

## 영역분할에 의한 격자세분화 기법 및 압출공정의 유한요소해석에의 적용

박 근\* · 양동열\*\*

(1999년 1월 27일 접수)

# Mismatching Refinement with Domain Decomposition and Its Application to the Finite Element Analysis of the Extrusion Process

Keun Park and Dong-Yol Yang

### Abstract

The rigid-plastic finite element analysis requires a large amount of computation time due to its non-linearity. For economic computation, mismatching refinement, an efficient domain decomposition method with different mesh density for each subdomain, is developed. A modified velocity alternating scheme for the interface treatment is proposed in order to obtain good convergence and accuracy. As a numerical example, the axisymmetric extrusion process is analyzed. The results are discussed for the various velocity update schemes from the viewpoint of convergence and accuracy. The three-dimensional extrusion process with rectangular section is analyzed in order to verify the effectiveness of the proposed method. Comparing the results with those of the conventional method of full region analysis, the accuracy and the computational efficiency of the proposed method are then discussed.

**Key Words** : Rigid-Plastic Finite Element Method, Mesh Refinement, Domain Decomposition, Extrusion

### 1. 서 론

압출공정은 일정한 단면형상을 갖는 제품의 생산에 가장 경제적인 공정으로서, 초기에는 단순한 형상의 제품 생산에 이용되어 왔으나 근래에 들어서는 복잡한 형상의 제품에까지 적용 범위가 널리 확장되고 있다. 현재까지는 압출공정 및 금형설계는 주로 설계자의 경험과 직관에 의해 이루어지고 있어, 여러가지 금형설계안에 대해 실제 금형

을 제작하고 이를 사용하여 실험을 수행함으로써 설계의 타당성을 검증하기 위해서는 많은 시간과 비용이 소모된다. 이를 효과적으로 절감하기 위해 유한요소해석을 활용한 압출공정의 수치해석이 적용되고 있는데, 3차원 해석의 경우 문제의 자유도가 증가하게 되어 많은 계산시간이 소요되며, 사용 컴퓨터의 용량에도 제한이 따르게 된다.

공학문제의 유한요소해석에 있어서 보다 정확한 해를 빠른 시간에 효율적으로 계산하는 수치기법에 대해 많은

\* 삼성전기(주) 금형개발실  
\*\* 한국과학기술원 기계공학과

연구가 진행되어왔다. 적응적 격자세분화(adaptive mesh refinement) 기법은 이러한 목적을 위해 중요한 영역에 대해 세분화된 격자를 구성함으로써 계산의 정확성과 효율성을 함께 제고하는 방법이다.<sup>(1-8)</sup> 이때 격자세분화를 위해서는 세분화된 영역과 세분화되지 않은 영역간의 연속성이 유지되어야 한다. 삼각형 혹은 사면체 격자를 사용한 경우 연속성을 유지하면서도 효과적인 세분화가 가능하다.<sup>(4-6)</sup> 사각형 혹은 육면체 격자의 경우는 격자 밀도를 효과적으로 조절하는데 많은 어려움이 따른다.

Babuska와 Rheinboldt<sup>(1-3)</sup>는 사각형 격자를 양분(bisectional refinement)하고 그러한 과정에서 발생하는 불규칙 절점(irregular node)에 대한 제약조건을 부과함으로써 세분화를 수행하였다. Choi 등<sup>(7-8)</sup>은 변이요소를 사용하여 불규칙 절점에 의해 야기되는 문제점을 해결하기 위한 방안을 제시하였다. 그러나 3차원 육면체 변이요소의 경우 한 요소가 최대 26개의 절점으로까지 구성되어 밴드폭이 급증하게 되어,<sup>(6)</sup> 많은 계산량이 요구되는 압출공정의 3차원 해석에는 적합하지 못한 것으로 사료된다.

본 연구에서는 보다 효율적인 세분화를 위해 영역분할(domain decomposition)기법을 도입하였다. 영역분할의 기본 개념은 해석 영역을 몇 개의 부영역으로 분할하여 각각의 영역에 대한 해석을 수행하고, 이를 조합함으로써 전체 영역의 해를 효율적으로 구한다는 점이다. 영역분할 기법은 영역을 분할하는 방법과 분할된 영역의 해를 조합하는 방법에 따라 여러가지 기법들이 발표되어 있는데,<sup>(9-13)</sup> 본 연구에서는 부영역간의 반복계산을 통해 해를 수렴시키는 Schwarz의 수식화<sup>(9)</sup>를 기초로 한 분할기법을 사용하도록 하겠다. 또한 이와 연계하여 부영역간의 격자 밀도를 차별화함으로써 세분화의 효율성과 편이성을 향상시키는 격자세분화 기법(mismatching refinement)을 제안하였다. 이때 서로 일치하지 않는 부영역간의 경계지역에서의 반복계산시 오차를 감소시키기 위한 수치적 기법에 대해 검토해보고, 실제 압출공정의 유한요소해석에 적용하여 제안된 기법의 타당성과 효율성을 검증해보도록 하겠다.

## 2. 성형해석을 위한 기본 수식화

### 2.1 강소성 유한요소 수식화

본 연구에서는 강소성 유한요소 수식화<sup>(15)</sup>를 사용하여 압출공정의 성형해석을 수행하였다. 평형방정식은 다음과

같이 주어진다.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}n_j = f_i \text{ on } \Gamma \quad (2)$$

여기서  $n_j$ 는 경계면에서의 단위수직 벡터,  $f_i$ 는 외력을 의미하며,  $\Omega$ 는 해석 영역을,  $\Gamma$ 는 영역  $\Omega$ 의 경계를 의미한다. 한편 강소성 재료에 대해 강제회전과 탄성변형을 무시하면 재료의 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{\lambda} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3)$$

이때  $\sigma'_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ 는 각각 편차응력(deviatoric stress) 및 변형속도(strain rate) 성분을 의미하며,  $\lambda$ 는 von-Mises 항복조건에서 다음과 같다.

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\sigma} \quad (4)$$

여기서

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (5)$$

이다. 위 식들을 사용하여 변분정리를 적용하면 강소성 재료에 대해 다음과 같은 변분방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} d\Omega + K^* \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (6)$$

여기서  $K^*$ 는 비압축성조건을 부과하기 위한 벌칙상수(penalty constant)로 매우 큰 양수이다. 한편 소재와 금형간의 마찰조건은 다음과 같이 표현된다.<sup>(16)</sup>

$$f = -\frac{2}{\pi} mk \tan^{-1} \left( \frac{|V_s|}{u_0} \right) t \quad (7)$$

여기서  $m$ 은 마찰계수,  $k$ 는 해당 접촉점에서의 국부적 전단항복응력(local shear yield stress),  $u_0$ 는  $|V_s|$ 에 비해서 매우 작은 양의 상수값이며,  $V_s$ 는 금형과 재료와의 상대속도의 벡터,  $t$ 는  $V_s$ 방향의 단위 벡터이다.

### 2.2 강소성 유한요소법에서의 오차추정

본 연구에서는 사후오차추정(posteriori error estimation)기법에 의해 강소성 유한요소해석시 발생하는 오차

를 예측하고자 한다. 대부분의 오차추정기법에서는 해석 결과를 엄밀해와 비교하여 오차를 평가하고 있으며, 이때 해석결과를 유연화(smoothing)시켜 엄밀해로 가정하여 사용하고 있다.<sup>(4-5)</sup> 이러한 방법은 격자의 밀도에 따른 오차의 분포를 예측하는 측면으로 볼 수 있는데, 영역분할에 의한 반복계산을 대상으로 하는 본 연구에서는 다소 다른 관점에서 접근해보고자 한다.

영역분할에 의한 반복계산이 수행될 경우 인접 영역간의 경계조건 교환에 따른 오차가 발생하게 된다. 이를 평가하기 위해 본 연구에서는 전체 영역에 대해 세분화된 격자를 사용하여 해석한 결과를 기준으로 오차를 평가하도록 하겠다. 이러한 오차추정에 의해 반복계산의 정확성 및 타당성을 평가할 수 있다. 오차추정은 유동의 속도 및 변형에너지를 기준으로 살펴보도록 하겠다. 임의의 절점에서의 속도의 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$e_u = \frac{\|u - \hat{u}\|}{\|u\|} \equiv \frac{\|u^* - \hat{u}\|}{\|u^*\|} \quad (8)$$

여기서 윗첨자 \* 와 ^는 각각 전체 영역에 대한 해석결과 및 반복계산에 의한 해석결과를 의미한다. 한편 강소성 유한요소 수식화에서 변형에너지의 norm 및 오차는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\|U\| = \left[ \int_{\Omega} \sigma'^T : \dot{\epsilon} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\|E\| = \left[ \int_{\Omega} (\sigma' - \hat{\sigma}')^T : (\dot{\epsilon} - \hat{\dot{\epsilon}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

이때 식 (3)의 구성방정식을 식 (10)에 대입하면 변형에너지는 다음과 같이 응력이나 변형율 중의 하나의 성분으로 표현될 수 있다.<sup>(17)</sup>

$$\begin{aligned} \|E\| &= \left[ \int_{\Omega} \lambda (\sigma' - \hat{\sigma}')^T : (\sigma' - \hat{\sigma}') d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} (\dot{\epsilon} - \hat{\dot{\epsilon}})^T : (\dot{\epsilon} - \hat{\dot{\epsilon}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

본 연구에서는 이중 변형율을 사용하여 변형에너지 오차를 수식화하였으며, 식 (8)과 같이 세분화된 격자를 사용한 전체 영역의 해석결과를 엄밀해로 가정하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\|E\| \equiv \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} (\dot{\epsilon}^* - \hat{\dot{\epsilon}})^T : (\dot{\epsilon}^* - \hat{\dot{\epsilon}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

이때 변형에너지의 오차추정치는 다음과 같이 변형에너지와 변형에너지의 오차간의 비로서 정의될 수 있다.

$$e_E = \frac{\|E\|}{\|U\|} \quad (13)$$

### 3. 영역분할에 의한 격자세분화 기법

#### 3.1 영역분할에 의한 반복계산

식 (6)에 의해 표현된 변분식을 영역  $\Omega$ 에 대해서 강소성 유한요소 수식화에 의해 이산화하면 다음과 같은 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$Ku = f, \text{ in } \Omega \quad (14)$$

$$u = g, \text{ on } \Gamma \quad (15)$$

여기서  $K$ 와  $f$ 는 각각 요소강성행렬(stiffness matrix)과 하중벡터(load vector)를,  $\Gamma$ 는 영역  $\Omega$ 의 경계를 의미한다. 이때 영역  $\Omega$ 를 Fig. 1과 같이  $\Omega_1$ 와  $\Omega_2$ 의 2개의 부영역(subdomain)으로 분할할 수 있다. 분할된 2개의 부영역에 대해 Schwarz의 반복계산 수식화(Schwarz's alternating procedure)를 도입하면 부영역  $\Omega_1$ 에 대해 식 (14)와 (15)는 다음과 같이 표현된다.<sup>(9)</sup>

$$K_1 u_1^{(k)} = f_1, \text{ in } \Omega_1 \quad (16)$$

$$u_1^{(k)} = g, \text{ on } \Gamma \quad (17)$$

$$u_1^{(k)} = u_2^{(k-1)}, \text{ on } \Gamma_1 - \Gamma \quad (18)$$

이때 아랫첨자 1과 2는 각각 부영역 번호를, 윗첨자  $(k)$ 는 현재의 축차횟수(iteration step)를 의미한다. 식 (18)은 부영역간의 경계영역에의 속도의 연속조건을 의미하며, 반복계산의 수렴성을 높이기 위해 다음과 같이 경계영역의 수직방향  $n$ 에 대해서 속도의 1차 미분항(normal derivative)의 연속조건을 추가적으로 부과할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n} = \frac{\partial u_2^{(k-1)}}{\partial n}, \text{ on } \Gamma_1 - \Gamma \quad (19)$$

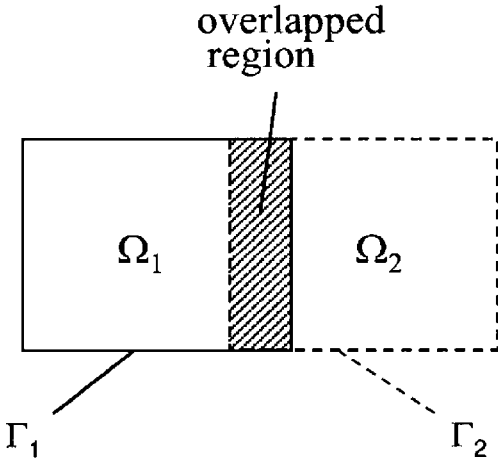


Fig. 1 Schematic description of domain decomposition

부영역  $\Omega_2$ 에 대해서도 마찬가지로 다음과 같은 수식화를 유도할 수 있다.

$$K_2 u_2^{(k)} = f_2, \text{ in } \Omega_2 \quad (20)$$

$$u_2^{(k)} = g, \text{ on } \Gamma \quad (21)$$

$$u_2^{(k)} = u_1^{(k)}, \text{ on } \Gamma_2 - \Gamma \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial n} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial n}, \text{ on } \Gamma_2 - \Gamma \quad (23)$$

이와 같이 중복된 영역에서의 속도성분은 인접 영역에서의 계산결과를 반영하여 단계적으로 수정되며, 이러한 반복계산은 다음의 수렴 판별조건이 만족되어질 때까지 계속적으로 수행된다.

$$e^{(k)} = \frac{\|u^{(k)} - u^{(k-1)}\|}{\|u^{(k)}\|} \leq \delta \quad (24)$$

여기서  $e^{(k)}$ 는  $k$ 번째 해석단계(step)에서의 오차를 의미하며,  $\delta$ 는 매우 작은 양수로 본 연구에서는  $10^{-5}$ 를 사용하였다.

### 3.2 영역분할에 의한 격자세분화 기법

영역분할에 의한 격자세분화의 기본 개념은 해석 영역을 분할하고, 분할된 영역에 대해 격자밀도를 차별화하여

격자를 구성한다는 점이다. 즉, 중요한 영역에 대해서는 격자의 밀도를 높여주고, 반복계산을 통해 타 영역과의 연속성을 유지함으로써 효율적인 격자세분화가 가능해진다는 장점이 있다. 그러나 부영역간의 경계지역에서 절점이 일치되지 않아 직접적인 속도천이가 어려워지는 문제가 발생하는데, 이를 위해 중복된 영역에서 세분화된 부영역(fine subdomain)과 세분화되지 않은 부영역(coarse subdomain)간의 연계를 위해 다음과 같은 2개의 투사연산자(projection operator)를 도입하였다.

$$P: \mathfrak{R}^{n'} \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad (25)$$

$$Q: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n'} \quad (26)$$

여기서  $n_f$ 와  $n_c$ 는 각각 중복영역 내에서의 세분화된 부영역과 세분화되지 않은 부영역의 자유도 수를 의미한다. 즉  $P$ 는 세분화되지 않은 부영역에서의 계산결과에 대해 세분화된 영역으로의 투사연산을,  $Q$ 는 역방향의 연산을 수행해주게 된다.

위와 같은 투사연산을 도입하면 식 (18), (19), (22), (23)으로 대변되는 Schwarz의 반복계산 수식화는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_c^{(k)} = Q^{(k-1)} u_f^{(k-1)}, \text{ on } \Gamma_c - \Gamma \quad (27)$$

$$\frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial n} = Q^{(k-1)} \frac{\partial u_f^{(k-1)}}{\partial n}, \text{ on } \Gamma_c - \Gamma \quad (28)$$

$$u_f^{(k)} = P^{(k)} u_c^{(k)}, \text{ on } \Gamma_f - \Gamma \quad (29)$$

$$\frac{\partial u_f^{(k)}}{\partial n} = P^{(k)} \frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial n}, \text{ on } \Gamma_f - \Gamma \quad (30)$$

여기서 아랫첨자  $c$ 는 세분화되지 않은(coarse) 부영역에서의 물리량을,  $f$ 는 세분화된(fine) 부영역에서의 물리량을 의미한다.

Schwarz의 수식화는 반복계산의 수렴성이 증명되어 있으나,<sup>(10)</sup> 위와 같은 영역분할에 의한 격자세분화를 적용하기 위해서는 반복계산 과정이 수정되어야 한다. 예를 들어  $e_c^{(k)}$ 와  $e_f^{(k)}$ 를 각각 세분화되지 않은 부영역과 세분화된 부영역에서의 오차추정치라 정의해보자(식 (8) 참조). 이때 세분화된 영역의 계산결과가 더 정확하므로, 즉  $e_f^{(k)}$ 가  $e_c^{(k)}$

보다 작기 때문에 식 (27)과 (28)로 대변되는 세분화된 영역으로부터 세분화되지 않은 영역으로의 속도천이과정 (velocity alternating procedure)은 수렴성이 보장된다. 그러나  $e_c^{(k)}$  가 항상  $e_f^{(k-1)}$  보다 작다는 보장이 없기 때문에 식 (29)와 (30)로 표현되는 역천이과정은 수렴성이 보장되지 않는다.

본 연구에서는 이러한 관점에서 부영역간의 격자밀도의 차이를 고려한 수정된 속도천이과정을 제안하였다. 기본 개념은 속도 천이시 인접 부영역에서의 속도만을 고려하는 것이 아니라 해당 부영역에서의 이전단계의 계산결과 까지 함께 고려해줌으로써 그만큼 세분화된 영역의 해석 결과를 속도천이과정에 반영한다는 점이다. 수정된 속도 천이과정의 수식화는 다음과 같이 요약된다.

$$u_c^{(k)} = \alpha^{(k)} Q^{(k-1)} u_f^{(k-1)} + (1 - \alpha^{(k)}) u_c^{(k-1)}, \text{ on } \Gamma_c - \Gamma \quad (31)$$

$$\frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial n} = \alpha^{(k)} Q^{(k-1)} \frac{\partial u_f^{(k-1)}}{\partial n} + (1 - \alpha^{(k)}) \frac{\partial u_c^{(k-1)}}{\partial n}, \text{ on } \Gamma_c - \Gamma \quad (32)$$

$$u_f^{(k)} = \beta^{(k)} P^{(k)} u_c^{(k)} + (1 - \beta^{(k)}) u_f^{(k-1)}, \text{ on } \Gamma_f - \Gamma \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_f^{(k)}}{\partial n} = \beta^{(k)} P^{(k)} \frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial n} + (1 - \beta^{(k)}) \frac{\partial u_f^{(k-1)}}{\partial n}, \text{ on } \Gamma_f - \Gamma \quad (34)$$

여기서  $\alpha$  와  $\beta$  는 세분화된 부영역의 해석결과를 고려하기 위한 가중치(weight factor)로서 0과 1 사이의 값이다. 이는 반복계산의 수렴성을 고려하기 위해 다음과 같이 수렴속도(rate of convergence)  $\eta$  의 함수로써 표현된다.

$$\alpha^{(k)} = C[\eta_c^{(k)}]^m, \text{ on } \Gamma_c - \Gamma \quad (35)$$

$$\beta^{(k)} = C[\eta_f^{(k)}]^m, \text{ on } \Gamma_f - \Gamma \quad (36)$$

본 연구에서  $C$  값과  $m$  값으로는 각각 1.0과 0.5를 사용하였다. 한편  $k$  번째 단계에서의 수렴속도  $\eta$  는 다음과 같이 정의된다.

$$\eta_i^{(k)} = \frac{\|e_i^{(k)}\|}{\|e_i^{(k-1)}\|}, \text{ in } \Omega_c \cap \Omega_f \quad (37)$$

해가 수렴해감에 따라 수렴속도는 변화하게 되고, 결과

적으로 가중치  $\alpha$  와  $\beta$  도 해의 수렴정도를 반영하여 변화된다. 이러한 과정에서 부영역간의 속도천이 과정에서 세분화된 부영역의 가중치를 높임으로써 결과적으로 해의 정확도 및 수렴성이 향상되게 된다. 다음 장에서 실제 예제를 통해 전술한 2가지 속도천이기법의 차이를 비교해보도록 하겠다

#### 4. 압출공정의 유한요소해석에의 적용

##### 4.1 축대칭 압출공정의 유한요소해석

###### 4.1.1 속도천이기법의 비교

제안된 속도천이기법의 타당성을 검증하기 위해 영역 분할에 의한 격자세분화를 적용하여 축대칭 압출공정의 유한요소해석을 수행해보았다. Fig. 2에 계산의 효율성을 비교해보기 위한 3가지 격자구조를 도시하였다. 해석은 정상상태로 수행하였으며, 400℃ 에서의 등온상태로 가정하였다. 여기서 상대적으로 해석의 중요성이 떨어지는 부영역 1에 대해서는 143개의 절점과 120개의 요소로 구성하여 낮은 격자밀도를 유지한 반면(Fig. 2-(b)), 급격한 유동의 변화가 예상되는 부영역 2에 대해서는 155개의 절점과 120개의 요소로 구성하여 격자세분화를 수행해주었다(Fig. 2-(c)). 이와 같이 부영역간의 반복계산을 통해 얻어진 계산결과를 전체 영역에 대해 세분화된 격자구조로 해석을 수행한 결과와 비교하였다. 이때 전체 영역에 대해서 총 575개의 절점과 520개의 요소로 구성된 세분화된 격자를 사용하였다(Fig. 2-(a)).

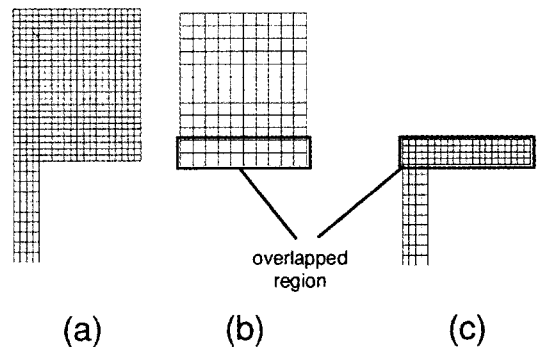
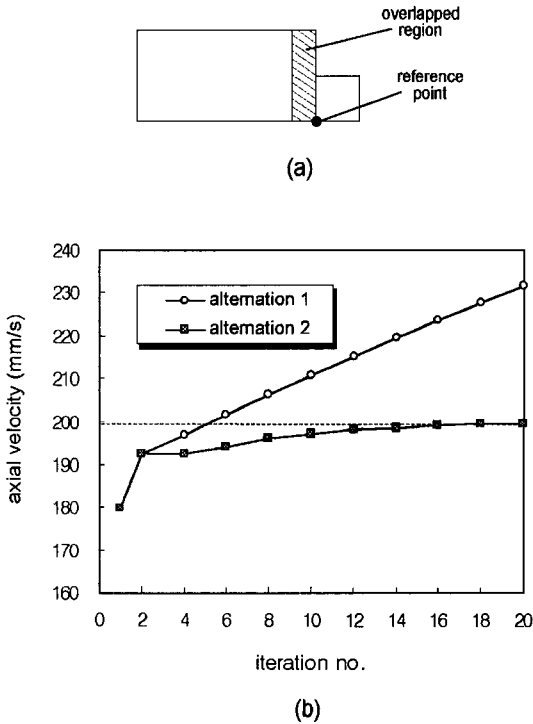


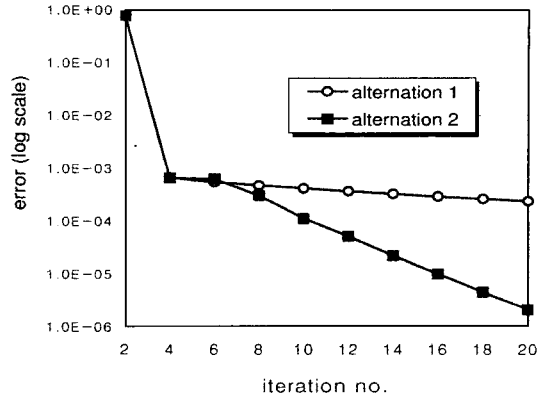
Fig. 2 Basic concept of mismatching refinement :

- (a) full mesh ;
- (b) mesh for subdomain 1 ;
- (c) mesh for subdomain 2



**Fig. 3 Axial velocity components at the reference point :**  
 (a) position of the reference point ;  
 (b) axial velocity components w. r. t. the no. of iterations

제안된 속도천이기법(식 (31)-(34))과 전술한 Schwarz의 수식화를 기본으로 한 속도천이기법(식 (26)-(30))의 정량적인 비교를 위해 각각의 경우에 대해 영역간의 반복계산이 진행됨에 따른 출구부의 축방향 속도성분의 변화를 Fig. 3에 비교하였다. 이때 속도의 기준점은 Fig. 3의 (a)에 도시한 바와 같이 속도의 급격한 변화가 발생하는 출구부 중심점을 선택하였으며, Fig. 3의 (b)에서 점선으로 표시한 부분은 전체 영역에 대한 해석 결과를 의미한다. 이와의 상대비교를 통해 해석의 정확성 여부를 평가해보면, 수정된 속도천이기법을 사용한 경우 기존의 수식화를 사용한 경우보다 정확한 결과가 얻어짐을 알 수 있다. 한편 반복계산의 수렴성을 비교하기 위해 Fig. 4에 식 (8)과 같이 정의된 오차추정치(ε)의 변화를 축차 횟수에 따라 도시하였다. 이때 수정된 속도천이기법을 사용한 경우 수렴성 측면에서도 우수한 결과를 보여 해석의 안정성 역시 향상됨을 알 수 있다.

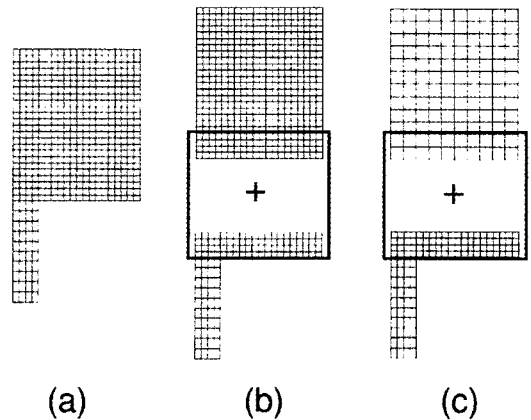


**Fig. 4 Variation of error measures**

#### 4.1.2 격자세분화의 정확도 및 효율성 고찰

한편 영역분할에 의한 격자세분화를 적용하였을 경우 계산시간을 비교해보기 위해 Fig. 5와 같은 3개의 격자구조에 대해 해석을 수행하였다. Fig. 5의 (a)는 전체 영역에 대해 격자를 구성한 경우, (b)는 단순히 2개의 부영역으로 영역을 분할한 경우인 반면 (c)는 격자세분화까지 적용한 경우이다. 램(ram)의 이동속도는 10 mm/sec로 설정하였고, 마찰계수는 0.3으로 가정하였다. 이때 부영역간의 반복계산 과정에서는 수정된 속도천이기법을 사용하였다.

각각의 경우에 대해 기준점에서의 속도 및 경계부분의



**Fig. 5 Mesh systems for axisymmetric extrusion :**  
 (a) mesh 1 ;  
 (b) mesh 2 ;  
 (c) mesh 3

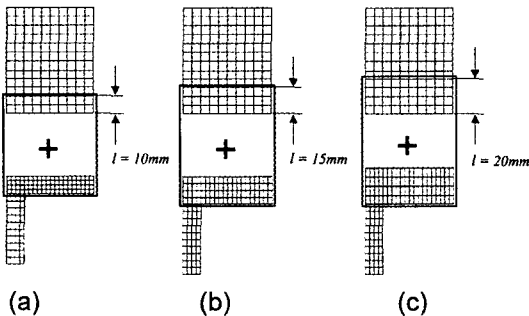
**Table 1 Comparison of results for axisymmetric extrusion**

Mesh	Subdomain	No. of nodes	Velocity error (%)	Energy error (%)	No. of iterations	Elapsed time (sec)	Speed-up ratio
1	-	575	-	-	-	218.2	1.00
2	1	525	0.39	0.90	4	151.7	1.43
	2	155					
3	1	143	1.96	1.24	18	82.9	2.62
	2	155					

중복영역에서의 변형에너지의 오차척도값을 Table 1에 비교하였다. Mesh 2의 경우 모든 오차추정치가 1% 이내의 값을 보인 반면, Mesh 3의 경우 오차가 다소 증가함을 확인할 수 있었다. 한편 전체영역(Mesh 1)의 해석시간에 대한 속도향상을(speed-up ratio)을 비교해보면 Mesh 2의 경우 1.43배의 향상을 보인 반면, Mesh 3의 경우 2.62 배의 속도향상을 보여 계산의 효율성이 증대됨을 알 수 있다.

**4.2 부영역간 중복영역의 영향 고찰**

본 절에서는 영역분할에 의한 반복계산에서 중복영역(overlapped region)의 선정이 해석결과에 미치는 영향을 살펴보고자 하였다. 이를 위해 부영역간의 반복계산에 있어서 여러가지 중복영역의 길이에 따른 해석의 정확성 및 수렴성의 변화를 고찰하였다. Fig. 6에 중복영역의 길이( $l$ )를 달리한 3가지 격자구조를 도시하였다. 각각의 격자구조는 부영역 1에 대해서는 모두 같은 구조의 격자구조를 가지고 있으나, 부영역 2에 대한 중복영역의 길이를 각각 10 mm, 15 mm, 20 mm 로 변화시켜 격자를 구성한 경우이다. 이때 속도천이기법 및 각종 공정변수는 앞절에서와 동일하게 선정하였다.



**Fig. 6 Mesh systems for various length of overlapped region :**  
 (a)  $l=10\text{mm}$  ;  
 (b)  $l=15\text{mm}$  ;  
 (c)  $l=20\text{mm}$

**Table 2 Comparison of results for various length of overlapped region**

$l$ (mm)	10.0	15.0	20.0
No. of iterations	18	12	10
Velocity error (%)	1.96	1.89	2.03
Elapsed time (sec)	82.9	62.2	49.4
Speed-up ratio	2.62	3.51	4.42

Table 2에 각각의 경우에 대한 해석결과를 도시하였다. 이때 부영역간의 반복계산의 수렴조건은  $10^{-5}$ 로 설정하였고, 해석오차 및 속도향상률은 앞절에서의 전체 영역에 대해 세분화를 수행한 경우의 해석결과와 비교하였다.  $l=15\text{mm}$ 인 경우와  $l=20\text{mm}$ 인 경우 모두  $l=10\text{mm}$ 일 때보다 수렴성이 좋았고, 그에 따른 계산속도도 향상되었다. 두가지 경우 모두 해석의 정밀도 역시 향상되었음을 알 수 있다. Fig. 7에  $l$ 의 변화에 따른 반복계산의 수렴성을 비교하였는데,  $l$ 값이 클수록 수렴성이 좋아지는 반면 그러한 경향에는 차이가 있음을 알 수 있다. 즉  $l=10\text{mm}$ 에서  $l=15\text{mm}$ 으로 변화시켰을 때는 수렴성의 향상이 두드러진 반면  $l=15\text{mm}$ 인 경우와  $l=20\text{mm}$ 인 경우는 거의 비슷한 경향을 보임을 알 수 있다.

이러한 차이점의 원인을 고찰하기 위해 Fig. 8의 (b)에 중심선에서의 축방향 속도성분을 편치에서의 거리에 따라 비교하였다. 또한 이해를 돕기 위해 Fig. 8의 (a)에 편치에서부터의 거리의 정의를 그림으로 도시하였다. 그림에서 부영역 1의 해석결과는 초기의 계산결과를 의미한다.

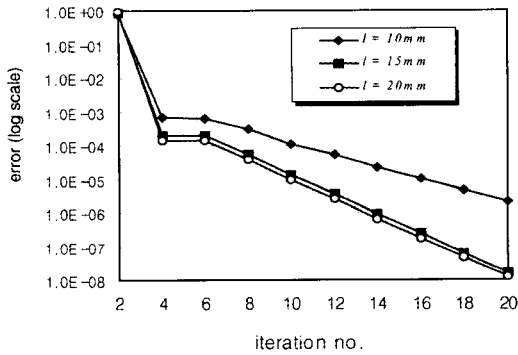


Fig. 7 Convergence status with the variation of  $l$

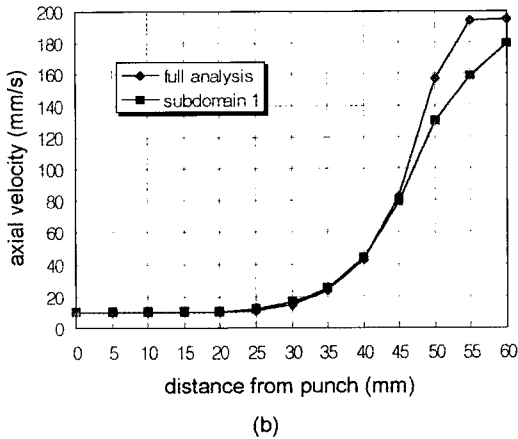
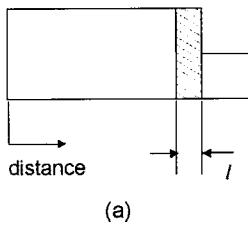


Fig. 8 Axial velocity component along the centerline :  
(a) definition of  $l$  and distance ;  
(b) variation of axial velocity component

부영역 1의 해석결과를 보면 펀치로부터의 거리가 45 mm(즉  $l=15\text{ mm}$ )일 때까지는 전체 영역에 대한 해석결과와 거의 일치하고 있으나, 그 이후로는 오차가 점점 증가함을 알 수 있다. 이러한 오차는 해당 부분에서의 속도의 급격한 증가에 기인하며, 결과적으로 전술한 수렴성의 차이를 야기시키는 것으로 보여진다. 따라서 영역분할시

수렴성에 미치는 영향을 고려하여 부영역 1의 해석결과를 참조하여 속도구배가 크지 않은 범위 내에서 부영역간의 중복영역을 설정해주어야 한다.

#### 4.3 사각형 단면 압출공정의 3차원 유한요소해석

영역분할에 의한 격자세분화를 적용한 계산시간 절감의 효과를 극대화하기 위해 계산시간이 많이 소요되는 3차원 압출공정의 유한요소해석에 적용해보도록 하겠다. 본 절에서는 Fig. 9에 도시된 사각형 단면의 압출공정을 해석해보도록 하겠다. 램의 이동 속도는 10 mm/sec, 마찰계수는 0.3으로 가정하였다.

해석은 Fig. 10과 같은 3가지 격자구조에 대해 수행되었으며, 400°C에서의 정상상태 등온조건으로 가정하였다. Fig. 10의 (a)는 전체 영역에 대해 격자를 구성한 경우, (b)는 단순히 2개의 부영역으로 영역을 분할한 경우

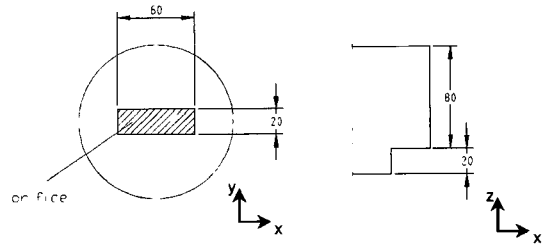


Fig. 9 Three-dimensional extrusion process with a rectangular section

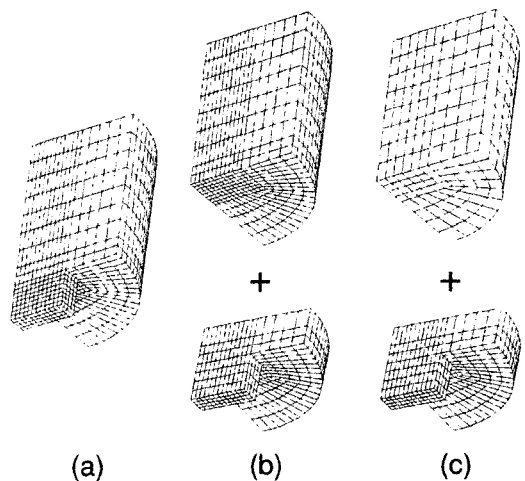


Fig. 10 Mesh systems for the rectangular section extrusion :  
(a) mesh 1 ;  
(b) mesh 2 ;  
(c) mesh 3



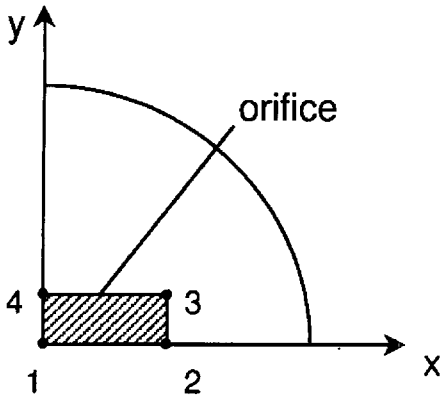


Fig. 11 Position of four reference points

Table 3 Comparison of velocity components and error measures

Reference point		Mesh 1	Mesh 2	Mesh 3
1	Velocity (mm/sec)	158.64	160.62	160.61
	Error (%)	-	1.24	1.24
2	Velocity (mm/sec)	153.43	153.96	154.51
	Error (%)	-	0.35	0.70
3	Velocity (mm/sec)	135.94	133.41	134.10
	Error (%)	-	1.89	1.35
4	Velocity (mm/sec)	145.57	144.73	144.97
	Error (%)	-	0.58	0.41
Energy error (%)		-	0.69	0.91

인 반면 (c)는 격자세분화까지 적용한 경우이다. 해석은 HP C-916 워크스테이션을 사용하여 수행되었다. 해석결과와 정확성을 평가하기 위해 Fig. 11에 도시한 4개의 기준점에서의 속도 및 중박영역에서의 변형에너지의 오차값을 Table 3에 비교하였다. 오차값은 Mesh 2와 Mesh 3의 경우 모두 1% 내외의 분포를 보여 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었다고 판단된다.

한편 Table 4에 각각의 경우에 대한 해석 조건 및 계산시간을 비교하였다. Mesh 1의 계산시간을 기준으로 하였을 Mesh 2의 경우 6배, Mesh 3의 경우 20배 정도의 속도향상을 보임을 알 수 있다. 즉 영역분할에 의한 격자세분화를 적용하였을 경우, 일차적으로 영역분

Table 4 Comparison of problem size and performance

Mesh	Subdomain	No. of nodes	No. of elements	No. of iterations	Elapsed time (hour : min)	Speed-up ratio
1	-	2740	2148	-	37 : 13	1.00
2	1	2220	1764	4	6 : 04	6.13
	2	1186	776			
3	1	711	512	8	1 : 53	19.76
	2	1186	776			

할에 따른 자유도의 감소효과뿐 아니라 동시에 격자밀도의 효과적인 조절이 이루어짐으로써 계산의 효율성이 획기적으로 증대됨을 알 수 있다. 이러한 특성은 복잡한 단면형상의 경우, 특히 압출비가 매우 높은 단면형상의 압출공정의 해석에 유리하게 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

### 5. 결론

이상으로 본 연구에서는 압출공정의 유한요소해석을 보다 경제적으로 수행할 수 있도록 영역분할에 의한 격자세분화 기법을 도입하였고, 분할된 부영역간에 서로 다른 격자밀도로 격자를 구성하여 보다 효율적인 격자를 구성할 수 있도록 하였다. 이러한 내용은 다음과 같이 요약될 수 있다.

(1) Schwarz의 반복계산 수식화를 기본으로 세분화된 영역분할에 적합하도록 수정된 부영역간의 속도천이 기법을 제안하여 해석의 안정성 및 해의 정확성을 검증하였다.

(2) 제안된 기법을 축대칭 압출공정의 유한요소해석에 적용하여 해의 정확성 및 속도향상을, 중박영역의 영향 등을 고찰하였다.

(3) 제안된 기법을 사용하여 사각단면의 압출공정의 3차원 유한요소해석을 수행함으로써 기존의 해석기법에 비해 계산시간을 획기적으로 절감할 수 있음을 확인하였다.

영역분할에 의한 격자세분화 기법은 해석 영역의 크기를 줄임으로써 계산량을 감소시킬 뿐 아니라, 분할된 영역에 대한 계산의 독립성을 확보함으로써 병렬 계산에도 적용이 가능하다는 장점이 있다. 차후에는 이러한 장점을 활용하여 두께가 얇은 단면재의 압출이나 중공형 압출공정 등 많은 계산시간이 요구되는 문제에도 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 후 기

본 연구는 고속전철 기술개발사업인 “고강도 알루미늄형강재 압출기술개발” 과제의 일환으로 (주)동양강철의 지원을 받아 수행된 것으로서 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) I. Babuska and W. C. Rheinboldt, 1978, “Error estimates for adaptive finite element method computation”, *SIAM J. of Numerical Analysis*, Vol. 15, pp. 736~754.
- (2) I. Babuska and W. C. Rheinboldt, 1978, “A posteriori error estimates for the finite element analysis”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 12, pp. 1597~1625.
- (3) W. C. Rheinboldt, 1981, “Adaptive mesh refinement processes for finite element solutions”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 649~662.
- (4) O. C. Zienkiewicz, and J. Z. Zhu, 1987, “A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 337~357.
- (5) O. C. Zienkiewicz, Y. C. Liu and G. C. Huang, 1988, “Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 25, pp. 23~42.
- (6) C. K. Lee and S. H. Lo, 1992, “An automatic adaptive refinement finite element procedure for 2d elastostatic analysis”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 35, pp. 1967~1989.
- (7) C. K. Choi and Y. M. Park, 1992, “An adaptive h-refinement using transition element for plate bending problems”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 35, 145~163.
- (8) C. K. Choi and N. H. Lee, 1993, “Three dimensional transition solid elements for adaptive mesh gradation”, *Structural Engng. and Mechanics*, Vol. 1, pp. 61~74.
- (9) H. A. Schwarz, 1870, “Über enen grenz bergang durich alternirender verfahren”, *Ges. Math. Abhandlungen*, Bd. 1, Berlin, pp. 133~143.
- (10) S. Sobolev, 1936, “L'Algorithm de Schwarz dans la Theorie de l'Elasticite”, *Compte Rendus de l'Accidemie des Sciences de L'URSS*, Vol. IV, pp. 243~246.
- (11) G. Rodrigue and S. Shah, 1989, “Pseudo-boundary conditions to accelerate parallel Schwarz methods”, in G. F. Carey (eds.), *Parallel supercomputing: method, algorithm and applications*, Wiley, New York, pp. 77~88.
- (12) C. Farhat and E. Wilson, 1987, “A new finite element concurrent computer program architecture”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 1771~1792.
- (13) M. Dryja, and O. Widlund, 1992, “Additive Schwarz methods for elliptic finite element problems in three-dimensions”, in Chan, T.F. Keyes, D.E. Meurant, G.A. Scroggs, J.S. and Voight, R.G. (Ed.), *Proc. 5th Conf. Domain Decomposition Meths. for Partial Differential Equations*, Soc. Indust. Appl. Math., Philadelphia.
- (14) I. St. Doltsinis and S. Nöling, 1991, “Generation and decomposition of finite element models for parallel computations”, *Comp. Systems in Engng.*, Vol. 2, pp. 427~449.
- (15) C. H. Lee and S. Kobayashi, 1973, “New solution to rigid plastic deformation using a matrix method”, *ASME, J. of Engng. for Indust.*, Vol. 95, pp. 865~873.
- (16) C. C. Chen and S. Kobayashi, 1978, “Rigid-plastic finite element analysis of ring compression”, *ASME, AMD*, Vol. 28, pp. 163~174.
- (17) 박 근, 양동열, 1998, “강소성 유한요소해석에서의 사후오차추정 및 적응적 격자세분화에의 적용”, *대한기계학회논문집 (A)*, 제22권, pp. 1278~1586.