

프레임 구조물의 확률론적 동적 민감도 해석에 관한 연구

裴 東 明

釜慶大學校

(1999년 11월 8일 접수)

A Study on the Stochastic Sensitivity Analysis in Dynamics of Frame Structure

Dong-Myung BAE

Pukyong National University

(Received November 8, 1999)

Abstract

It is main objective of this approach to present a method to analyse stochastic design sensitivity for problems of structural dynamics with randomness in design parameters. A combination of the adjoint variable approach and the second order perturbation method is used in the finite element approach. An alternative form of the constant functional that holds for all times is introduced to consider the time response of dynamic sensitivity. The terminal problem of the adjoint system is solved using equivalent homogeneous equations excited by initial velocities. The numerical procedures are shown to be much more efficient when based on the fold superposition method : the generalized co-ordinates are normalized and the correlated random variables are transformed to uncorrelated variables, whereas the secularities are eliminated by the fast Fourier transform of complex valued sequences. Numerical algorithms have been worked out and proved to be accurate and efficient : they can be readily adapted to fit into the existing finite element codes whose element derivative matrices can be explicitly generated. The numerical results of two cases - 2-dimensional portal frame for the comparison with reference¹⁷⁾ and 3-dimensional frame structure - for the deterministic and stochastic sensitivity analysis are presented.

서 론

수치적 최적설계기법을 응용한 최적설계과정에서는 최적화 목적함수 및 제약함수의 미분을 계산하는 설계민감도 해석이 필수적이다. 이론적 측면에서의 설계민감도 해석방법은 유한차분법(finite

difference method), 해석적 이산변수법(discrete analytic method) 및 연속체 방정식 응용법(continuum equation approach)등이 있으나¹⁾⁻³⁾, 이들 중 가장 정확해를 구할 수 있는 방법이 연속체 방정식 응용법이다. 구조계에서 불확정 요인을 고려한 응답은 확률유한요소법의 사용으로 해석

* 이 논문은 1997년 부경대학 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

이 가능하다. 공학 구조물의 설계에 있어서, 재료의 물성과 기하학적 매개변수, 외부하중 등 측정의 부정확성이나 시스템의 복잡성으로 인한 것이 불확정 요인에 해당한다. 불규칙적으로 변하는 매개변수를 가진 시스템은 랜덤변수(확률변수)를 사용하여 수학적으로 모델링할 수 있다⁴⁾.

Shinozuka⁵⁾와 Venmarke⁶⁾는 탄성계수의 확률론적 분포에 의한 강성행렬의 확률론적 분포를 구성하였다. 즉, 강성행렬을 구성하기 위한 형상함수는 확정론적 함수이며 절점에서의 변위만이 확률변수를 사용하였다. 또한 Deodatis⁷⁾는 가중적분법을 사용하여 프레임 요소의 강성행렬을 유도하였고, Bucher⁸⁾ 등은 탄성계수의 확률밀도함수를 이용한 해석법을 소개하였다. 확률론적 유한요소법(stochastic finite element method)은 기존의 유한요소법에 랜덤분야를 통합한 것으로서 정적, 동적 시스템의 응답에 대한 기대치와 분산 등의 확률변수의 통계적인 모멘트를 구하는 데 주로 사용이 되어 왔다. 현재 SFEM에 사용되고 있는 근사법에는 테일러 전개를 사용한 급수전개방법과 섭동법(perturbation method), 그리고 선형편미분법 등이 있으나 같은 이론적인 배경을 가지고 있다⁹⁾. 또한 이 방법은 구조물의 안전성이나 신뢰성 설계와 관련하여 많이 적용되고 있다. 이와 관련하여 Contreras는 동적모델의 신뢰성 설계¹⁰⁾에 본 방법을 적용하였으며, Grigoriu 등은 강성이 축을 따라 랜덤하게 변화되는 보를 해석¹¹⁾한 바 있다. 그 외에 Nakagiri, Liu 및 Mani 등에 의해서 계속해서 연구가 진행되어 왔다⁵⁾⁻⁸⁾. 구조 신뢰성 설계 분야에서는 Hasofer-Lind가 제안한 1차, 2차 모멘트 기준을 사용하여 2-Stage 프로그래밍법, Chance 프로그래밍법 등의 연구¹²⁾가 수행되었다. 또한 신뢰성 지수가 한계상태 방정식까지의 거리를 최소화하는 신뢰성 최적설계기법에 많은 연구¹³⁾가 있었다. 민감도해석의 이론적인 기초는 Zienkiewicz, Campbell, Haug, Arora, Rousset, Mroz 및 Haftka^{1),3),14)} 등에 의해서 정식화되었으며, 확률 해밀턴 변분원리에 근거한 유한요소법, 정적 및 동적 확률구조 설계민감도 해석에 대해서 Hien과 Kleiber가 최근에 발표한 바 있다¹⁵⁾⁻¹⁷⁾.

본 연구에서는 설계 민감도 해석에 최소일의 원

리를 응용한 연속체 방정식을 이용하고, 이의 변분을 취함으로써 좀 더 정확한 설계민감도를 계산할 수 있는 방법을 제안하였다. 즉, 기준체적과 수반구조를 이용하는 방법으로서, 연속체 요소법(continuum discrete methods)에서 설계민감도 해석함수의 변분계산이 완료되면 유한요소법을 이용하여 상대변수를 근사해석하고, 이를 이용하여 설계민감도를 계산한다¹⁸⁾. 즉, 랜덤시스템에 이계 섭동법을 적용하여 확률구조해석을 수행하고, 평형방정식과 변동을 결정방정식을 이용하여 민감도 해석법을 개발하는 것이 주요 연구내용이다. 섭동법은 랜덤함수가 결정론적인 부분과 랜덤성분의 수열의 합으로서 표현되며, 그 합을 변분법에 적용을 하면 변동을 결정식을 얻을 수 있다. 참고문헌¹⁷⁾과의 비교를 위해서 2차원 portal 프레임 구조물 및 3차원 프레임 구조물의 두 경우의 수치해석 예를 통해서 본 방법의 타당성 및 유용성을 확인하였다. 본 방법의 주요한 장점으로서 현재 구조물의 최적설계를 수행할 때 기 사용하고 있는 유한요소법을 사용한 방법에 쉽게 접목시킬 수 있다는 데 있다. 그러나 확률변수의 변동률이 작을 때에만 적용이 가능한 단점 또한 있다¹⁹⁾.

이론해석

1. 확정론적 구조 민감도

N 개의 자유도를 갖는 선형 탄성계의 구조 응답을 (1)식과 같이 가정한다.

$$\phi = \int_0^T G[q(h,b,t), h] d\tau \quad (1)$$

이 선형 탄성계는 다음의 운동방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} M_{ij}(h,b) \ddot{q}_j(h,b,t) + D_{ij}(h,b) \dot{q}_j(h,b,t) \\ + K_{ij}(h,b) q_j(h,b,t) = f_i(h,b,t) \\ q_j(h,b,0) = 0, \dot{q}_j(h,b,0) = 0, i, j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $h = \{h^r\}$, $e = 1, \dots, E$, $b = \{b^r\}$, $r = 1, \dots, R$, $t, t \in [0, T]$ 는 각각 설계 변수의 벡터, 확률 변수의 벡터, 시간 변수 벡터를 나타낸다. 확률함수 $q = q_i(h,b,t)$, $M_{ij}(h,b)$, $D_{ij}(h,b)$, $K_{ij}(h,b)$ 와 $f_i(h,b,t)$ 는

절점 변위 벡터, 질량, 감쇠, 강성행렬과 하중 벡터를 각각 나타낸다. 확률 설계 민감도의 동적 해석의 목적은 구속조건 (2)식을 만족하는 (1)식의 구조 응답 범함수에서 설계 변화에 대한 변동의 확률 분포를 결정하는 것이다. 즉, 이 범함수의 민감도 변화율의 기대치와 공분산의 시간 응답을 계산하는 것이다.

$M_{ij}, D_{ij}, M_{ij}, f_i$ 와 응답인 q_i 가 h^* 와 b^* 에 대하여 E 번 연속적으로 미분가능하다고 가정한다. Chain rule을 사용하여, 설계 변수 h^* 에 대한 (1)식의 미분은 다음과 같이 된다.

$$\dot{\phi}^* = \int_0^T [G^*(t) + G_i(t) q_i^*(t)] dt \quad (3)$$

여기서, 기호 $(\cdot)^*$ 와 $(\cdot)_i$ 는 e 번째 설계 변수와 i 번째 절점 변위에 대한 각각 첫번째 편도함수를 나타내며, 편의상 함수

$G(t)$ 와 $g(t)$ 는 $G[q(h,b,t),h]$ 와 $q(h,b,t)$ 을 의미하는 것으로, 설계상의 변화를 고려할 때, (3)식을 양함수적으로 쓰기 위해서, 수반법이 사용된다. 설계에 의존하는 수반벡터

$\lambda_i = \lambda_i(t), i=1, \dots, N$ 을 정의함으로써 수반계는 다음 형태의 끝단 문제(terminal problem)로 된다.

$$\begin{aligned} M_{ij}(h,b) \ddot{\lambda}_j(\tau) - D_{ij}(h,b) \dot{\lambda}_j(\tau) \\ + K_{ij}(h,b) \lambda_j(\tau) = G_i(t) \delta(\tau) \\ \lambda_j(T) = 0, \dot{\lambda}_j(T) = 0 \\ \tau \in [T, 0], i, j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

따라서, (3)식은 다음과 같이 된다.

$$\dot{\phi}^* = \int_0^T [G^*(t) + \lambda_i(t) [f_i^*(t) - M_{ij}^* \ddot{q}_j(t) - D_{ij}^* \dot{q}_j(t) - K_{ij}^* q_j(t)]] dt \quad (5)$$

(2), (4)식에 의해 동적 민감도의 초기-끝단 문제로 되고, 상태 변수와 설계 변수에 대한 유일한 해를 구할 수 있다. (2)식의 제차 초기조건과 (4)식의 끝단 조건은 적용되지 않는다.

(2)식에 포함된 관성항과 감쇠항을 무시하면, (1), (2), (4), (5)식은 다음의 식들과 같이 축소되며 이들에 의해 정적 문제의 설계 민감도가 유도된다.

$$\phi = G[q_i(h,b), h] \quad (1')$$

$$k_{ij} q_j = f_i \quad (2')$$

$$k_{ij} \lambda_j = G_i \quad (4')$$

$$\dot{\phi}^* = G^* + \lambda_i [f_i^* - k_{ij}^* q_j] \quad (5')$$

구조 응답 함수가 모든 시간에 대하여 수렴해야 하므로, 범함수 (1)식은 다음과 같은 콘볼루션(convolution) 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^\infty G[q_i(h,b,t^*),h] \delta(t-t^*) dt^* \\ &= \int_0^\infty G[q_i(h,b,t-t^*),h] \delta(t^*) dt^* \\ & \quad t^* \in [0,t], t \in [0,T] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 기호 t^* 와 t 는 적분의 더미(dummy) 변수와 가진의 최종 시간을 나타내고, $\delta(t^*)$ 는 0에서 작용된 Dirac delta 분포들이며, $\delta(t^*)$ 는 우함수 분포이다. 함수 $G(t^*)$ 는 전체 시간 영역 $[0,T]$ 에서 연속이라고 가정하면, 단위 임펄스(impulse) $\delta(t-t^*)$ 에서의 가중치는 $G(t^*) dt^*$ 이므로 (6)식은 이동된(shifted) 단위 임펄스의 선형 조합으로 해석할 수 있다.

$$G(t-t^*) \delta(t^*) = G(t) \delta(t^*) \quad (7)$$

앞의 경우와 유사한 도함수를 사용하면, 끝단 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{ij}(h,b) \ddot{\lambda}_j(\tau) - D_{ij}(h,b) \dot{\lambda}_j(\tau) \\ + K_{ij}(h,b) \lambda_j(\tau) = G_i(t) \delta(\tau) \\ \lambda(\tau=t) = 0, \dot{\lambda}(\tau=t) = 0 \\ \tau \in [t, 0], i, j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

이제, (2), (8)식을 풀면, 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^* = G^*(t) + \int_0^t \lambda_i(t^*) [f_i^*(t^*) - M_{ij}^* \ddot{q}_j(t^*) \\ - D_{ij}^* \dot{q}_j(t^*) - K_{ij}^* q_j(t^*)] dt^* \\ t^* \in [0,t], t \in [0,T] \end{aligned} \quad (9)$$

시간 응답의 문제에 대한 범함수로 정의되는 민감도는 모든 시간에 대하여 다음과 같은 계산과정을 따른다.

- (i) 0에서 t 까지 시간에 대하여 (2)식을 순방향 적분
- (ii) (8)식의 오른쪽을 결정하고 t 에서 0까지 시간에 대하여 역방향으로 이 방정식을 적분
- (iii) 방정식에 의해 t 에서 설계 민감도 변화율을

계산

일반적으로 다자유도계 (8)식은 앞에서 논의한 방법으로 풀 수 없다. 왜냐하면 이것은 우변의 Dirac delta 함수가 그 값보다 그 특성을 고려하여 정의된다고 보면 이것은 시간 τ 의 상함수가 아니며, 좌변에서는 일반화된 좌표가 연성이기 때문이다. 이러한 어려움을 피하기 위하여, 우선 (8)식에서 Rayleigh 형의 정규화된 모우드 형상 Q_{jz} , 진동수 ω_z 및 감쇠인자 ξ_z 를 통하여 일반화된 좌표 $\lambda_z(\tau)$ 의 정규화된 좌표 $\vartheta_z(\tau)$, $z=1, \dots, Z \ll N$ 으로의 변환을 사용하면, 다음과 같이 Z 개의 비연성 방정식 계로 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_z(\tau) - 2\xi_z\omega_z\dot{\vartheta}_z(\tau) + \omega_z^2\vartheta_z(\tau) \\ = Q_{zj}G_j(t)\delta(\tau) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\vartheta_z(t) = 0, \dot{\vartheta}_z(t) = 0$$

여기서,

$$\vartheta_z(\tau) = Q_{zj}\lambda_j(\tau), z=1, \dots, Z,$$

$$j=1, \dots, N$$

시간 t 에 고정된 크기의 임펄스 $Q_{zj}G_j$ 에 의해 가진 선형계처럼 (10)식의 z 번째 독립 수반 방정식을 해석하려면, 수반 시간 영역 $[t, 0]$ 에서 단위 충격가진 $\delta(\tau)$ 에 대한 계의 응답을 고려한다. 즉,

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_z(\tau) - 2\xi_z\omega_z\dot{\vartheta}_z(\tau) + \omega_z^2\vartheta_z(\tau) = \delta(\tau) \\ \vartheta_z(t) = 0, \dot{\vartheta}_z(t) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

끝단 조건(12)식이 0이므로, 이 식의 양쪽은 간격 $\Delta\tau = \varepsilon$ 의 시간에 대하여 적분될 수 있으므로, 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\varepsilon} [\ddot{\vartheta}_z(\tau) - 2\xi_z\omega_z\dot{\vartheta}_z(\tau) + \omega_z^2\vartheta_z(\tau)]d\tau \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+\varepsilon} \delta(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

이것은 초기 속도가 관성을 가지는 계에 전달되는 방법이며, 앞에서 언급한 내용을 고려하면, (12)식에 의해 서술된 단위 임펄스 강제 진동에 대한 응답은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_z(\tau) - 2\xi_z\omega_z\dot{\vartheta}_z(\tau) + \omega_z^2\vartheta_z(\tau) = 0 \\ \vartheta_z(t) = 0, \dot{\vartheta}_z(t) = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

계의 선형성 때문에, (10)식으로 나타내어지는 정

규화된 수반 응답은 시간 t 에서 평가된 실제 진폭 $Q_{zi}G_i$ 와 (14)식에 의해 서술된 단위 임펄스 응답에 비례한다. 결과적으로 (8)의 수반 응답은 (15)식과 같이 모우드 응답들의 중첩에 의해 얻어질 수 있다. 즉,

$$\lambda_j(\tau) = \sum_{i=1}^Z Q_{jz}Q_{zi}G_i(t)\vartheta_z(\tau) \quad \tau \in [t, 0], t \in [0, T], i, j = 1, \dots, N \quad (15)$$

2. 확률론적 구조 민감도

구조적 재료, 기하학, 그리고 하중의 불확정량을 방정식에 도입하기 위하여 2차 섭동법이 사용된다. 확률함수들 $M_{ij}, D_{ij}, K_{ij}, f_i, G_i, q_i, \lambda_i, M_{ij}^{*e}, D_{ij}^{*e}, K_{ij}^{*e}, f_i^{*e}, G_i^{*e}$ 에 대한 Taylor 전개는 주어진 미소 파라미터 θ 를 갖는 b_0^e 에 의해 나타낸 확률변수 b_r 의 공간적 기대치에 대하여 행한다. 예를 들면, 설계 변수 h_e 에 대한 강성 1차 도함수는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_{ij}^{*e}(h, b) = K_{ij}^{*e} + \theta K_{ij}^{*er} \Delta b^r \\ + \frac{1}{2} \theta^2 K_{ij}^{*ers} \Delta b^r \Delta b^s \end{aligned} \quad (16)$$

$$i, j = 1, \dots, N, e = 1, \dots, E, r, s = 1, \dots, R$$

여기서, $\theta \Delta b^r \equiv \delta b^r$ 는 b_0^e 에 대한 b^r 의 1차 변분을 나타낸다. $(\cdot)^e, (\cdot)^r, \text{와 } (\cdot)^s$ 는 각각 그들의 기대치에서 평가된 확률 변수에 대하여 기대치, 1차와 2차(혼합된) 편도함수를 나타낸다. 윗첨자 '0' 갖는 함수는 확정론적 함수이고, 반면 윗첨자 'r'과 's'를 갖는 함수는 확률함수를 의미한다. 이러한 확률 함수는 확률 함수의 1차의 두 모멘트를 통하여 표현 가능하다. 즉,

$$b_0^e = E(b^e) = \int_{-\infty}^{+\infty} b^e g(b^e) db^e \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Cov(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (b^r - b_0^r)(b^s - b_0^s) \\ g(b^r, b^s) db^r db^s \end{aligned} \quad (18)$$

또는

$$Cov(b^r, b^s) = R(b^r, b^s) \sqrt{[Var(b^r) Var(b^s)]} \quad (19)$$

여기서,

$$R(b^r, b^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b^r b^s g(b^r, b^s) db^r db^s \quad (20)$$

$$\text{Var}(b^r) = \alpha^2 E^2(b^r) \quad (21)$$

여기서, $E(b^r)$, $Cov(b^r, b^s)$, $R(b^r, b^s)$, $Var(b^r)$, $g(b^r, b^s)$ 및 α 는 각각 기대치, 공분산, 상호 상관 계수, 분산, 결합 확률 밀도 함수 및 변동 계수를 나타낸다. 확률 변수에 대하여 질량, 감쇠, 강성과 하중의 편도함수를 포함하는 함수는 편미분, 유한차분법 또는 최소자승순정법으로 계산할 수 있으며, 편도함수 $G^{0\cdot r}$, $G^{\cdot 0r}$, $G^{\cdot \cdot rs}$, G^0 , G_i^r 및 G_i^r 는 일반적으로 확률 변수의 음함수이므로, 유한차분법이나 최소자승순정법으로 계산할 수 있다. M_{ij} , D_{ij} , K_{ij} , f_i , G_i , q_i , λ_i 에 대하여 (16)식과 유사하게 (2), (4)식에 확장식을 대입하고 1, θ , θ^2 의 차수항으로 모으면, 구조의 0차, 1차, 2차식과 수반계는 다음과 같이 각각 얻어질 수 있다.

• 0차 방정식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^0 q_j^0(t) = f_i^0(t) \quad (22)$$

$$M_{ij}^0 \ddot{\lambda}_j^0(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^0(\tau) = G_i^0(\tau) \delta(\tau) \quad (23)$$

• 1차 방정식의 R쌍 ($r=1, \dots, R$) :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^r(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^r(t) + K_{ij}^0 q_j^r(t) = f_i^r(t) - [M_{ij}^r \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^r \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^r q_j^0(t)] \quad (24)$$

$$M_{ij}^0 \ddot{\lambda}_j^r(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^r(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^r(\tau) = G_i^r(\tau) \delta(\tau) - [M_{ij}^r \lambda_j^0(\tau) + D_{ij}^r \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^r \lambda_j^0(\tau)] \quad (25)$$

• 2차 방정식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^{(2)}(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^{(2)}(t) + K_{ij}^0 q_j^{(2)}(t) = \left(\frac{1}{2} f_i^{(2)}(t) - [M_{ij}^{(2)} \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^{(2)} \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^{(2)} q_j^0(t)]\right) - \frac{1}{2} [M_{ij}^{(2)} \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^{(2)} \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^{(2)} q_j^0(t)] \text{Cov}(b^r, b^s) \quad (26)$$

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^{(2)}(\tau) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^{(2)}(\tau) + K_{ij}^0 q_j^{(2)}(\tau) = \left(\frac{1}{2} G_i^{(2)}(\tau) \delta(\tau) - [M_{ij}^{(2)} \ddot{\lambda}_j^0(\tau) - D_{ij}^{(2)} \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^{(2)} \lambda_j^0(\tau)]\right) - \frac{1}{2} [M_{ij}^{(2)} \lambda_j^0(\tau) - D_{ij}^{(2)} \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^{(2)} \lambda_j^0(\tau)] \text{Cov}(b^r, b^s) \quad (27)$$

여기서, $r, s=1, \dots, R$, $i, j=1, \dots, N$ 이고

$$q_j^{(2)} = \frac{1}{2} q_j^{(2)} \text{Cov}(b^r, b^s) \quad (28)$$

$$\lambda_j^{(2)} = -\frac{1}{2} \lambda_j^{(2)} \text{Cov}(b^r, b^s) \quad (29)$$

공분산 함수의 정의에 의하면, 2차 방정식은 2차항과 결합밀도함수를 곱하고 확률장 b^r 의 영역에 걸쳐 적분하여 얻어진다.

(26), (27)식의 이중합을 단일합으로 감소시키기 위하여, 상관 확률 변수 b^r 을 표준 고유치 문제를 통해 일련의 무상관 확률 변수 c^v 로 변환한다.

$$\text{Cov}(b^r, b^s) U = \text{Var}(c^v) U \quad (30)$$

여기서, 공분산 행렬 $\text{Cov}(b^r, b^s)$, $r, s=1, \dots, R$ 은 양의 값으로 한정한다. U 는 직교 $R \times R$ 차원의 기초행렬이며, $\text{Var}(c^v)$ 는 R -차원의 대각 행렬이다. 가장 낮은 모우드를 사용하는 모우드 해석 문제와 대조적으로, 단지 V 개($V \ll R$)만 사용되고, $\text{Var}(c^v)$ 의 가장 높은 값들이 많은 확률 분포의 주요한 특징을 시뮬레이션하기 위하여 요구된다. 확률벡터 b^r 이 하중, 기하학적 및 재료적 불확정량 등의 3개의 무상관 부분으로 구성된다면, $\text{Cov}(b^r, b^s)$ 의 3부분의 각각에 대한 가장 높은 모우드는 $\text{Var}(c^v)$ 를 얻기 위해 유도된다.

$$c^v = U_{rv} b^r, E(c^v) = U_{rv} b_0^v, \partial(\cdot) / \partial c^v = U_{rv} \partial(\cdot) / \partial b^r, r=1, \dots, R, v=1, \dots, V \quad (31)$$

(22)~(27)식에 (30), (31)식을 대입하면 혼합된 도함수 $(\cdot)^{rs}$ 는 2차 도함수 $(\cdot)^{rr}$ 으로 되며, $r, s(r, s=1, \dots, R)$ 에 대한 이중합은 $v, v=1, \dots, V$ 에 대한 단일합으로 감소한다. 이와 같이 무상관 확률변수 c^v 를 사용하면 (22)~(27)식은 다음 식과 같이 된다.

• 변환된 0차 방정식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^0 q_j^0(t) = f_i^0(t) \quad (32)$$

$$M_{ij}^0 \ddot{\lambda}_j^0(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^0(\tau) = g_i^0(\tau) \quad (33)$$

• 변환된 1차 방정식의 V 쌍 ($r=1, \dots, V$) :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^r(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^r(t) + K_{ij}^0 q_j^r(t) = p_i^r(t) \quad (34)$$

$$M_{ij}^0 \ddot{\lambda}_j^v(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^v(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^v(\tau) = g_i^v(\tau) \quad (35)$$

• 변환된 2차 방정식의 한 쌍 :

$$M_{ij}^0 \ddot{q}_j^{(2)}(t) + D_{ij}^0 \dot{q}_j^{(2)}(t) + K_{ij}^0 q_j^{(2)}(t) = p_i^{(2)}(t) \quad (36)$$

$$M_{ij}^0 \ddot{\lambda}_j^{(2)}(\tau) - D_{ij}^0 \dot{\lambda}_j^{(2)}(\tau) + K_{ij}^0 \lambda_j^{(2)}(\tau) = g_i^{(2)}(\tau) \quad (37)$$

여기서,

$$q_j^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V q_j^{vv} \text{Var}(c^v) \quad (38)$$

$$\lambda_j^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V \lambda_j^{vv} \text{Var}(c^v) \quad (39)$$

$$g_i^0(\tau) = G^0 \cdot i(t) \delta(\tau) \quad (40)$$

$$p_i^v(t) = f_i^v(t) - [M_{ij}^v \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^v \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^v q_j^0(t)] \quad (41)$$

$$g_i^v(t) = G_i^v(t) \delta(\tau) - [M_{ij}^v \ddot{\lambda}_j^0(\tau) + D_{ij}^v \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^v \lambda_j^0(\tau)] \quad (42)$$

$$p_i^{(2)}(t) = \sum_{j=1}^V \left(\frac{1}{2} f_i^{vv}(t) - [M_{ij}^v \ddot{q}_j^v(t) + D_{ij}^v \dot{q}_j^v(t) + K_{ij}^v q_j^v(t)] - \frac{1}{2} [M_{ij}^{vv} \ddot{q}_j^0(t) + D_{ij}^{vv} \dot{q}_j^0(t) + K_{ij}^{vv} q_j^0(t)] \text{Var}(c^v) \right) \quad (43)$$

$$g_i^{(2)}(\tau) = \sum_{v=1}^V \left(\frac{1}{2} G_i^{vv}(\tau) \delta(\tau) - [M_{ij}^v \ddot{\lambda}_j^v(\tau) + D_{ij}^v \dot{\lambda}_j^v(\tau) + K_{ij}^v \lambda_j^v(\tau)] - \frac{1}{2} [M_{ij}^{vv} \ddot{\lambda}_j^0(\tau) + D_{ij}^{vv} \dot{\lambda}_j^0(\tau) + K_{ij}^{vv} \lambda_j^0(\tau)] \text{Var}(c^v) \right) \quad (44)$$

앞의 식에서 $(\cdot)^v$ 와 $(\cdot)^{vv}$ 는 c^v 에 대한 1차와 2차 도함수를 나타낸다. 더우기 일반화된 좌표 $q_j(t)$ 와 $\lambda_j(\tau)$ 로부터 정규화된 좌표 $\gamma_z(t)$ 와 $\vartheta_z(\tau)$ 로의 변환 (10)식은 (32)~(37)식을 축소하기 위해서 사용된다.

• 비연성 0차 방정식의 Z쌍 :

$$\ddot{\gamma}_z^0(t) + 2\xi_z \omega_z \dot{\gamma}_z^0(t) + \omega_z^2 \gamma_z^0(t) = p_z^0(t) \quad (45)$$

$$\ddot{\vartheta}_z^0(\tau) - 2\xi_z \omega_z \dot{\vartheta}_z^0(\tau) + \omega_z^2 \vartheta_z^0(\tau) = g_z^0(\tau) \quad (46)$$

• 비연성 1차 방정식의 $Z \times V$ 쌍 :

$$\dot{\gamma}_z^v(t) + 2\xi_z \omega_z \dot{\gamma}_z^v(t) + \omega_z^2 \gamma_z^v(t) = p_z^v(t) \quad (47)$$

$$\dot{\vartheta}_z^v(\tau) - \xi_z \omega_z \dot{\vartheta}_z^v(\tau) + \omega_z^2 \vartheta_z^v(\tau) = g_z^v(\tau) \quad (48)$$

• 비연성 2차 방정식의 Z 쌍 :

$$\ddot{\gamma}_z^{(2)}(t) + 2\xi_z \omega_z \dot{\gamma}_z^{(2)}(t) + \omega_z^2 \gamma_z^{(2)}(t) = p_z^{(2)}(t) \quad (49)$$

$$\ddot{\vartheta}_z^{(2)}(\tau) - 2\xi_z \omega_z \dot{\vartheta}_z^{(2)}(\tau) + \omega_z^2 \vartheta_z^{(2)}(\tau) = g_z^{(2)}(\tau) \quad (50)$$

아래첨자 z 에 대한 합은 (45)~(50)식에서는 포함되어 있지 않고, 다음과 같은 기호를 사용한다.

$$\gamma_z^0(t) = Q_{zj} q_j^0(t), \quad \gamma_z^v(t) = Q_{zj} q_j^v(t), \quad \gamma_z^{(2)}(t) = Q_{zj} q_j^{(2)}(t) \quad (51)$$

$$\vartheta_z^0(\tau) = Q_{zj} \lambda_j^0(\tau), \quad \vartheta_z^v(\tau) = Q_{zj} \lambda_j^v(\tau), \quad \vartheta_z^{(2)}(\tau) = Q_{zj} \lambda_j^{(2)}(\tau) \quad (52)$$

$$p_z^0(t) = Q_{zj} f_j^0(t), \quad p_z^v(t) = Q_{zj} f_j^v(t), \quad p_z^{(2)}(t) = Q_{zj} p_j^{(2)}(t) \quad (53)$$

$$g_z^0(\tau) = Q_{zj} g_j^0(\tau), \quad g_z^v(\tau) = Q_{zj} g_j^v(\tau), \quad g_z^{(2)}(\tau) = Q_{zj} g_j^{(2)}(\tau) \quad (54)$$

$$z = 1, \dots, Z, \quad i, j = 1, \dots, N$$

(32)~(37)식이 풀어지면, 구조 응답의 민감도에 대한 확률 분포를 계산할 수 있다. 민감도 변화율의 기대치와 공분산은 아래와 같이 된다.

$$E(\phi^{\cdot\cdot}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{\cdot\cdot} g(b^{\cdot\cdot}) db^{\cdot\cdot} \quad (55)$$

$$\text{Cov}(\phi^{\cdot\cdot}, \phi^{\cdot\cdot}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi^{\cdot\cdot} - E(\phi^{\cdot\cdot})] [\phi^{\cdot\cdot'} - E(\phi^{\cdot\cdot'})] g(b^{\cdot\cdot}, b^{\cdot\cdot'}) db^{\cdot\cdot} db^{\cdot\cdot'} \quad (56)$$

$q_i, \lambda_i, M_{ij}^{\cdot\cdot}, D_{ij}^{\cdot\cdot}, K_{ij}^{\cdot\cdot}, f_i^{\cdot\cdot}, G^{\cdot\cdot}$ 에 대하여 확장식을 (55), (56)식에 대입하고, 2차까지 $b^{\cdot\cdot}$ 의 변동을 무시하면, 그리고 정의에 의해 1차변동을 포함한 항이 사라지게 되며, 시간 $t, \tau = [0, T]$ 에서 계산된, 변환된 확률 변수의 항으로 표현된 민감도 변화율의 정확한 2차 기대치와 정확한 1차 공분산을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$E(\phi^{e,v}(t)) = G^{0,e,v}(t) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V G^{e,uv} \text{Var}(c^v) + \int_0^t [A_i^e(\lambda_i^0 + \lambda_i^{(2)}) - F_i^{e2} \lambda_i^0 + \sum_{v=1}^V (B_i^{ev} \lambda_i^v + C_i^{evv} \lambda_i^0) \text{Var}(c^v)] d\tau \quad (57)$$

$$\text{Cov}(\phi^{e,v}(t), \phi^{f,v}(t)) = \sum_{v=1}^V \{ G^{e,uv}(t) G^{f,uv}(t) + G^{e,uv}(t) \int_0^t [A_i^f(\tau) \lambda_i^v(\tau) + B_i^{fv}(\tau) \lambda_i^0(\tau)] d\tau + G^{f,uv}(t) \int_0^t [A_i^e(\tau) \lambda_i^v(\tau) + B_i^{ev}(\tau) \lambda_i^0(\tau)] d\tau + \int_0^t \int_0^t [A_i^e(\tau) A_j^f(v) \lambda_i^v(\tau) \lambda_j^v(v) + B_i^{ev}(\tau) B_j^{fv}(v) \lambda_i^0(\tau) \lambda_j^0(v) + [A_i^e(\tau) B_j^{fv}(v) + A_j^f(v) B_i^{ev}(\tau)] \lambda_i^v(\tau) \lambda_j^0(v)] d\tau dv \} \text{Var}(c^v) \quad (58)$$

여기서, τ, v 는 적분의 더미 변수 $\tau, v \in [0, t], t \in [0, T]$ 이다.

$$A_i^e = f_i^{0,e} - D_i^e \quad (59)$$

$$B_i^{ev} = f_i^{e,v} - E_i^{ev} - G_i^{ev} \quad (60)$$

$$C_i^{evv} = \frac{1}{2} f_i^{e,uv} - H_i^{evv} - \frac{1}{2} K_i^{evv} \quad (61)$$

$$D_i^e = M_{ij}^{0,e} \ddot{q}_j + D_{ij}^{0,e} \dot{q}_j + K_{ij}^{0,e} q_j^0 \quad (62)$$

$$E_i^{ev} = M_{ij}^{0,e,v} \ddot{q}_j + D_{ij}^{0,e,v} \dot{q}_j + K_{ij}^{0,e,v} q_j^0 \quad (63)$$

$$F_i^{e2} = M_{ij}^{0,e} \ddot{q}_j^{(2)} + D_{ij}^{0,e} \dot{q}_j^{(2)} + K_{ij}^{0,e} q_j^{(2)} \quad (64)$$

$$G_i^{ev} = M_{ij}^{e,v} \ddot{q}_j + D_{ij}^{e,v} \dot{q}_j + K_{ij}^{e,v} q_j^0 \quad (65)$$

$$H_i^{ev} = M_{ij}^{e,v} \ddot{q}_j + D_{ij}^{e,v} \dot{q}_j + K_{ij}^{e,v} q_j^0 \quad (66)$$

$$K_i^{evv} = M_{ij}^{e,uv} \ddot{q}_j + D_{ij}^{e,uv} \dot{q}_j + K_{ij}^{e,uv} q_j^0 \text{ (no sum on } v) \quad (67)$$

$e, f = 1, \dots, R; v = 1, \dots, V; i, j = 1, \dots, N$ 유사한 방법으로, 정적인 경우에 대하여, 0차, 1차, 2차 구조 방정식과 수반 방정식의 계를 얻을 수 있다. 변환된 확률 변수를 사용하면, 민감도 변화율의 1차의 두 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E(\phi^{e,v}) = G^{0,e,v} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V G^{e,uv} \text{Var}(c^v) + A_i^e (\lambda_i^0 + \lambda_i^{(2)}) - k_{ij}^{0,e} q_j^{(2)} \lambda_i^0 + \sum_{v=1}^V (B_i^{ev} \lambda_i^v + C_i^{evv} \lambda_i^0) \text{Var}(c^v) \quad (57)'$$

$$\text{Cov}(\phi^{e,v}, \phi^{f,v}) = \sum_{v=1}^V [G^{e,uv} G^{f,uv} + (G^{e,uv} A_i^f + G^{f,uv} A_i^e) \lambda_i^v + (G^{e,uv} B_i^{fv} + G^{f,uv} B_i^{ev}) \lambda_i^0 + A_i^e A_j^f \lambda_i^v \lambda_j^v + (A_i^e B_j^{fv} + A_j^f B_i^{ev}) \lambda_i^v \lambda_j^0 + B_i^{ev} B_j^{fv} \lambda_i^0 \lambda_j^0] \text{Var}(c^v) \quad (58)'$$

여기서, $A_i^e, B_i^{ev}, C_i^{evv}$ 는 (59)~(61)식들로 정의되며, 관성항과 감쇠항은 무시한다.

수치 해석 결과 및 고찰

1. 해석 대상 구조물

1.2 2차원 프레임 구조물

문헌¹⁷⁾의 해석 결과와 비교하기 위해서 Fig. 1과 같은 문형(門型) 프레임(portal frame) 구조물에 대한 계산을 수행하였다. 요소의 수는, 수직 및 경사 보 부재를 각각 25개, 총 100개의 요소로 구성하였으며, Fig. 2와 같이 시간에 따라 변하는 하중 함수 $Q(\tau)$ 를 수직 방향으로 적용하였다. 요소의 횡단면적, $A_\rho (\rho = 1, 2, \dots, 100)$ 를 확률 설계 변수(random design variable)로 가정한다. 이 구조물의 구조 응답 범함수는 다음과 같다.

$$\phi(\tau) = \frac{[q(\tau)]^2}{[q^{(A)}]} - 1 \leq 0$$

여기서, $q(\tau)$ 는 해당 절점에서의 변위이고, $q^{(A)}$ 는 0.012로 설정한 허용 변위값이다. 단면적에 대한 각각의 기대치, 상관함수와 변분 계수는 다음과 같이 가정한다.

$$E[A_\rho] = A^0 = 10.0$$

$$R(A_\rho, A_s) = \exp\left(-\frac{|x_\rho - x_s|}{\lambda}\right)$$

$$\alpha = 0.05, \lambda = 0.5$$

$$\text{while, } x_\rho (x_1 = 0.0, x_2 = 0.01, \dots, x_{100} = 1.0)$$

또, 확정론적 물리량은 다음과 같이 가정한다.

- Young's modulus, $E = 2.0 \times 10^6 (\text{kgf/cm}^2)$
- Poisson's ratio, $\nu = 0.2$
- Mass density, $\rho = 0.001 (\text{kg/cm}^3)$
- Damping factor, $\xi = 0.05$

한편, 초기치 문제를 해석하기 위하여, 이중 중첩법은 10개의 가장 낮은 고유치 쌍을 사용하여 100개의 상관 확률 변수를 일련의 무상관 변수로 변환시키며, 시간구간은 $\Delta t=0.001$ 로 하고, 512개의 표본 간격을 사용하여 방정식을 각 시간에 대하여 적분한다. 세속항(secular term)은 진동수 범위의 인자 $r=0.15$ 그리고 1,024개의 푸리에 항을 사용하여 제거한다.

1.2 3차원 프레임 구조물

Fig. 3과 같이 각 10개의 요소, 총 80개의 요소를 갖는, 수직 및 경사 보 부재로 구성된 3차원 프레임 구조물에 대한 해석을 수행하였다. 하중을 제외한 다른 조건들은 1.1절의 2차원 프레임 구조물의 경우와 같으며, Fig. 4에서 이 구조물에 적용된 하중 함수를 보인다. 2차원의 경우와 마찬가지로 요소의 횡단면적 $A_\rho(\rho=1, 2, \dots, 100)$ 를 확률 설계 변수로 가정하며, 확정론적 물리량이 다음과 같이 다양하게 주어질 경우들에 대하여 계산하였다.

2. 해석결과 및 고찰

2.1 2차원 프레임의 해석 결과

본 해석 예에서는 프레임 부재의 단면적을 확률 변수로 하고, Fig. 1과 같은 2차원 문형 프레임(portal frame)의 정점(51절점)에 Fig. 2와 같은 수직방향의 충격하중이 가해진 경우이다. 일반적인 유한요소법의 충격하중을 받는 동적응답해석으로서 확정론적(deterministic)해석법에 의한 51절점에서의 수직변위와 26절점에서의 수평변위의 동적응답(Fig. 5), 확률론적(stochastic)해석에 의한 분산과 공분산에 대한 동적응답(Fig. 6), 확정론적 및 확률론적 방법에 의한 민감도의 동적응답(Fig. 7), 그리고 확률론적 방법에 의한 민감도의 분산과 공분산의 동적응답(Fig. 8)에 있어서, 문헌¹⁷⁾의 결과와 아주 유사한 응답을 보이며, 본 연구에서의 수치해석 결과의 타당성과 유용성을 확인할 수 있다.

Fig. 5는 26절점의 수평 변위와 51절점의 수직 변위를, 확정론적 및 확률론적 유한요소법으로 계산하여 나타낸 것이다. 두 방법에 의한 결과가 비교적 잘 일치함을 볼 수 있는데, 피크치에서 근소

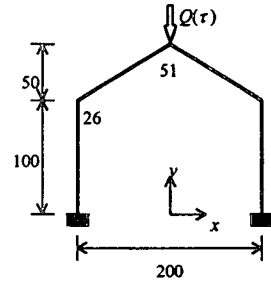


Fig. 1. 2D frame of 100-elements.

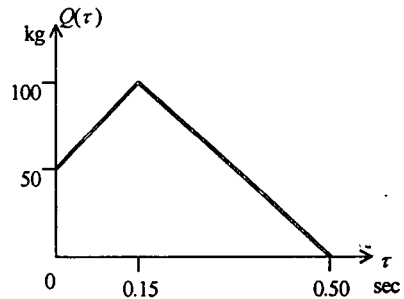


Fig. 2. Load function applied to 2D frame.

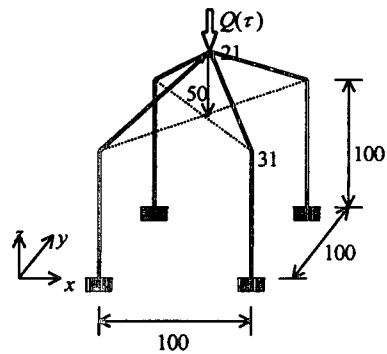


Fig. 3. 3D frame of 80-elements.

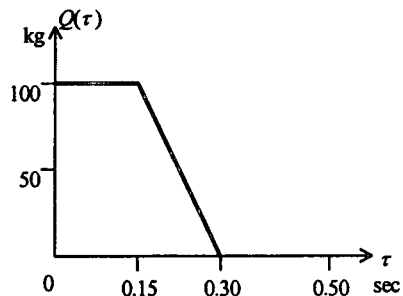


Fig. 4. Load function applied to 3D frame.

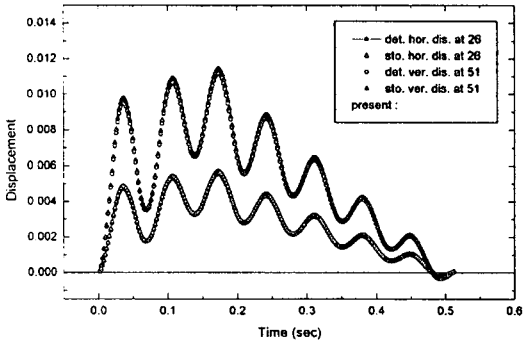


Fig. 5. Displacement of deterministic and stochastic analysis for 2D frame structure.

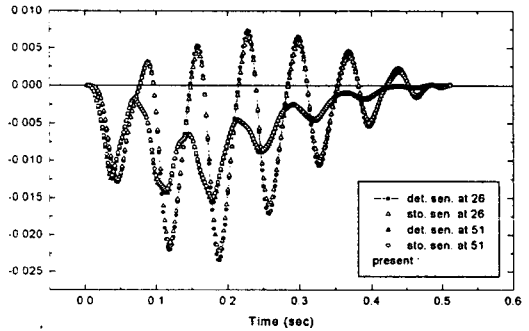


Fig. 7. Expectation of sensitivity of deterministic and stochastic analysis for 2D frame structure.

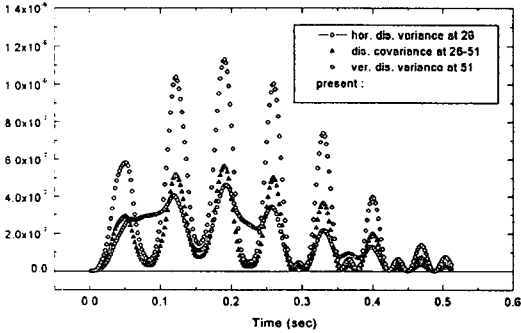


Fig. 6. Variance and crosscovariance of displacement in stochastic analysis for 2D frame structure.

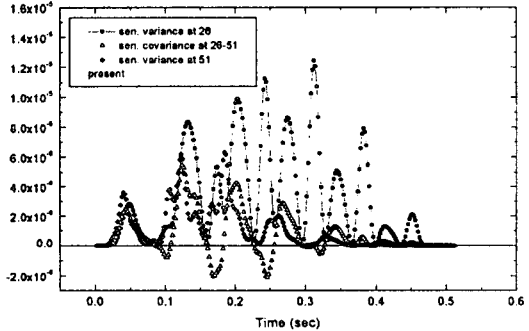


Fig. 8. Variance and cross-covariance of sensitivity in stochastic analysis for 2D frame structure.

한 차이를 보임을 알 수 있다.

Fig. 6은 26절점의 수평 변위와 51절점의 수직 변위에 대한 분산과 공분산을 나타내고 있다. 하중이 가해진 51절점에서 변위의 분산이 크게 나타나고 있으며, 26절점에서의 수평 변위의 분산은 상대적으로 적음을 볼 수가 있다.

Fig. 7은 확률론적 유한요소법과 확률론적 유한요소법에서의 설계 민감도의 기대치를 비교해서 보여주고 있다. 하중을 가한 51절점보다 26절점에서의 민감도의 크기와 진폭이 훨씬 크게 나타나며, 하중이 가해진 51절점의 민감도에 비해, 26절점에서의 민감도가 시간적으로 조금 늦게 나타난다. 이와 같은 하중 조건에서는 26절점의 수평 변위가 단면적 변화에 대해 더 큰 민감도를 나타냄을 알 수 있다. 확률론적 및 확률론적 방법에 의한 결과는 비교적 잘 일치함을 알 수 있으며, 극치에

서 약간의 차이가 있음을 나타낸다.

Fig. 8은 26절점과 51절점에서 나타난 민감도의 분산과 공분산 관계를 보여준다. 51절점에 비해 26절점에서 상대적으로 큰 민감도의 분산을 나타내고 있다.

2.2 3차원 프레임의 해석 결과

본 해석 예에서는 개발한 수치해석 프로그램에 의해서 Fig. 3과 같은 3차원 프레임 구조의 부재 단면적을 확률변수로 하고, Fig. 4와 같은 수직방향의 충격하중 함수를 정점(21절점)에 가하였다.

적용한 구조물의 물성치는 영계수(E)와 포아송비(ν)는 2차원의 경우와 같이하고, 질량밀도와(ρ)와 감쇠계수(ξ)는 Table 1과 같이

- i) $\rho=0.001, \xi=0.02$ 로 했을때의 해석결과 : Fig. 9~12

Table 1. Properties of calculated 3D frame structure

Young's modulus, $E(kg/cm^2)$		2.0×10^6
Poisson's ratio, ν	0.2	
Mass density $\rho(kg/cm^3)$	Damping factor ξ	<Response>
0.001	0.02	Fig. 9~12
0.002	0.002	Fig. 13~16

ii) $\rho=0.002, \xi=0.002$ 로 했을때의 해석결과
: Fig. 13~16

에 확정론적 및 확률론적인 변위특성(Fig. 9,13)과 민감도(Fig. 11, 15), 변위(Fig. 10, 14)와 확률론적 민감도(Fig. 12, 16)의 확률응답(분산과 공분산)에 대한 동적응답을 보인다.

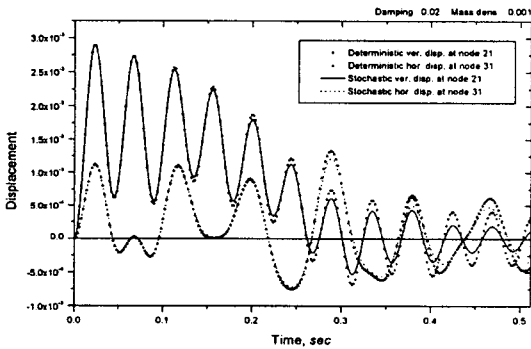


Fig. 9. Displacement of deterministic and stochastic analysis for 3D frame structure.

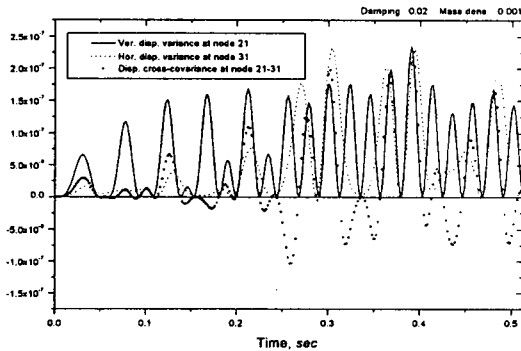


Fig. 10. Variance and cross-covariance of displacement in stochastic analysis for 3D frame structure.

Fig. 9는 21절점에서의 수직변위와 31절점에서의 수평변위에 대한 확정론적 및 확률론적 방법으로 계산하여 비교한 것으로서, 두 방법에 의한 결과가 피크치에서 근소한 차이를 보이거나 비교적 잘 일치함을 알 수 있으며, 하중이 감소하기 시작하는 0.15초 근방에서부터 시간이 경과할수록 피크치의 근소한 차가 약간씩 증가함을 알 수 있다. 그리고 21절점의 수직변위 응답의 경우가 31절점 수평변위 응답의 경우보다 피크치의 근사한 차의 정도가 시간이 경과할수록 크게 나타남을 볼 수 있다.

Fig. 10은 21절점의 수직변위 응답, 31절점의 수평변위 응답의 분산 및 21-31절점 변위의 공분산을 나타낸다. 2차원의 경우와 달리 하중이 감소하는 0.15초 근방에서부터 공분산의 시간이력 응답에 음의 값이 나타나기 시작하며, 21절점의 수

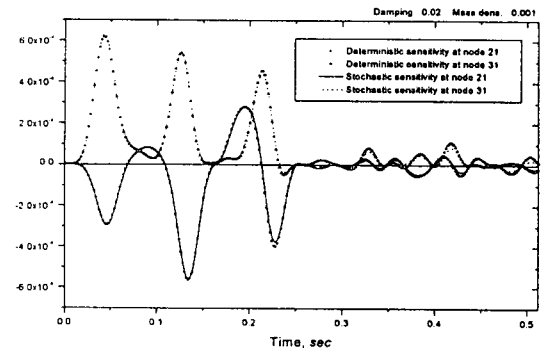


Fig. 11. Expectation of sensitivity of deterministic and stochastic analysis for 3D frame structure.

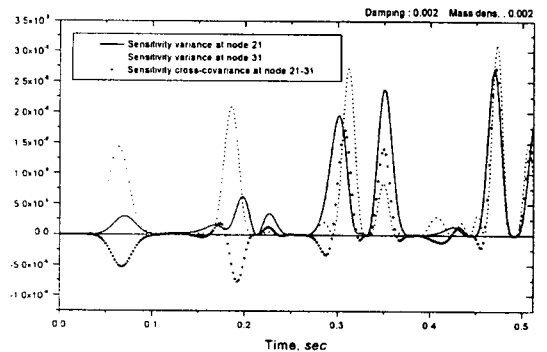


Fig. 12. Variance and cross-covariance of sensitivity in stochastic analysis for 3D frame structure.

직 변위의 분산은 하중이 감소하기 시작하는 0.15초 부근에서부터 하중이 끝나는 0.3초를 지나서 0.4초 근방까지 거의 비슷한 응답을 보인다.

Fig. 11은 21 및 31절점에서의 확정론적 민감도와 확률론적 민감도의 응답을 나타내며, 민감도의 경우에도 0.2초 근방에서부터 피크치에서 근소한 차이를 보이거나 대체로 두 경우가 잘 일치함을 보인다. 또한, 하중이 감소하기 시작하는 0.15초까지 21절점과 31절점에서 거의 정반대의 응답특성을 보이다가, 0.25초 근방에서부터 민감도 응답이 현격하게 줄어들음을 나타낸다.

Fig. 12는 21 및 31절점에서 민감도의 분산 그리고 21-31절점에서 민감도의 공분산을 나타내며, 2차원의 경우와 아주 다른 특성을 보인다. 즉, 21절점에서 0.05초 및 0.15초 부근에서 피크치가 나타나고, 이들 분산치에 비해 0.2초 부근에서 4배, 5배

큰 분산응답특성을 보이다가 다시 현격하게 적은 분산응답이 거의 주기적으로 나타난다. 또 31절점에서는 0.05초 및 0.15초 부근에서의 응답이 70% 정도 크기의 피크치가 나타나며, 하중이 끝나는 0.3초로부터 다시 현저하게 크기가 줄어든 크기의 응답특성은 21절점에서의 경향과 비슷하다.

21절점에서의 수직변위와 31절점에서의 수평변위에 대한 확정론적 및 확률론적 방법의 두가지 해석법에 의한 결과 비교로서, Fig. 13($\xi=0.002/\rho=0.002$)의 응답특성은 Fig. 9($\xi=0.02/\rho=0.001$)의 변위의 시간응답특성과 거의 비슷한 경향을 보이며, 절대치의 크기도 크게 차이가 나타나지 않음을 알 수 있다.

21절점의 수직변위응답, 31절점의 수평변위 응답의 분산 및 21-31절점변위의 공분산으로, Fig.

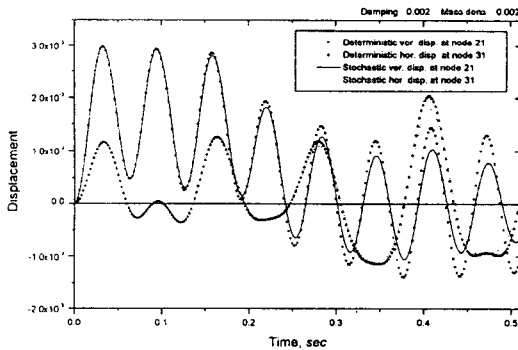


Fig. 13. Displacement of deterministic and stochastic analysis for 3D frame structure.

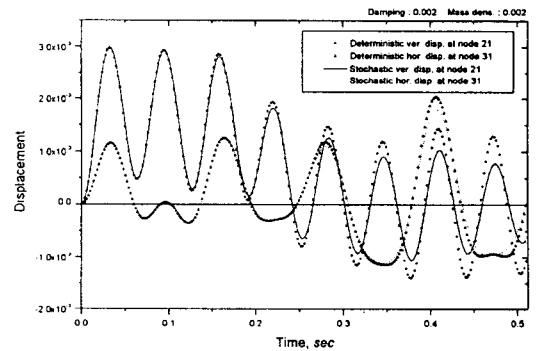


Fig. 15. Expectation of sensitivity of deterministic and stochastic and stochastic analysis for 3D frame structure.

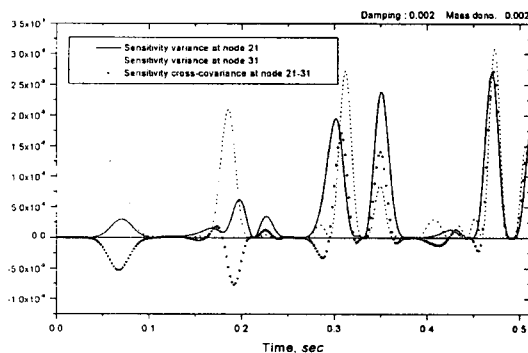


Fig. 14. Variance and cross-covariance of displacement in stochastic analysis for 3D frame structure.

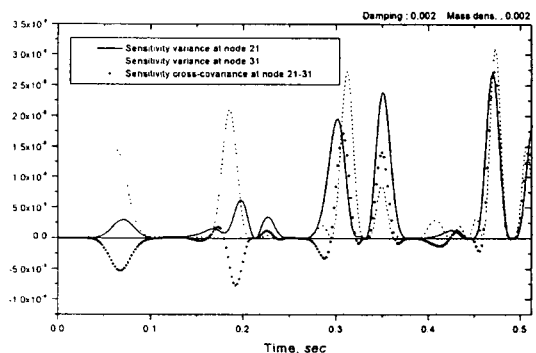


Fig. 16. Variance and cross-covariance of sensitivity in stochastic analysis for 3D frame structure.

14($\xi=0.002/\rho=0.002$)의 응답특성은, Fig. 10($\xi=0.02/\rho=0.001$)과 다소 다른 특성을 보인다. 즉, Fig. 10에 비해 감쇠인자를 1/10로 줄이면, 21절점에서의 수직변위의 분산은 점점 증가하는 경향을 보인다.

21절점 및 31절점에서의 두 방법의 민감도 응답의 결과 비교로서, Fig. 15($\xi=0.002/\rho=0.002$)의 응답특성은 Fig. 11($\xi=0.02/\rho=0.001$)과 아주 유사한 특성을 보인다.

21절점 및 31절점에서 민감도의 분산 그리고 21-31절점에서 민감도의 공분산응답의 결과 비교로서, Fig. 16($\xi=0.002/\rho=0.002$)의 응답특성은 Fig. 12($\xi=0.02/\rho=0.001$)의 감쇠인자와 질량 밀도가 다른 경우에, 피크치 발생의 시간대가 상이하며, 피크치의 절대치가 아주 다르게 나타남을 알 수 있다.

결 론

구조물의 기하학적, 재료적 특성 및 하중과 같은 매개변수를 확률론적 변수로 가정하여 서술한 변분을 이용한 확률 유한요소법을 정식화하고, 구조 응답의 민감도를, 현재 범용 코드로 이용되는 유한요소 코드를 사용하여 검토할 수 있음을 간단한 구조물의 동적 응답의 수치해석 예(문헌의 해석결과와 비교하기 위한 2차원 프레임과 질량밀도와 감쇠특성을 달리한 3차원 프레임 구조물)를 통해서 보이고자 하였으며, 그 결과를 기존의 결과와 비교하여 타당성 및 유용성을 확인하였다.

본 논문에서 제시된 확률유한요소법을 이용하여 기존의 유한요소법이 다룰 수 없었던, 실제 구조물에 내재할 수 있는 불확정성을 갖는 변수들을 수학적으로 완전하게 정식화할 수 있고, 실제 계산상의 문제에 있어서도 확정론적인 방법에 의한 결과와 유사한 경향을 보임으로써 실용상의 오류가 없을 것으로 생각되어진다. 뿐만 아니라, 확률 유한요소법은 유한요소 모델링과 계산 수행의 측면에서 구조 설계 민감도 해석 문제와도 밀접하게 연관되어 있어서, 구조 응답의 민감도 해석 차원에서도 효과적인 정식화 및 계산 수행을 가능하게 할 수 있다. 사실상 구조 설계 민감도와 확률유한

요소법의 정식화는 섭동법에 근거를 두고 있으며 일차 섭동법을 가정하면, 확률유한요소법과 구조 설계 민감도의 모델 해석은 거의 등가인 결과를 나타냄을 확인할 수 있었다.

확률적으로 변동하는 설계 변수 때문에 실제 구조물을 해석하는 데 있어 이 변수를 무시하면 심각한 경우는 아주 위험한 결과를 초래할 수도 있다. 이러한 설계 장애를 극복하기 위하여 확률론적인 해석이 불가피하며, 아울러 구조 민감도 해석이 수행되어져야 한다. 그리고 민감도 해석은 단 한번의 해석으로 그 구조물의 기대치와 공분산을 얻을 수 있어 아주 효과적인 방법으로 간주된다. 그리고 이 알고리즘은 기존의 유한요소법에 쉽게 적용할 수 있다.

기존의 연구에서는 아직 구조물을 확률적으로 다루는 연구 결과가 거의 없는 실정으로 향후 복잡한 대규모 구조물에 본 논문의 확률유한요소법을 이용한 동적 해석에 대한 연구 결과를 적용하면 좋은 결과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

- 1) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V.(1984) : Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, N.Y.
- 2) Ryu, Y. S., Haririan, M. and Arora, J. S.(1985) : Structural Design Sensitivity Analysis of Non-linear Response, Comput. Struct., 21, 245~255.
- 3) Mroz, Z. and Haftka, R. T.(1986) : 1st and 2nd order Sensitivity Analysis of Non-linear Systems, AIAA J.,24, 1187~1192.
- 4) Lim, O. K. *et al*(1994) : Structural Optimization using Stochastic Finite Element Method, 大韓機械學會 論文集, 18(8), 1920~1929.
- 5) Shinozuka, M.(1987) : Structural Response Variability, J. Eng. Mech., ASCE.,113(6), 825~840.
- 6) Vanmarcke, E. and Grigoriu, M.(1983) : Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams, J. Eng. Mech., 109(5), 1203-1214.
- 7) Bucher, C. G.(1988) : Structural Res-ponse Variability II, J. Eng. Mech., ASCE, 114(12).

- 8) Deodatis, G.(1991) : Weighted Integr-al Method I : Stochastic Stiffness Matrix, J. Eng. Mech., ASCE, 117(8).
- 9) Benaroya, H. and Rehak, M.(1988) : Finite Element Methods in Probabilistic Structural Analysis : A Selective Review, Appl. Mech. Rev., 41(5), 201~213.
- 10) Liu, W. K., Belytschko, T. and Mani, A. (1986) : Random Field Finite Elements, Int. J. Num. Meth. in Eng., 23, 1831-1845.
- 11) Contreras, H.(1980) : The Stochastic Finite Element Method, Comput. Struct., 12, 341-348.
- 12) Rao, S. S.(1980) : Structural Optimization by Chance Constrained Programming Techniques, Comput. Struct., 12, 777~781.
- 13) Hasofer, A. M. and Lind, N. C.(1974) : Exact and Invariant 2nd-Moment Code Format, J. Eng. Mech. Div., 100(EM1), 111~121.
- 14) Bousselet, B.(1982) : Quelques Results en Optimization de domain, these d' Etat, Univ. de Nice.
- 15) Hien, T. D. and Kleiber, M.(1990) : Finite Element Analysis based on Stochastic Hamilton Variational Principle, Comput. Struct., 37(6), 893~902.
- 16) Hien, T. D. and Kleiber, M.(1991) : Stochastic Structural Design Sensitivity of Static Response, Comput, Struct., 38(516), 659~667.
- 17) Hien, T. D. and Kleiber, M.(1991) : Stochastic Design Sensitivity in Structural Dynamics, Int. J. Num. Meth. in Eng., 32, 1247~1265.
- 18) Hien, T. D. and Kleiber, M.(1992) : The Stochastic Finite Element Method, John Wiley & Sons Ltd.
- 19) Ryu, Y. S.(1990) : Variational Approach for the Design Sensitivity Analysis of Geometrically Non-linear Structures, 大韓土木學會 論文集, 10(2).