

운동파 이론의 충격파 처리기법

Shock-Fitting in Kinematic Wave Modeling

박 문 형* / 최 성 옥** / 허 준 행*** / 조 원 철****

Park, Moon Hyeong / Choi, Sung Uk / Heo, Jun Haeng / Cho, Won Cheol

Abstract

The finite difference method and the method of characteristics are frequently used for the numerical analysis of kinematic wave model. Truncation errors cause the peak discharge dissipated in the solution from the finite difference method. The peak discharge is conserved in the solution from the method of characteristics, however, the shock may deteriorates the numerical solution. In this paper, distinctive features of each scheme are investigated for the numerical analysis of kinematic wave model, and applicability of shock fitting algorithm such as Propagating Shock Fitting and Approximated Shock Fitting methods are studied. Propagating Shock Fitting method appears to treat shock properly, however, it failed to fit the shock appropriately when applied to a sudden inflow change in a long river. Approximate Shock Sitting method, which uses finer elements, is found to be more proper shock-fitting than the Propagating Shock Fitting method. Comparisons are made between two solution from the kinematic wave theory with shock fitting and full dynamic wave theory, and the results are discussed.

Keywords: kinematic wave theory, shock fitting, method of characteristic, propagating shock fitting, approximated shock fitting

요 지

운동파 이론의 수치해석에는 유한차분법과 특성곡선법이 주로 사용된다. 유한차분법의 경우 지배방정식의 차분과정에서 발생하는 절단오차에 의하여 침투유량의 감쇠가 발생한다. 특성곡선법의 경우 침투유량은 양호하게 보존되지만, 수치해석 과정에서 발생하는 충격파를 적절하게 고려하지 못한다. 본 연구에서는 운동파 이론에 근거한 각각의 수치해석 기법의 특성을 살펴보고, 특성곡선법으로 수치해석할 때 발생하는 충격파의 수치처리기법인 Propagating Shock Fitting 기법과 Approximate Shock Fitting 기법에 대하여 적용성을 파악하였다. Propagating Shock Fitting 기법은 충격파를 양호하게 처리하였으나 유로연장이 긴 하천에서 유량이 급변하는 경우 적절하게 충격파를 처리하지 못하였다. Propagating Shock Fitting 기법을 반복하여 계산하는 Approximate Shock Fitting 기법은 이러한 경우에 발생하는 충격파를 적절히 처리하는 것을 확인할 수 있었다. 충격파 처리기법에 의한 운동파 이론의 계산결과와 완전동력학과 이론에 의한 결과도 비교하고 토의하였다.

핵심용어 : 운동파 이론, 충격파 처리기법, 특성곡선법, propagating shock fitting, approximated shock fitting

- * 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정
Doctoral Student, Department of Civil Engineering, Graduate School, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea
- ** 연세대학교 사회환경·건축공학부 조교수
Assistant Professor, School of Civil, Urban, and Architectural Engineering, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea
- *** 연세대학교 사회환경·건축공학부 부교수
Associate Professor, School of Civil, Urban, and Architectural Engineering, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea
- **** 연세대학교 사회환경·건축공학부 교수
Professor, School of Civil, Urban, and Architectural Engineering, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea

1. 서 론

개수로에서 일차원 흐름을 해석하기 위한 모형은 Saint-Venant 방정식으로 불리는 완전동력학과(full dynamic wave) 이론에 근거하며, 운동량방정식의 적용 범위에 따라 준정상류(quasi-steady) 이론, 비관성(non-inertia) 이론, 그리고 운동파(kinematic wave) 이론으로 구분할 수 있다. 완전동력학과 이론을 해석적으로 해결할 수 있는 방법은 현재까지도 개발된 바 없으며, 앞에 언급한 근사기법이 계산상의 편리함으로 인하여 많이 사용되고 있다. 또한 완전동력학과 이론은 두 개의 경계조건을 필요로 하는데, 이것은 하류단 경계조건이 주어져 있는 문제에서는 장점으로 작용하지만, 하류단에 대한 정보가 없는 경우에는 임의로 가정하여 경계조건을 부여해야 하므로 또 다른 계산오차를 유발할 수 있다. 운동량방정식에서 시간에 대한 미분항인 국부가속도를 무시할 경우 이를 준정상류모형이라 하며, 이 방법은 비관성 이론에 비하여 정도가 낮은 것으로 알려져 있다. 운동량방정식에서 국부가속도와 이송가속도를 동시에 무시하는 비관성 이론은 계산절차와 정도에 있어서 매우 유용한 방법이며 특히 천이류(상류에서 사류로 혹은 반대로 변하는 흐름)의 해석에 수학적인 어려움을 야기시키지 않고 사용될 수 있다(Yen, 1996). 운동파 이론은 운동량방정식에서 하상경사와 마찰경사만을 고려하므로 방정식이 간단하며 이에 따른 해석방법도 매우 간편하다. 운동파 이론은 하나의 경계조건만을 필요로 하며 확산항을 포함하지 않아 침투유량의 감쇠는 모의할 수 없다.

운동파 이론의 수치해석 기법으로는 비선형 유한차분법(Li 등, 1975; Chow 등, 1988)과 특성곡선법이 많이 사용되고 있다. 특성곡선법은 침투값의 보존에 있어서는 탁월하나 시간 혹은 공간격자의 선정에 있어서 유연성이 떨어진다. 반면에 계산상에 유연성이 있는 유한차분법은 수치오차로 인하여 침투값이 보존되지 않는 문제가 있다. 그림 1은 연장이 5,000 m 인 하도에 그림에서 주어진 유량이 상류단에 유입될 경우, 운동파 이론과 완전동력학과 이론에 의한 하류단에서의 유출수문곡선을 비교한 것이다. 계산에서 사용된 Manning의 조도계수는 0.035이고 하상 경사는 0.004이다. 운동파 이론의 수치해석을 위하여 특성곡선법과 비선형 유한차분법을 각각 사용하였으며, 완전동력학과 이론의 해석을 위해서 Preissmann 기법을 사용하였다. 그림에서 특성곡선법에 의한 계산결과는 홍수파의 침투값

이 보존되며 하류로 진행되는 것을 볼 수 있다. 특이한 것은 비선형 유한차분법에 의한 운동파 해석결과와 완전동력학과 이론에 의한 결과가 매우 유사하다는 것이다. 그러나 운동파 이론에서 계산된 침투유량의 감쇠는 차분기법에 의한 오차로서 자연현상과는 무관하며 적용기법에 따라 오차의 범위가 다르므로, 완전동력학과 이론에 의한 침투값의 감쇠와는 확실히 구별되어야 한다. 따라서 특성곡선법에 의한 해가 운동파 이론의 특징을 더 잘 나타낸다고 할 수 있다. 그러나 운동파 이론을 수치해석하는 과정에서 유량 및 하도의 지형학적 변화에 의해 충격파가 발생할 수 있는데, 일반적인 특성곡선법은 이를 처리할 수 있는 능력이 없다.

Lighthill과 Whitham(1955)은 연속방정식과 평균유속공식을 이용하여 운동파의 특성을 설명하였으며, 운동파 이론을 수학적으로 확립하였다. Kibler와 Woolhiser(1970)는 운동파 이론에 의한 수치해석에서 발생하는 충격파와 이것의 처리기법을 설명하였으며, 유한차분법과 특성곡선법에 의한 결과를 비교분석하였다. Li 등(1975)은 운동파방정식을 유한차분법에 의한 비선형 해법으로 해석하였는데, 수치해석에서 수치감쇠(numerical dissipation)의 영향을 줄이기 위하여 Taylor 급수에서 3계 도함수까지 고려하였다. Borah 등(1980)은 Kibler의 충격파 처리기법을 개선한 Propagating Shock Fitting(PSF) 기법과 Approximate Shock Fitting(ASF) 기법을 제시하였고, PSF 기법을 강우-유출 해석에 적용하였다(Borah, 1989). Ponce(1991)는 운동파가 진행됨에 따라 발생하는 충격파의 민감도에 대하여 연구하였다. 국내에서는 이창훈과 이길성(1989)이 댐파괴의 수리학적 영향을 고찰하기 위하여 운동파 이론에 근거한 HEC-1과 완전동력학과 이론에 근거한 DAMBRK에 의한 결과를 비교하였으며, 최계운 등(1994)은 운동파 이론과 비관성 이론의 적용범위에 대하여 연구한 바 있다.

본 연구에서는 특성곡선법을 사용하여 운동파 이론을 수치해석할 때 발생하는 충격파에 대하여 살펴보고, 이를 수치적으로 처리하기 위한 방법인 PSF 기법과 ASF 기법의 적용성을 검토하였다. 측방유입에 의한 충격파와 경사가 급한 수로에서 기저유량과 침투유량의 비가 큰 경우 발생하는 충격파에 대해서 이들 알고리즘을 적용하여 충격파의 처리능력을 검토하였다. 또한 충격파를 처리한 해와 완전동력학과 이론에 의한 결과를 비교하고 토의하였다. 이러한 연구는 향후 하천

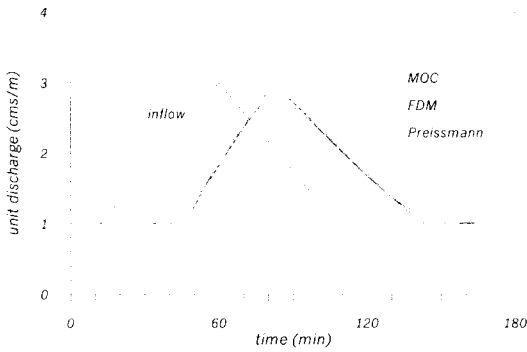


그림 1. 운동파 이론과 완전동력학과 이론에 의한 유출수문곡선의 비교

에서 운동파 이론을 이용한 오염물질 또는 유사의 수송연구에 적용 가능한 수치모형의 확립에 도움이 될 것이다.

2. 운동파 이론의 수치해석

2.1 운동파 이론

일차원 비정상 개수로 흐름의 지배방정식은 연속방정식과 운동량방정식으로 구성된 Saint Venant 방정식이다. 보존식 형태의 Saint Venant 방정식을 쓰면 다음의 연속방정식 및 운동량방정식과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q \quad (1)$$

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{gA} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f \quad (2)$$

여기서 t 와 x = 독립변수로 각각 시간과 종단 거리, Q = 유량, A = 횡단면적, q = 측방향 유입유량, y = 수심, S_0 = 하상의 종방향 경사, S_f = 하상의 마찰경사, 그리고 g = 중력가속도이다. 식 (2)에서 좌변의 첫 번째 항은 국부 가속도(local acceleration), 두 번째 항은 이송 가속도(convective acceleration), 세 번째 항은 압력(pressure force), 그리고 우변의 첫 번째 항은 중력(gravity force), 두 번째 항은 마찰력(friction force)을 나타낸다. 운동량방정식인 식 (2)에서 각 항의 절대적 크기와 상대적 크기를 비교하여 볼 때, 압력항, 중력항, 그리고 마찰력항이 흐름을 결정하는 주요항이다. 식 (2)에서 관성력과 압력항을 무시할 경우, 식 (2)의 좌변(관성력항과 압력항)을 소거할 수 있으

며, 다음 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$S_0 = S_f \quad (3)$$

운동파 이론에서 운동량방정식은 식 (3)이 되며, 연속방정식인 식 (1)과 함께 흐름의 지배방정식이 된다. 식 (3)을 정상상태 등류의 평균유속공식을 사용하여 다시 쓰면 다음의 식 (4)와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$A = \alpha Q^\beta \quad (4)$$

여기서 α = 하천의 경사나 조도계수 등의 지형학적 인자 (geometric factor), 그리고 β = 지형학적 지수인자 (geometric exponential factor)이다. 식 (4)의 양변을 시간 t 에 대하여 편미분하면 다음 식 (5)와 같다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha \beta Q^{\beta-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad (5)$$

위의 식 (5)를 연속방정식 식 (1)에 대입하여 Q 만의 함수로 표현하면 식 (6)과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{\beta-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q \quad (6)$$

식 (6)은 쌍곡선형 편미분 방정식으로서 공간에 대하여 일차의 편미분 항을 가지고 있으므로 하나의 경계 조건만을 필요로 한다. 식 (4)에서 등류의 평균유속공식은 $\beta \neq 1$ 이며 이 경우, 식 (6)은 종속변수 Q 에 대한 비선형 방정식이 되며 유입된 운동파의 파형이 변화하여 충격파가 발생한다. 측방향 유입이 없는 경우, 즉 식 (1)의 q 가 0인 경우, 첨두유량이 보존되는 특징을 가지고 있다. 식 (6)에서 연속방정식을 Q 만의 함수로 표현하였는데, 식 (4)에서 정상상태 등류의 평균유속공식에서 β 가 1보다 작으므로 유량 Q 가 부정확하게 계산되었을 경우 단면 A 로의 오차의 전파가 상대적으로 작기 때문에 유량 Q 를 종속변수로 사용하는 것이 좋다(Chow 등, 1988; Ponce, 1991).

2.2 특성곡선법

유량 Q 의 전미분 (dQ)은 식 (7)과 같다.

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \quad (7)$$

식 (7)을 dx 로 나누면 식 (8)이 된다.

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dt}{dx} \quad (8)$$

식 (6)과 (8)은 다음과 같은 조건일 때 서로 일치한다.

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (9)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 곱하면 다음 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{q}{\alpha\beta Q^{\beta-1}} \quad (11)$$

식 (5)에 식 (11)을 대입하면 식 (12)를 유도할 수 있다.

$$\frac{dA}{dt} = q \quad (12)$$

식 (9)와 (12)를 적분하면 다음 식 (13)과 같다.

$$Q(x, t) = Q_u + \int_{x_0}^x q[\eta, t(\eta)]d\eta \quad (13a)$$

$$A(x, t) = A_l + \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)]d\xi \quad (13b)$$

식 (13b)를 식 (4)를 이용하여 유량 (Q)에 대하여 나타내면 식 (13c)와 같다.

$$Q(x, t) = \left[Q_l^\beta + \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)]d\xi \right]^{1/\beta} \quad (13c)$$

여기서 Q_l 와 A_l 는 각각 초기조건을 나타내며, Q_u 는 상류단의 경계조건을 나타낸다. 식 (13a)와 (13c)를 각각 식 (10)에 대입하여 dx 와 dt 에 대하여 적분하면 식 (14)가 된다.

$$t - t_0 = \alpha\beta \int_{x_0}^x \left\{ Q_u + \int_{x_0}^x q[\eta, t(\eta)]d\eta \right\}^{\beta-1} dx' \quad (14a)$$

$$x - x_0 = \frac{1}{\alpha\beta} \int_{t_0}^t \left\{ Q_l^\beta + \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)]d\xi \right\}^{(1-\beta)/\beta} dt' \quad (14b)$$

측방향 유입 (q)이 시간 또는 공간에 대하여 일정한 경우에 식 (14)는 적분가능하다. 식 (13)을 A_l^j 와 Q_l^j 에 대하여 하나의 특성곡선 상의 두 점 (x_{i-1}, t_{i-1}) 과 (x_i, t_i)에 대하여 이산화하면 식 (15)가 된다.

$$Q_i = Q_{i-1}^j + q_i^j \Delta x_i \quad (15a)$$

$$A_i = A_{i-1}^j + q_i^j \Delta t_j \quad (15b)$$

$$Q_i^j = \left[(Q_{i-1}^j)^\beta + \frac{q_i^j}{\alpha} \Delta t_j \right]^{1/\beta} \quad (15c)$$

식 (14)를 식 (15)와 같은 방법으로 이산화하면 식 (16)과 같다.

$$\Delta t_j = \frac{\alpha}{q_i^j} \left[(Q_{i-1}^j + q_i^j \Delta x_i)^\beta - Q_{i-1}^{j\beta} \right] \quad (16a)$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{\alpha q_i^j} \left[\left(Q_{i-1}^{j\beta} + \frac{q_i^j}{\alpha} \Delta t_j \right)^{1/\beta} - Q_{i-1}^{j\beta} \right] \quad (16b)$$

Δt 또는 Δx 중 하나를 독립변수로 하여, 상류단으로부터 유입된 Q 에 대하여 식 (16)을 이용하여 특성곡선의 경로를 추적한다. 먼저 독립변수로 정한 Δt 또는 Δx 를 증가시키고 식 (15)를 이용하여 증가된 후의 흐름상태를 계산한 후, 식 (16)을 이용하여 Δt 와 Δx 중에서 남은 하나의 변수를 종속변수로 하여 계산한다. 측방향 유입이 전시간에 걸쳐 일정한 경우에는 Δt 를 독립변수로 정하는 것이 바람직하다(Borah 등, 1980). 식 (16)은 $q_i^j = 0$ 일 때는 정의되지 않으며, 이 경우에는 식 (10)을 이용하여 유도되는 식 (17)을 사용한다.

$$\Delta x = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}} \Delta t \quad (17a)$$

$$\Delta t = \alpha\beta Q^{\beta-1} \Delta x \quad (17b)$$

Δt 를 독립변수로 정한 경우에 Δt 의 변화에 대한 Δx 를 계산하게 되어, Δx 의 누가된 값이 계산구간의 하류단과 일치하지 않는다. 이 경우의 계산절차는 다음과

같다. 먼저 다음의 식 (18)에서 하천의 종방향 길이보다 크게 되는 i 를 구한다.

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i < L < \sum_{i=1}^m \Delta x_i \quad (18)$$

여기서 L = 하천의 길이이다. 다음에 $\Delta x_i = L - \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ 의 관계식을 이용하여 Δx_i 를 구한다. 이 Δx_i 를 독립변수로 하여 이 값에 해당하는 Δt_i 를 식 (17b)를 이용하여 구한다. 만약 특성곡선이 하류단으로 진행함에 있어 충격파가 발생하지 않는다면 특성곡선을 이용하여 하도를 추적하는 것이 운동파 이론에 충실한 수치해석이 될 것이다. 그러나 특성곡선을 이용하여 수치해석하는 과정에서 유입유량의 변화에 의하여 충격파가 발생하며, 특성곡선법은 이러한 수치처리 과정에서 발생하는 충격파를 처리하는 알고리즘을 가지고 있지 않다. 특성곡선법의 수치처리과정에서 발생하는 충격파의 발생조건과 충격파의 수치처리 알고리즘에 대해서는 3장에서 기술하였다.

2.3 비선형 유한차분법

일반적으로 쌍곡선형 편미분방정식의 수치해석시 유한차분법에 의한 수치해에는 이산화과정에서 발생하는 수치감쇠 및 수치진동(numerical oscillation)이 발생할 수 있으나, 특성곡선법은 이러한 오차의 영향을 덜 받아 해의 경사가 급한 부분도 잘 모의할 수 있다. 유한차분법에 의한 오차는 지배방정식을 이산화하는 과정에서 발생하는 절단오차의 영향이 지배적이며, 절단오차의 짝수차 항과 홀수차 항이 각각 수치감쇠 및 수치진동과 관련이 있다고 알려져 있다. 따라서 유한차분법을 이용하여 운동파방정식을 수치해석할 때, 계산된 수치해에 수치감쇠 및 수치진동에 의한 영향을 최소화하는 것이 중요하게 된다. 완전음해법에 의한 비선형 유한차분식은 다음의 식 (19)와 같다(Li 등, 1975; Chow 등, 1988).

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i + 1^{j+1} + \alpha(Q_{i+1}^{j+1})^\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{i+1}^{j+1} + \alpha(Q_{i+1}^j)^\beta + \Delta t \left(\frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} \right) \quad (19)$$

위의 식 (19)은 Q_{i+1}^{j+1} 에 대한 비선형 방정식으로, Newton-Raphson 기법과 같은 선형화 기법을 사용

하면 해석이 가능하다.

3. 운동파의 충격파 처리기법

홍수파는 하류로 전파될 때 파의 경사가 급해지는 비선형 특성을 가지고 있으므로 충격파를 발생시킬 수 있다. 기존의 수치실험에서도 충격파를 발생시키는 이와 같은 현상은 홍수파의 자연적인 특성임을 제시하고 있다(Borah 등, 1980; Kibler와 Woolhiser, 1970). 그러나 계산상에서 무수히 발생하는 충격파는 실제 현상과 모두 부합되지 않는 경우도 많으며, 실제 상황에서는 매우 특수한 조건하에서만 충격파가 발생하게 된다(Ponce와 Windingland, 1985). 따라서, 실제 현상과 부합되지 않고 수치처리 과정에서만 충격파가 발생하는 경우 이를 수치적으로 처리하는 기법이 필요하다.

3.1 충격파의 발생 조건

측방향 유입이 존재할 때의 특성곡선의 진행형태는 그림 2와 같다. 그림 2에서 cascade element는 특성곡선법의 계산에 있어 지형인자가 바뀌지 않는 하나의 계산구간을 의미하며, 본 연구에서는 이를 계산구간이라고 정의하였다. 그림 2에서 D에서의 파속이 E에서의 파속보다 큰 경우 두 개의 특성곡선은 F에서 교차하며 충격파가 발생한다. 이 때 충격파가 발생할 조건은 다음의 식 (20)과 같다.

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_E^{(1)} < \left[\frac{dx}{dt} \right]_D^{(2)} \quad (20)$$

여기서 위첨자는 그림 2의 특성곡선 번호이며, 아래첨자는 이 특성곡선이 시간 t' 에서 만나는 점을 나타낸다. 식 (10)과 (4)를 이용하면 식 (20)은 다음 식 (21)과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha_k [Q_{U,k}^{(2)}]^\beta - \alpha_k [Q_{U,k}^{(1)}]^\beta > q_k \Delta t_{j+1} \quad (21)$$

여기서 k = 계산구간번호, 아래첨자 U = 상류단의 경계조건, 그리고 $\Delta t_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ 을 나타낸다. 식 (21)에서 상류단의 유입수문곡선이 등류일 경우와 유량이 감소하는 경우에 충격파는 발생하지 않으며, 유입유량이 증가하는 부분의 경우, 식 (21)에서 언급된 변수들의 상대적인 크기에 의하여 충격파의 발생여부가 결정된다(Singh, 1996). k 번째 계산구간에서 발생하

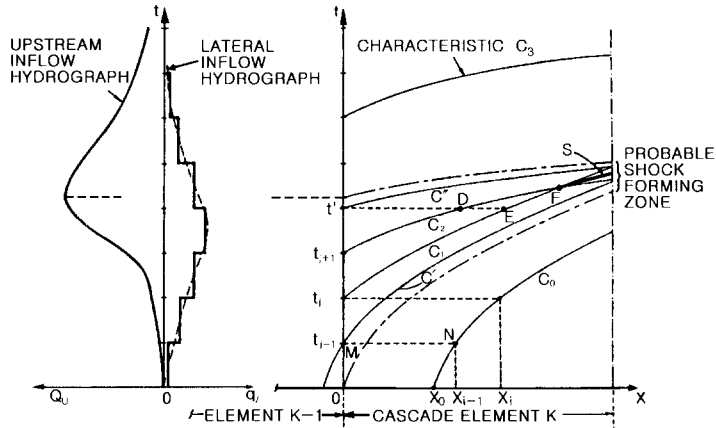


그림 2. 측방향 유입이 존재할 때 충격파의 진행경로와 특성곡선의 진행양상 (Borah 등, 1980)

는 충격파는 대상계산구간의 상류단경계조건에 의하여 발생여부가 결정된다. 예를 들어 그림 2의 MN 사이를 지나는 특성곡선에서 위의 식 (21)을 사용하여 측방향유입으로 인한 충격파의 발생조건을 구하면 다음 식 (22)와 같다.

$$\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\right)^{\beta_k/\beta_{k-1}} (q_{k-1}\Delta t_{j-1})^{\beta_k/\beta_{k-1}} > q_k\Delta t_{j-1} \quad (22)$$

여기서 $k =$ 계산구간번호이다. 식 (22)에서 k 와 $k-1$ 의 계산구간이 동일한 형상 ($\alpha_k = \alpha_{k-1}$, $\beta_k = \beta_{k-1}$)인 경우에는, k 번째 계산구간의 측방향 유입(q_k)이 $k-1$ 번째 계산구간의 측방향 유입(q_{k-1})보다 클 경우 충격파가 발생한다. 충격파가 발생한 후의 충격파의 경로는 다음의 식 (23)의 속도를 가진다(Lighthill과 Whitham, 1974).

$$(x, t) = \frac{dx}{dt} = \frac{Q^b(x, t) - Q^a(x, t)}{A^b(x, t) - A^a(x, t)} \quad (23)$$

여기서 위첨자 a 와 b 는 각각 충격파의 발생 후 (ahead)와 전(behind)을 나타낸다.

3.2 충격파 처리기법

두 개의 파가 교차되는 순간부터 특성곡선은 이전의 특성이 없어진다. 대신 충격파에 의해 두 개의 특성곡선이 합쳐지면서 하나의 특성곡선을 이루어 진행하게 된다. 이렇게 발생된 새로운 특성곡선의 발생위치를 찾

아 추적하는 기법은 Whitham(1974)에 의하여 연구되었으나 실제 사용하기에 복잡하다는 단점이 있다. 근래에는 미소한 충격파가 발생하였을 때 그 위치를 찾지 않고 충격파의 발생가능성을 판단하여 충격파의 경로를 추적하는 PSF 기법과 ASF 기법이 제시되었다 (Borah 등, 1980; Singh, 1996).

3.2.1 Propagating Shock Fitting 기법

그림 3은 하나의 동일한 지형인자를 가진 계산구간에서의 충격파의 발생 및 이의 처리를 나타내고 있다. P 점에서 교차하는 특성곡선 C_3 와 C_4 에 대하여 살펴보면, 이들 사이에는 실제 무한한 특성곡선이 존재하며, 이들 중의 임의의 점 B에서 만나는 특성곡선 C_3' 과 C_4' 를 생각할 수 있다. 여기서 경계조건으로 입력되는 특성곡선인 C_3 와 C_4 사이에서 발생하는 충격파가 미소하다면, 충격파 발생 후의 C_3' 와 C_3 에서 단면의 차이는 크지 않다. C_4' 와 C_4 또한 마찬가지이다. 그러므로, C_3 와 C_4 사이에서 발생하는 충격파는 그것의 진행경로 S를 벗어나지 않는다고 가정할 수 있다. 따라서 충격파의 경로는 서로 교차되는 두 개의 특성곡선에 의해 정의된다고 할 수 있다. 충격파 발생 직전과 직후의 두 개의 특성곡선은 식 (14)에서 정의된 값으로 각각의 유량을 하류단으로 전달한다. 충격파의 진행경로를 추적하기 위해서는 먼저 그림 3에서와 같이 각 시간간격의 1/2에서의 초기값, 즉 $t_{0+1/2}$, $t_{1+1/2}$, $t_{2+1/2}$, ...의 유량을 계산한다. 이 값들을 식

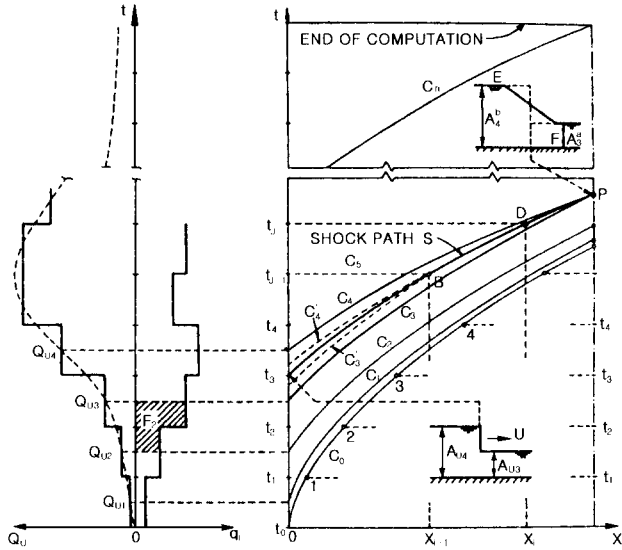


그림 3. Propagating Shock Fitting의 개념도(Borah 등, 1980)

(20)에 대입하여 충격파의 발생여부를 판단한다. 그림 3의 경우 C_3 와 C_4 사이에서 충격파가 발생하며 충격파의 진행경로를 추적하기 위한 값들은 식 (20)과 식 (4)를 식 (21)에 대입하여 적분하면 다음 식 (24)를 얻는다. 이 때, 충격파 진행경로의 경계값은 C_3 와 C_4 의 중간값으로 한다.

$$x - x_0 = \frac{1}{A_i^b - A_i^a} \int_{t_0}^t \left[(Q_i^b)^\beta + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)] d\xi \right]^{1/\beta} - \left[(Q_i^a)^\beta + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)] d\xi \right]^{1/\beta} dt \quad (24a)$$

$$t - t_0 = \frac{a}{Q_u^b - Q_u^a} \int_{x_0}^x \left[\left[Q_u^b + \int_{x_0}^x q[\eta, t(\eta)] d\eta \right]^\beta - \left[Q_u^a + \int_{x_0}^x q[\eta, t(\eta)] d\eta \right]^\beta \right] dx' \quad (24b)$$

여기서 위첨자 a, b 는 각각 충격파의 발생 직전의 후면부와 전면부를 의미하는데, 그림 3에서 S 의 경우에는 D 점에서의 단면의 변화를 보면 발생 전에는 C_3 가 되며, 후에는 C_4 가 된다. 그림 3의 충격파가 경로 S 위의 가상의 점 $B(x_{i-1}, t_{i-1})$ 와 $D(x_i, t_i)$ 에

대하여 식 (24)를 이산화하면 다음 식 (25)가 된다.

$$\Delta x_i = \frac{\alpha \beta}{(\beta + 1)q[(A_i^{j-1})^b - (A_i^{j-1})^a]} \times \left\{ \left[\frac{a}{\alpha} \Delta t_j + (Q_i^{j-1})^b \right]^{(\beta+1)/\beta} - \left[\frac{a}{\alpha} \Delta t_j + (Q_i^{j-1})^a \right]^{(\beta+1)/\beta} - [(Q_i^{j-1})^b]^{(\beta+1)/\beta} + [(Q_i^{j-1})^a]^{(\beta+1)/\beta} \right\} \quad (25a)$$

$$\Delta t_i = \frac{\alpha}{(\beta + 1)q[(Q_i^{j-1})^b - (Q_i^{j-1})^a]} \times \left\{ [q \Delta x_i + [(Q_i^{j-1})^b]^\beta]^{(\beta+1)} - [q \Delta x_i + [(Q_i^{j-1})^a]^\beta]^{(\beta+1)} - [(Q_i^{j-1})^b]^{b+1} + [(Q_i^{j-1})^a]^{b+1} \right\} \quad (25b)$$

충격파가 발생한 후의 유량은 식 (26)으로 계산된다.

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} [Q^a(x, t) + Q^b(x, t)] \quad (26)$$

만약, 측방향 유입이 존재하지 않을 경우에는 $q = 0$ 가 되어 식 (25)는 정의되지 않는다. 이 경우는 하나의 특성곡선이 하나의 계산구간 내에서 유량이 변하지 않는다는 것을 의미하며, 식 (23)을 이용하여 충격파

경로의 속도를 계산한 후 하류단까지의 거리에 따른 도달시간을 계산하거나 시간을 가정하여 그 때의 도달 거리를 계산하면 된다.

3.2.2 Approximate Shock Fitting 기법

그림 4와 같이 하나의 계산구간에서 세 개의 충격파가 발생하는 경우, PSF 기법은 인접한 두 개의 특성곡선에 대해서만 충격파를 처리한다. 그러나 특성곡선 C_1 과 C_2 사이에서 발생하는 충격파를 처리한 후의 진행경로인 S_1 과 특성곡선 C_2 와 C_3 사이에서 발생하는 충격파를 처리한 후의 진행경로인 S_2 는 a 점에서 교차하여 충격파와 진행경로 상호간에 영향을 주는데, PSF 기법은 충격파와 진행경로 상호간의 영향을 계산하지 못한다. 이러한 경우의 해결 방법은 충격파가 발생하는 충격파의 진행경로 사이의 특성곡선을 무시하는 기법 (즉, C_2 를 무시하는 기법)과 계산구간을 짧게 하여 계산하는 기법이 있다. 전자의 경우에는 두 개의 특성곡선 사이의 유량의 차이가 커져서 특성곡선 상호간의 충격파가 미소하다는 PSF 기법의 기본가정과 일치하지 않는 경우가 발생한다. 후자는 그림 4의 경우에 전체 계산구간을 1/2로 나누어 계산하면 S_1 과 S_2 상호간의 충격파를 처리할 수 있다. 즉, 단면 $\overline{II'}$ 까지 하나의 계산구간으로 하여 PSF 기법의 계산과정을 수행한다. 다음에 단면 $\overline{II'}$ 에서의 유출수문곡선을 다음 계산구간의 유입수문곡선으로 하여 같은 계산을 수행하는데, S_1 과 S_2 사이에서 충격파가 발생하므로 이들 두 개의 충격파 진행경로를 특성곡선으로 보고 이

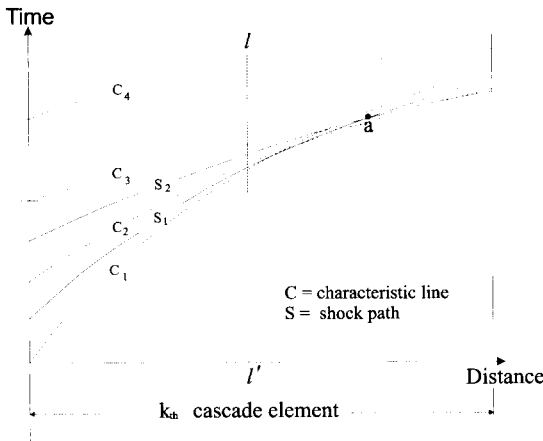


그림 4. 세 개 이상의 특성곡선이 교차하는 경우

들을 계산한다. 이렇게 하면 충격파와 경로 상호간의 영향을 완전하게 고려할 수 있다. 그러나, ASF 기법 기법은 PSF 기법에 비하여 계산시간이 길다는 단점이 있다.

4. 수치실험

4.1 측방유입에 의한 충격파의 발생

이 수치실험은 측방유입이 존재하는 경우에 있어서 각 수치해석 기법들의 적용성을 분석하기 위하여 Borah 등(1980)이 수치실험한 가상의 강우-유출 평면에 대하여 수치실험을 수행하였다. 본 수치실험은 3가지 경사를 가진 가상 평면상에서의 균일한 측방유입에 대한 것으로서, 상류단의 유입은 없는 것으로 가정하였으며, 측방향유입은 20mm/hr로 30 분간 지속되도록 하였다. 대상구간의 측면도는 그림 5와 같다. 식 (4)의 α 와 β 는 Borah 등(1980)의 연구에 적용된 값을 사용하였는데, 상류단의 유입이 없는 건천에 운동파 이론을 적용하는 경우 식 (4) 대신 일반적으로 $Q = \alpha A^\beta$ 의 관계식을 적용하여 수치모의한다. Borah 등(1980)은 이 식에서 α 의 값은 각 계산구간 별로 10, 5, 2.5의 값을 적용하였으며, β 의 값은 Manning의 평균유속공식에 근거하여 1.5를 적용하였다.

PSF 기법의 경우 유입시간의 변화 (Δt)를 60 초로 하여 그 때의 유량이 계산구간의 종점에 도달하는 시간을 계산하였다. 경사가 바뀌는 부분에서 충격파의 발생조건인 식 (20)을 만족하여 충격파를 처리하게 된다. 각 계산구간의 하류단에 도달한 수문곡선을 다음 계산구간의 유입유량으로 간주하여 계산을 수행하였다.

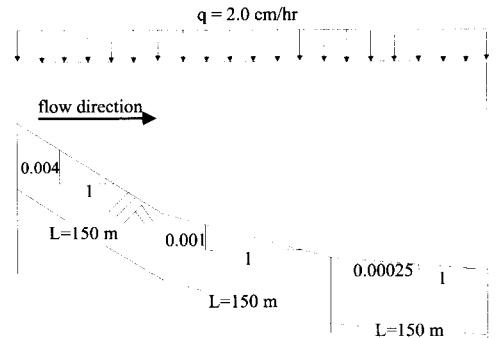


그림 5. 3단 경사를 가진 유역의 측면도

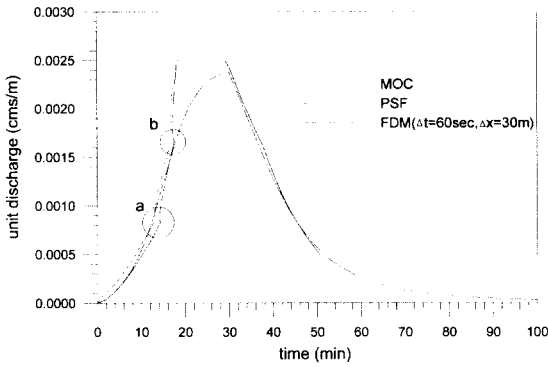


그림 6. 하류단의 유출수문곡선

실제 계산에서 충격파 진행경로 사이에서도 미소한 충격파는 발생하였으며, 일정 시간 간격 내에서 유량의 차이가 미소한 충격파는 유량이 같다고 계산하였다. 그림 6에서 하류단의 수문곡선이 계단형태를 보이는 것은 이러한 이유 때문이다. 그림 6의 a, b 부분에서 특성곡선법을 이용한 수치실험에서 발생하는 충격파를 처리하는 것을 확인할 수 있다. 유한차분법의 적용에서 시간의 간격(Δt)을 60 초, 거리의 간격(Δx)를 30 m로 설정하여 계산을 수행하였다. 침투값의 경우, 특성곡선법과 PSF 기법이 0.0025cms로 계산된 반면 유한차분법은 0.00238cms로 계산되었다. 침투값에 대한 오차는 약 10%로 수치감쇠가 나타났으며, 이는 완전 음해법의 절단오차의 영향으로 판단된다. 그림 6의 a와 b부분을 살펴보면, 유한차분법에 의한 수치해는 충격파를 발생시키지 않으며 특성곡선법에 의한 수치해는 충격파를 발생시킴을 알 수 있다. PSF 기법의 경우 수문곡선의 상승부에서 계단형태를 나타내고 있다. 이것은 PSF 기법을 이용한 수치해석에 있어 일정 시간 간격내에서 발생하는 충격파는 동일한 유량으로 처리한 결과이다.

4.2 급변하는 유량에 의한 충격파의 발생

홍수파의 내습과 같이 시간의 변화에 비해 유량의 변화가 급격할 경우 특성곡선법에 의한 계산과정에서는 인접한 특성곡선과의 유입유량의 차이가 크게 되므로 인접한 두 개의 특성곡선사이의 충격파는 매우 크게 발생하고, 하나의 계산구간에서 여러 개의 특성곡선이 교차하게 된다. 이러한 크게 발생하는 충격파에 대하여, PSF 기법은 처리가 완전하지 못하다. 따라서, ASF 기법과 같이 개선된 계산 기법이 필요하다. 본 수치 실험은 이러한 조건에 대한 PSF 기법과 ASF

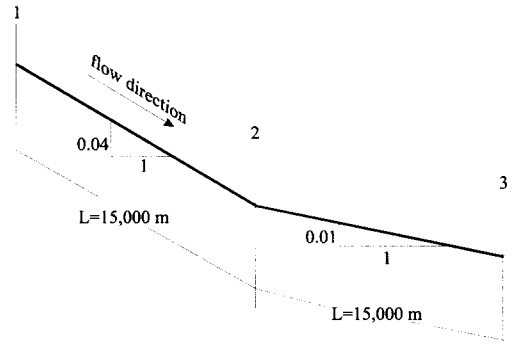


그림 7. 충격파의 발생을 크게 하기 위한 대상구간의 측면도

기법의 적용성을 검증하기 위하여 수행하였다. Ponce와 Windingand (1985)의 연구에 기초하여 충격파가 발달될 수 있도록 조건을 부여하였다. 하상의 측면도는 그림 7과 같으며, Manning의 조도계수는 0.035로 설정하였다. 단위폭당 유입유량은 그림 8의 유입수문곡선과 같다.

PSF 기법과 ASF 기법으로 산정한 2, 3지점에서의 수문곡선을 도시하면 각각 그림 8, 그림 9와 같다. ASF 기법의 경우에 PSF 기법에서 하나의 계산구간(구간의 지형학적 인자가 변하지 않는 구간)으로 처리하는 15,000m의 하도를, 충격파가 상대적으로 작게 발생하는 1-2 구간의 경우에는 계산구간을 16개, 충격파가 크게 발생하는 2-3구간에서는 계산구간을 256개로 나누어져 계산을 수행하게 되며, 계산결과 충격파를 양호하게 처리하는 것으로 확인할 수 있다. 2-3단면에서 계산구간의 수가 16배 더 많아졌는데, 2번 지점에서 하상경사가 완만해지면서 충격파가 크게 발생하기 때문에 판단된다. 그림 8에서의 하류단에서 파의 전면부보다 그림 9에서의 하류단에서의 파의 전면부의 경사가 더 급해지는 것을 확인할 수 있다. 이것은 파의 상승부에서 기울기가 급해지는 운동파 이론의 특성에 의한 것으로 파의 진행거리가 길어질수록 더욱 경사가 급해진다. 2번 지점의 수문곡선에서 파의 상승부와 침투값 사이의 시간차는 40분 정도 되었으며, 3번 지점에서의 시간차는 36분 정도 되었다. 만약 개수로의 연장이 매우 길어진다면 파의 전면부의 기울기는 무한대에 접근할 것으로 보인다.

4.3 완전동력학파와의 비교

본 수치모의는 하도에서 홍수파의 전파를 수치모의

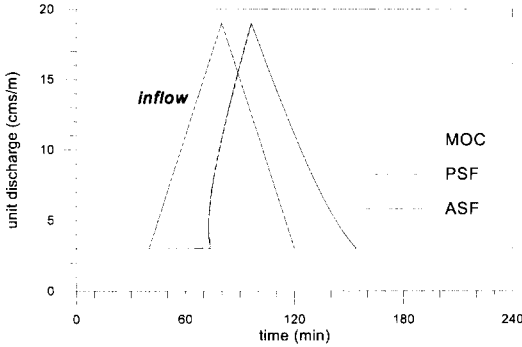


그림 8. 유입수문곡선과 단면 2에서의 유출수문곡선

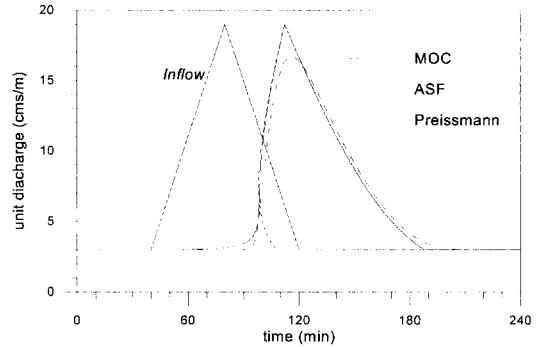


그림 10. 완전동력학과 Approximate Shock Fitting 기법의 비교

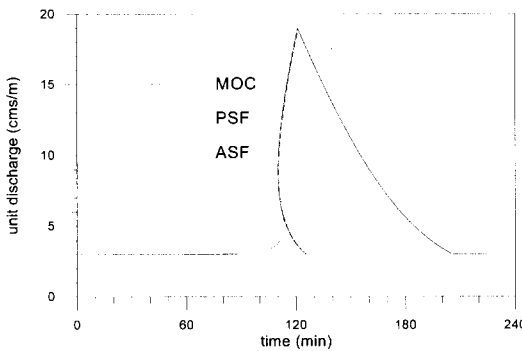


그림 9. 단면 3에서의 유출수문곡선

함에 있어 ASF 기법을 이용한 운동파 해석과 완전동력학과 이론에 근거한 해석을 비교하기 위하여 실시되었다. 하도의 경사는 0.004이고 Manning의 조도계수는 0.035로 가정하였다. 초기조건은 단위폭당 유량 $q = 3\text{cms/m}$ 에 의한 등류수심인 1.67m를 초기의 수심으로 하였으며, 상류단의 경계조건으로는 그림 10의 유입수문곡선을 사용하였다. 완전동력학과에 의한 수치해석시에는 하류단에서 Manning 공식에 의한 등류수심을 적용하였다.

완전동력학과를 수치해석하기 위하여 음해법인 Preissmann 기법을 사용하였는데, 공간에 대해서는 하류방향으로 0.6의 가중치를 주었으며, 차분간격은 시간에 대하여 60초, 공간에 대하여 100m를 설정하였다. 각각의 방법에 의해 하류단에서 계산된 수문곡선은 그림 10과 같다. MOC 기법에 의한 수문곡선과 비교해볼 때 ASF 기법이 발생하는 충격파를 효과적으로 처리하는 것을 알 수 있다. 또한 충격파가 처리된 ASF 기법에 의한 결과와 Preissmann 기법에 의한 결과가

파의 상승부와 하강부에서 거의 동일한 형상을 나타내는 것을 볼 수 있다. 그러나 두 기법은 첨두값 부근에서 차이를 나타내는데, ASF 기법의 경우 유입파의 첨두값(19.0cms/m)이 그대로 보존되었으며, Preissmann 기법의 경우, 16.7cms/m를 나타내어 유입파에 대하여 약 11%의 감쇠를 보였다. 이것은 ASF 기법이 운동파 이론에 근거한 해석방법이므로 파의 감쇠가 발생하지 않는 반면, 완전동력학과 이론에 의한 해석(Preissmann 기법)은 첨두유량이 보존되지 않기 때문이다.

5. 결 론

개수로에서 홍수파의 전파를 모의하기 위하여 Saint-Venant 방정식의 근사 형태인 운동파 이론을 사용하는 것이 편리할 때가 있다. 본 논문에서는 운동파 이론의 수치해석 기법으로 널리 이용되고 있는 특성곡선법과 비선형 유한차분법을 비교 검토하였다. 비선형 유한차분법을 사용하여 운동파 방정식을 수치해석하는 경우 첨두값의 감쇠가 발생하는데, 이것은 차분기법의 오차에 의한 감쇠로 물리적인 현상과는 구별되어야 한다. 특성곡선법은 유량의 첨두값이 보존되는 운동파 이론에 충실한 수치해석 기법이다. 그러나 수치계산 과정에서 충격파가 발생할 경우 이를 적절히 처리하지 못하므로 PSF 기법이나 ASF 기법과 같은 충격파 처리기법을 필요로 한다.

세단계의 경사를 갖는 수로에서 측방유입으로 인하여 충격파가 발생하는 경우 PSF 기법에 의하여 효과적으로 충격파가 처리되는 것을 보였다. 이때 비선형 유한차분법에 의한 해는 차분기법의 감쇠특성으로 인하여 충격파가 발생하지 않았다. 급경사 수로에서 기저유량

과 침투유량의 비가 큰 경우에 발생하는 충격파에 대해서는 PSF 기법보다는 ASF 기법이 더 유효함을 확인하였다. ASF 기법은 하나의 계산구간에 대하여 PSF 기법을 반복적으로 적용하는 방법으로 계산구간을 많이 세분할 경우 계산시간이 지나치게 길어지는 단점이 있다. 단일 경사의 하도에서 유량이 급변하여 충격파가 발생하는 경우에는, ASF 기법에 의해 충격파를 수치처리한 유출수문곡선과 완전동력학과 이론에 의한 결과가 침투값에는 차이를 보였으나 상승부와 하강부에서 잘 일치하였다. 따라서 운동과 이론의 해석에 적절한 충격파처리 기법을 도입할 경우 홍수파에 의한 부정류해석과 이에 따른 오염물질의 이송·확산, 그리고 유사이동 등에 활용될 수 있을 것으로 보인다.

참고문헌

- 이창훈, 이길성 (1989). “댐 파괴 모형의 비교평가.” 한국수문학회지, 한국수문학회, 제22권, 제3호, pp. 323-330.
- 최계운, 안경수, 안상진 (1994). “하천흐름해석에서 단순화된 운동방정식을 사용한 유한차분모델의 신뢰성있는 적용범위.” 한국수문학회지, 한국수문학회, 제27권, 제4호, pp. 123-133.
- Borah, D.K. (1989). “Runoff simulation model for small watersheds.” *Transaction of ASAE*, Vol. 32, No. 3, pp. 881-886.
- Borah, D.K., Prasad S.N., and Alonso, C.V. (1980). “Kinematic wave routing incorporating shock fitting.” *Water Resources Research*, Vol. 16, No. 3, pp. 529-541.
- Chow, V.T., Maidment, D.R., and Mays, L.W. (1988). *Applied hydrology*, McGraw Hill, New York, NY.
- Kibler, D.F., and Woolhiser, D.A. (1970). “The kinematic cascade as hydrologic model.” *Hydrology Papers*, Vol. 39, Colorado State University, Fort Collins, CO.
- Li, R.M., Simon, D.B., and Stevens, M.A. (1975). “Nonlinear kinematic approximation for water routing.” *Water Resources Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 245-248.
- Lighthill, M.J., and Whitham, G.B. (1955). “On kinematic waves; I. Flood movement in long river.” *Proc. R. Soc. London A*, Vol. 229, No. 1178, pp. 281-316.
- Ponce, V.M., and Windingand, D. (1985). “Kinematic shock: sensitivity analysis.” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 111, No. 4, pp. 600-611.
- Ponce, V.M. (1991). “The kinematic wave controversy.” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 4, pp. 511-525.
- Singh, V.P. (1996). *Kinematic wave modeling in water resources*, John Wiley & Sons Inc., New York, NY.
- Whitham, G.B. (1974). *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons Inc., New York, NY.
- Yen, B.C. (1996). “Hydraulics for excess water management.” *Water resources handbook*, Edited by L.W. Mays, McGraw-Hill, New York, NY.

(논문번호:98-075/접수:1998.12.08/심사완료:1999.03.04)