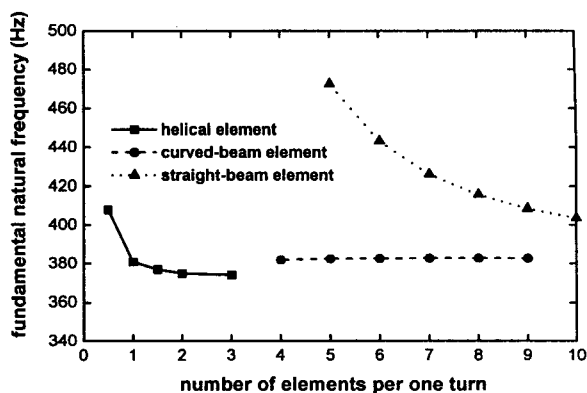


Fig. 11 Convergence of the F. E. M.

고유진동수 값은 요소 수를 증가시키며 계산한 수렴 값에 비하여 오차가 불과 1.6%에 불과했다. 이 점은 헬리컬 스프링의 진동특성이 매우 작은 자유도를 갖는 모델로도 정확히 표현 가능함을 의미한다. 그러므로 본 모델을 스프링을 포함하는 동적계의 시뮬레이션 모델에 적용할 경우, 정확성의 손실 없이도 모델 전체의 자유도를 최소화시킬 수 있다. 자동차 엔진 밸브트레인과 같이 스프링 내부 진동현상이 시스템 전체의 비선형 동적 거동에 중요한 영향을 미치는 경우, 본 연구에서 개발된 모델링 기법은 동특성 시뮬레이션 과정에서 유용하게 사용될 수 있다.

5. 결 론

원통형 스프링의 동적 거동을 해석하기 위한 3차원 헬리컬 로드 유한요소법을 개발했다. 요소행렬은 정하중 상태에서의 스프링 변형곡선을 형상함수로 이용하고 Galerkin 방법을 사용하여 구했다. 질량 및 강성 행렬의 대칭성이 보장되기 때문에 스프링의 동적 거동 해석을 위한 다양한 형태의 효과적인 해석 기법들이 쉽게 적용될 수 있다. 본 연구에서 개발된 방법을 이용하여 자동차 엔진 밸브 스프링의 고유진동수 및 진동 모드 해석을 수행했으며, 고전적 이론 및 실험 결과들과 비교함으로써 제시된 방법의 효용성을 검증했다. 또한 상용 프로그램에서 제공하는 직선보 및 곡선보 요소를 이용하여 모델의 요소 개수를 증가시켜가며 동일한 문제를 해석하고 그 결과를 비교했다. 본 연구에서 개발한 방법이 모델의 요소 개수가 적음에도 불구하고 훨씬 더 빠르게 수렴해 감을 알 수 있었다. 스프링 유효코일 한 개를 한 개의 요소로 모델링 했을 경우에도 기본고유진동수 오차가 1.6% 정도에 불과했다. 그러므로

본 모델을 스프링을 포함하는 동적계의 시뮬레이션 모델에 적용할 경우, 정확성의 손실 없이도 모델 전체의 자유도를 최소화시킬 수 있는 장점이 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 울산대학교 기계부품 및 소재 특성평가 연구센터의 부분적인 지원에 의한 것입니다.

참 고 문 헌

- (1) Wahl, A.M., 1965, "Mechanical Springs," McGraw-Hill.
- (2) Yoshimura, Y., and Murata, Y., 1952, "On the Elastic Waves Propagated along Coil Springs," Institute of Science and Technics Tokyo University, Vol. 6, pp. 27~35.
- (3) Wittrick, W.H., 1966, "On Elastic Wave Propagation in Helical Springs," International Journal of Mechanical Science, Vol. 8, pp. 25~47.
- (4) Pietra, L.D., 1976, "The Dynamic Coupling of Torsional and Flexural Strains in Cylindrical Helical Springs," *Mechanica*, pp. 102~119.
- (5) Guido, A.R., Pietra, L.D., and Valle, S.D., 1978, "Transverse Vibrations of Cylindrical Helical Springs," *Mechanica*, pp. 90~108.
- (6) Mottershead, J.E., 1980, "Finite Elements for Dynamical Analysis of Helical Rods," International Journal of Mechanical Science, No. 22, No. 5-A, pp. 267~283.
- (7) Sawanobori, T., and Fukushima, Y., 1983, "An Finite Element Approach to Dynamic Characteristics of Helical Spring," *Bulletin of JSME*, Vol. 26, No. 221, pp. 2002~2009.
- (8) Pearson, D., and Wittrick, W.H., 1986, "An Exact Solution for the Vibration of Helical Springs Using a Bernoulli-Euler Model," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 28, No. 2, pp. 83~96.
- (9) Lin, Y., and Pisano, A.P., 1990, "Three-Dimensional Dynamic Simulation of Helical Compression Springs," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 529~537.
- (10) Paranjpe, R.S., 1990, "Dynamic Analysis of a Valve Spring with a Coulomb-Friction Damper," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 509~513.
- (11) Philips, P.J., Schamel A.R., and Meyer, J., 1989, "An Efficient Model for Valvetrain and Spring Dynamics," SAE 890619.
- (12) Zou, D., and McCormick, H.E., 1996, "Dynamic Model and Computer Simulation of Valve Train Assemblies with Hydraulic Lash Adjuster," SAE 960351.
- (13) Taylor, A.E. and Mann, W.R., 1983, "Advanced Calculus," John Wiley & Sons, Inc.
- (14) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations," The Macmillan Company.
- (15) Cook, R. D., 1981, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," John Wiley & Sons, Inc.