〈논문〉 SAE NO. 99370171

차량현가장치용 일래스토메릭 부싱의 비선형점탄성 모델연구 (I)
-축 방향 모드 -

A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model for Elastomeric Bushing in Automotive Suspension System (I)
- Axial Mode -

이 성 범*
Seong Beom Lee

ABSTRACT

An elastomeric bushing is a device used in automotive suspension systems to cushion the force transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is an elastomeric hollow cylinder which is bonded to a solid metal shaft at its inner surface and a metal sleeve at its outer surface. The relation between the force applied to the shaft or sleeve and their relative deformation is nonlinear and exhibits features of viscoelasticity.

Numerical solutions of the boundary value problem represent the exact bushing response for use in the method for determining the force relaxation function of the bushing. The new nonlinear viscoelastic bushing model, which is called Pipkin-Rogers model, is proposed and it is shown that the predictions of the proposed force-displacement relation are in very good agreement with the exact results. This new bushing model is thus very suitable for use in multi-body dynamics codes. The success of the present study for axial mode response suggests that the same approach be applied to other modes, such as torsional or radial modes.

주요기술용어 : Elastomeric bushing(일래스토메릭 부싱), Lianis equation(리아니스식), Pipkin-Rogers model(핍킨-라저스 모델), Nonlinear viscoelastic incompressible material(비선형점탄성 비압축성 물질), Force relaxation function(힘완화함수)

1. 서 론

일래스토메릭 부싱(Elastomeric bushing)은 자동차의 현가장치(Suspension system)에 이용되는 기계요소이다. 부싱은 바깥쪽의 실린더형 슬리브(sleeve)와 안쪽의 실린더형 축의 사이에 있는, 가운데가 비어있는 실린더의 형태를 가진다. 이 슬리브와 축은 자동차 현가장치의 부품들에 연결되어 있으며, 일래스토메릭 부싱을 통하

* 정회원,
인제대학교 기계·자동차공학부

여 힘이 전달되며, 부싱은 충격과 진동을 줄여주는 역할을 한다. 또한, 자동차의 현가장치에서 부싱을 통하여 전달되는 힘은 부품의 피로수명 예측, 차량의 승차감 및 동특성에 직접 관련이 되어, 매우 중요한 요소로 알려져있다. 특히, 현가장치의 동력학적 현상을 정확히 예측하는 데있어서, 간단하면서도 정확한 부싱모델은 매우 유용하게 활용될 수 있다.

Wineman 등의 연구에 의하면, 힘과 변위는 비선형특성을 보이는 점탄성의 성질이 관찰되어 기존의 선형 점탄성 모델로는 부싱의 힘과 변형과의 관계를 정확하게 나타낼 수 없게 되어 [1], 새로운 비선형 점탄성 부싱모델을 개발하기로 하였고, 본 연구에서는 원통좌표계에서의 축 방향으로의 변형을 고려하여, 축 방향의 힘과 변위와의 관계를 구하려고 노력하였으며, 데이터를 얻는 방법으로는 응용역학에서의 표준적인 방법을 이용하였다. 즉, 리아니스(Lianis)의 식을 정리하여 응력과 변형률의 관계식을 얻었고, 힘과 응력과의 관계식, 그리고 변위와 변형률의 관계식을 이용하여, 힘과 변위의 관계식을 완성하였다.

이 세 개의 식들은 복잡하고, 음함수 적으로 연결되어 있어서, 본 연구의 다음단계인 동역학적 모의실험에 바로 이용되기에는 많은 어려움이 있다. 따라서, 새로운 부싱모델을 제안하고, 위의 세 식들로부터 데이터를 받아서 새 모델을 완성하였다. 이 새 부싱모델은 비선형 점탄성 모델로서, 여러 상수의 값들은 컴퓨터를 이용하여 복잡하게 구해지게 되지만, 완성된 기본 식은 힘과 변위의 직접관계식으로 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있는 장점을 가지고있다. 일차원 축방향 스텝변위 제어실험(One-dimensional axial step displacement control test)을 컴퓨터를 이용한 모의실험을 통하여 표준적인 응용역학 방법으로 데이터를 얻어서 새로운 비선형 점탄성 모델을 완성하였으며, 동일한 변위에 대하여 컴퓨터를 이용하여 일차원 축방향 변위 제어실험(One-dimensional axial displacement control test)을 수행하여, '새로 완성된 식'과 '기존의 응용역학방법을 이용한 식' 의결과를 비교하였으며, 두 결과가 원하는 오차범위내에서 같음이 입증되었다.

2. 구조방정식과 비선형 점탄성 모델

2.1 리아니스식(Lianis equation)

현재의 시간을 t 로 놓고, 과거에서 현재까지의 시간을 s 로 표현하면, $-\infty < s \leq t$ 로 나타낼 수 있다. 고정좌표계에서의 질점의 위치를 $\mathbf{X}$ 라고 하고, 시간 s 에서의 질점의 위치를 $\mathbf{x}(s)$ 라 하면, 다음의 관계를 얻는다.

$$\mathbf{x}(s) = \chi(\mathbf{X}, s), \quad -\infty < s \leq t \tag{1}$$

시간 s 에서의 질점의 변형그레이디언트(Deformation gradient)를 $F(s)$ 라 표기하면, 직교좌표계에서의 구성요소는 다음과 같다.

$$F(s) = \left\{ \frac{\partial x_i(s)}{\partial X_j} \right\} \tag{2}$$

왼쪽 코쉬-그린 변형률 텐서(Left Caugh-Green strain tensor) $B(t)$ 와 $B(t)$ 의 변형률 인베어리언트(Strain invariants) I_1, I_2, I_3 는 다음과 같다.

$$B(t) = F(t)[F(t)]^T \tag{3}$$

$$I_1 = B_{ii} \tag{4}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\{B_{ii}B_{ii} - B_{ij}B_{ij}\} \tag{5}$$

비압축성의 가정으로부터,

$$I_3 = 1 \tag{6}$$

상대 변형 그레이디언트(Relative deformation gradient)는 $F_t(s)$ 로 표기하고, 직교좌표계에서의 구성요소는 다음과 같으며,

$$F_t(s) = F(s)F^{-1}(t) = \left\{ \frac{\partial x_i(s)}{\partial X_j(t)} \right\} \tag{7}$$

오른쪽 상대 코쉬-그린 변형률 텐서(Right relative Caugh-Green strain tensor)와 s에대한 편미분은 다음과 같다.

$$C_t(s) = [F_t(s)]^T F_t(s) \tag{8}$$

$$\dot{C}_t(s) = \frac{\partial C_t(s)}{\partial s} \tag{9}$$

비압축성 등방성 점탄성 물질의 등온반응에 대한 3차원 구조이론은 콜만과 놀(Coleman and Noll)에 의하여 발전되었으며, 근사적 구조방정식을 완성하기 위하여 페이딩 메모리(fading memory)가 이용되었다 [2]. 리아니스(Lianis)와 그의 동료들은 실험적으로 스티렌-부타딘 고무(Styrene-butadiene rubber)에 대하여, 적분방정식을 완성하여, 그 식의 정확성은 실험적으로 증명되었으며, 리아니스식(Lianis equation)이라 불릴 다음의 식은 리아니스(Lianis)와 그의 동료들에 의하여 발전되었다 [3-7].

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= -\hat{p}(t)I \\ &+ \left[a + \frac{b}{(I_1-2)^2} + I_1\{c + d(I_2-3)\}\right]B \\ &- \{c + d(I_2-3)\}B^2 \\ &+ 2\int_{-\infty}^{t} [P_0(t-s) + (I_2-3)Q_0(t-s)]\,\dot{C}_t(s)\,ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} \left[P_1(t-s) + \frac{Q_1(t-s)}{(I_1-2)^2}\right] \\ &\quad [B\dot{C}_t(s) + \dot{C}_t(s)B]\,ds \end{aligned} \tag{10}$$

$\sigma(t)$는 수직응력(Normal stress)과 전단응력(Shear stress)을 포함하는 응력 행렬이고, $\hat{p}$는 비압축성의 제한으로부터 온 스칼라량이며, Table 2.1 [7, 8] 에 나타나있는 $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $P_1(t)$, $Q_1(t)$, a, b, c, d는 물질의 특성이며, $0 \le t \le 40$ seconds에 대하여, 선형 보간법(Interpolation)과 외삽법(Extrapolation)을 이용하여 Fig. 1 에 나타내었다 [8].

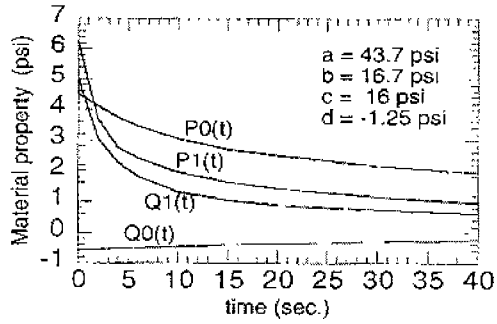

Fig. 1 Material properties for Styrene-butadiene rubber at 0^oC

2.2 비선형 점탄성 모델

서론에서 언급했듯이 힘과 변위와의 관계를 고려하였으며, 폴리머의 비선형 점탄성 모델로 펩킨과 라저스(Pipkin and Rogers)에 의해 제안된 식을 부분 적분법을 이용하여 정리하면 다음과 같다 [8, 9].

$$F(t) = R(w(0), t) + \int_0^t \frac{\partial R(w(s), t-s)}{\partial w(s)} \frac{dw(s)}{ds}\, ds \tag{11}$$

$R(w, t)$은 시간이 0일 때 변위가 0에서 w 의 크기로 점프하여, 시간이 지남에 따라 일정한 w

값을 갖는 스텝변위(Step displacement)가 주어져 있을 때, 힘 $F(t)$ 가 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로, 변위에 의존하는 힘 완화함수(Displacement dependent force relaxation function)라 일컫는다 [8].

본 논문에서는, 새로운 비선형 점탄성 모델을 완성하는데 있어서, 그 데이터를 얻는 과정에서는 리아니스모델을 이용 하였고, 궁극적으로는 핍킨과 라저스(Pipkin and Rogers)가 제시한 이론에 근거하여 새로운 모델을 만들었고, 그 이름은 핍킨-라저스 모델(Pipkin- Rogers model)로 하였다. 따라서, 본 논문에서 명명한 핍킨-라저스 모델(Pipkin- Rogers model)은 새로 만든 비선형 점탄성 모델을 일컫는다.

3. 모의 실험의 과정 및 결과

서론에서 언급했듯이, 부싱은 가운데가 비어있는 실린더로 가정되어 축방향 대칭이며, 관성은 무시되었으며, 이 연구에서는 축방향의 변형만이 고려되었다.

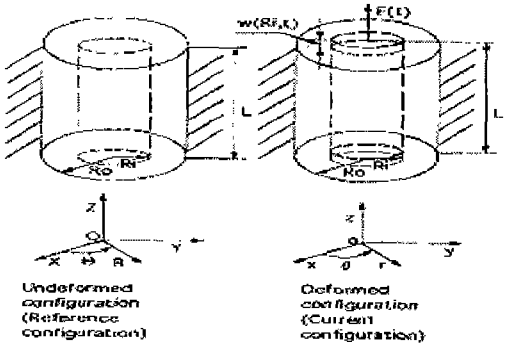

Fig. 2 Reference and current configurations in axial motion

변형전의 원통좌표계는 R, Θ, Z이며, 변형후의 원통좌표계는 r, θ, z로 한다. 부싱은 $t<0$ 에서는 변형이 없으며, $t\geq 0$ 에서는 가운데 축이 축방향의 힘 $F(t)$ 를 받음에 따라 부싱은 바깥쪽 슬리브에 대하여 축방향 변위 $w(R,t)$ 를 갖는다. 변형전 과 변형후의 모양은 Fig.2에 나타나 있다.

바깥쪽 슬리브는 고정되어 있으므로, $w(R_o,t)=0$ 이며, 가장 큰 변위를 가지는 부싱의 안쪽에서의 변위 $w(R_i,t)$ 와 축방향 힘 $F(t)$ 의 관계를 알아보고자 한다.

먼저, 원통좌표계에서의 식은 다음과 같다.

$$r(R,t)=R \tag{12}$$

$$\theta(R,t)=\Theta \tag{13}$$

$$z(R,t)=Z+w(R,t) \tag{14}$$

축 방향 전단 변형률(Axial shear strain) $k(R,t)$ 를 $k(R,t)=\partial w(R,t)/\partial R$ 로 정의하면, 식 (2) 로부터,

$$\mathbf{F}(R,t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k(R,t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

식 (15) 로부터 $B, I_1, I_2, B^2, \dot{C}_t(s)$를 구하여 식 (10)에 대입한 후, G, 부싱 안쪽 반지름 R_i 등을 이용하여 반지름, 힘, 변위를 $\hat{R}=R/R_i$, $\hat{w}(\hat{R},t)=w(R,t)/R_i$, $\hat{F}(t)=F(t)/(2\pi R_i LG)$ 로 무차원화 한 후, 여러 단계를 통하여 얻어진, 힘, 응력, 변형률, 변위와의 관계는 다음과 같다.

$$G\frac{\hat{F}(t)}{\hat{R}} = \hat{\sigma}_{rz}(\hat{R},t) =$$

$$\left[a+\frac{b}{\{1+\hat{k}^2(\hat{R},t)\}^2}+\{3+\hat{k}^2(\hat{R},t)\}\right.$$

$$\left.\{c+d\hat{k}^2(\hat{R},t)\}\right]\hat{k}(\hat{R},t)$$

$$-\left[c+d\hat{k}^2(\hat{R},t)\right]\left[2+\hat{k}^2(\hat{R},t)\right]\hat{k}(\hat{R},t)$$

$$+\ 2\hat{k}(\hat{R},0^+)[P_0(t)+\hat{k}^2(\hat{R},t)Q_0(t)]$$

$$+\ 2\int_{0^+}^{t}\left[P_0(t-s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds$$

$$+\ 2\hat{k}^2(\hat{R},t)\int_{0^+}^{t}\left[Q_0(t-s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds$$

$$+\ \hat{k}(\hat{R},0^+)\left[P_1(t)+\frac{Q_1(t)}{\{1+\hat{k}^2(\hat{R},t)\}^2}\right]$$

$$[2+\hat{k}(\hat{R},0^+)\hat{k}(\hat{R},t)-\hat{k}^2(\hat{R},t)]+$$

$$2\hat{k}(\hat{R},t)\int_{0^+}^{t}\left[P_1(t-s)\,\hat{k}(\hat{R},s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds$$

$$+\ [2-\hat{k}^2(\hat{R},t)]\int_{0^+}^{t}\left[P_1(t-s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds$$

$$+\ \frac{2\hat{k}(\hat{R},t)}{[1+\hat{k}^2(\hat{R},t)]^2}$$

$$\int_{0^+}^{t}\left[Q_1(t-s)\,\hat{k}(\hat{R},s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds$$

$$+\ \frac{2\hat{k}(\hat{R},t)}{[1+\hat{k}^2(\hat{R},t)]^2}$$

$$\int_{0^+}^{t}\left[Q_1(t-s)\,\hat{k}(\hat{R},s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds$$

$$+\ \frac{2-\hat{k}^2(\hat{R},t)}{[1+\hat{k}^2(\hat{R},t)]^2}\int_{0^+}^{t}\left[Q_1(t-s)\frac{\partial\hat{k}(\hat{R},s)}{\partial s}\right]ds \qquad (16)$$

$$\hat{k}(\hat{R},t)=\frac{\partial\hat{w}(\hat{R},t)}{\partial\hat{R}} \qquad (17)$$

힘 $F(t)$ 를 무차원하기 위하여 이용된 G 는 다음과 같이 정의되었다.

$$G=\lim_{k(R,0^+)\to 0}\frac{\sigma_{rz}(R,0^+)}{k(R,0^+)}=107.95(psi) \qquad (18)$$

힘 $\hat{F}(t)$ 가 주어지면, 볼테라 적분방정식(Volterra integral equation)인 식 (16)과 변위와 변형률의 관계를 나타내는 식 (17) 로부터 부싱의 안쪽 반지름에서의 변위 $\hat{w}(1,t)$ 가 구해진다. 또한, 부싱의 안쪽 반지름에서의 변위 $\hat{w}(1,t)$ 가 주어지면, 힘 $\hat{F}(t)$ 를 가정한 후 정확한 $\hat{w}(1,t)$ 를 찾아가는 반복법(Iteration method)을 이용하여, $\hat{w}(1,t)$ 를 구한다. 주어진 '$\hat{w}(1,t)=\hat{w}$ = 상수' 에대하여, 힘 $\hat{F}(t)$ 를 각각 구하고, 주어진 스텝변위(Step displacement) $\hat{w}$ 에대한 스텝변위 제어실험(Step displacement control test)의 결과인 힘 $\hat{F}(t)$ 는 각각의 변위 $\hat{w}$ 에대한 힘 완화 함수 $R(\hat{w},t)$ 이 된다.

본 연구에서는 $0\le t\le 40$seconds 에서, $\hat{w}(1,t)=\hat{w}$ = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 이 이용되었다. 이 스텝변위제어실험(Step displacement control test)에 대한 결과는 Fig. 3 에 나타나 있다.

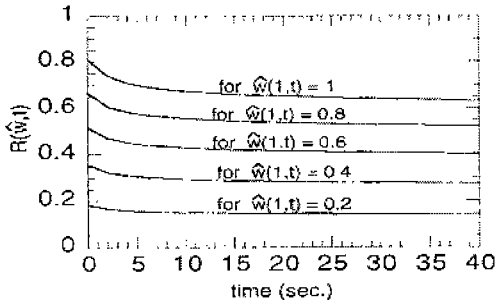

Fig. 3 Displ. dependent force relaxation functions

힘 완화 현상(Force relaxation phenomena)을 볼 수 있으며, 이 결과인 힘 $\hat{F}(t)$ 는 $\hat{w}(1,t)=\hat{w}$ = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 에대한 힘 완화 함수(Force relaxation function) $R(\hat{w},t)$ 이 된다.

Fig. 4 는 시간 $t=0,10,40$seconds 에대한 등시간선(Isochrone)을 보여주고 있으며, 대칭성(Symmetry)에 의하여, $\hat{w}$의 홀수의 거듭제곱들의 합으로 표현될 수 있다.

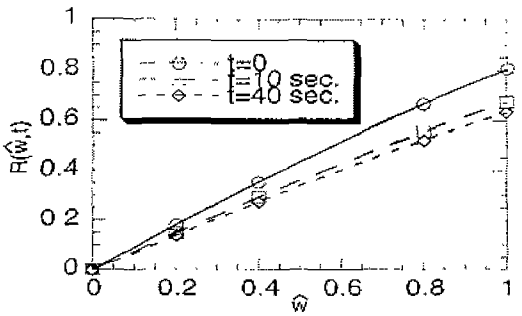

Fig. 4 Isochrones for $t=0, 10, 40$ seconds

따라서, 힘 완화 함수(Force relaxation function) $R(\hat{w}, t)$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$R(\hat{w}, t) = \hat{w}G_1(t) + \hat{w}^3G_3(t) + \hat{w}^5G_5(t) \quad (19)$$

그리고, $0 \le t_i \le 40$ seconds 에대하여,

$\left[\sum_{a=1}^{5} \{ R(\widehat{w^{(a)}}, t_i) - \widehat{w^{(a)}}G_1(t_i) - (\widehat{w^{(a)}})^3 G_3(t_i) - (\widehat{w^{(a)}})^5 G_5(t_i) \} \right]^2$ 을 최소화하는 선형 최소 자승법(Linear least square method)을 이용하여 [10], $G_1(t_i), G_3(t_i), G_5(t_i)$ 를 구하여 Fig. 5 에 나타내었다.

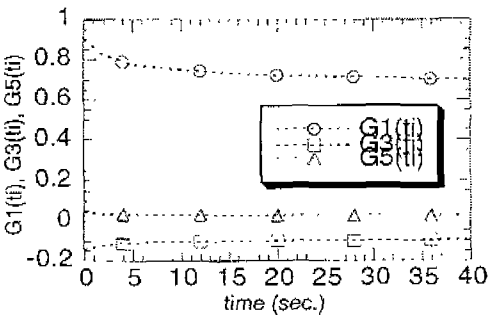

Fig. 5 Coeff. of $R(\hat{w}, t)$: $G_1(t_i), G_3(t_i), G_5(t_i)$

또한, 불연속한 시간 t_i 에대한 $G_1(t_i), G_3(t_i), G_5(t_i)$ 은 다음과 같이 지수함수의 합으로 된 함수로 표현될 수 있다.

$$G_i(t) = C_{i1} + C_{i2}e^{-t/\tau_{i2}} + C_{i3}e^{-t/\tau_{i3}} \quad i=1,3,5 \quad (20)$$

계수 C_{ij} 와 τ_{ij} 를 구하기 위하여 비선형 최소 자승법(Nonlinear least square method)이 이용되었으며 [11], 구하여진 계수 C_{ij} 와 τ_{ij} 를 식 (20) 에 대입하여 완성된 함수 $G_1(t)$, $G_3(t)$, $G_5(t)$의 그래프는 Fig. 6 에 보여져있다.

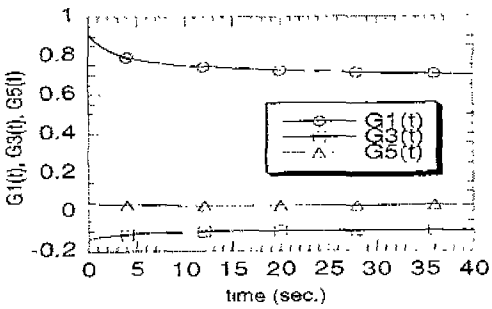

Fig. 6 Coeff. of $R(\hat{w}, t)$: $G_1(t), G_3(t), G_5(t)$

식 (11)의 비선형 점탄성 모델을 축 방향 모드에 대하여 정리하고 무차원화 시킨 후, 다음의 비선형 점탄성 부싱모델을 완성하였다.

$$\hat{F}(t) = R(\hat{w}(1,0), t) + \int_0^t \frac{\partial R(\hat{w}(1,s), t-s)}{\partial \hat{w}(1,s)} \frac{d\hat{w}(1,s)}{ds} ds \quad (21)$$

$$R(\hat{w}(1,t), t) = \left(C_{11} + C_{12}e^{-t/\tau_{12}} + C_{13}e^{-t/\tau_{13}}\right) \hat{w}(1,t) + \left(C_{31} + C_{32}e^{-t/\tau_{32}} + C_{33}e^{-t/\tau_{33}}\right) \{\hat{w}(1,t)\}^3 + \left(C_{51} + C_{52}e^{-t/\tau_{52}} + C_{53}e^{-t/\tau_{53}}\right) \{\hat{w}(1,t)\}^5 \quad (22)$$

$C_{11}=0.6912,\ C_{12}=0.09929,\ C_{13}=0.11993,$

$\tau_{12}=17.25328,\ \tau_{13}=2.20381$

$C_{31}=-0.09742,\ C_{32}=-0.04129,$

$C_{33}=-0.00503,\ \tau_{32}=5.18565,\ \tau_{33}=0.02123$

$C_{51}=0.02896,\ C_{52}=0.01271,\ C_{53}=0.00187,$

$\tau_{52}=4.72456,\ \tau_{53}=0.27884$

(23)

4. 모의 실험 결과 및 고찰

주어진 부싱의 안쪽 반지름에서의 여러 변위 $\hat{w}(1,t)$ 에대하여, '리아니스모델(Lianis model): 리아니스식 등을 이용한 방법' 과 '핍킨-라저스모델(Pipkin-Rogers model): 새로 제안된 부싱모델을 이용한 방법' 을 모두 이용하여 다음에 주어진 동일한 변위에 대하여, 힘 $\hat{F}(t)$ 를 구한 다음, 그 결과를 비교하였다. 여기에서는 여러 모의실험을 한 것 중에서, $\hat{w}(1,t)$가 선형적으로 증가하다가 다시 감소하는 한 예를 보였다. 리아니스모델 과 핍킨-라저스모델에 주어진 부싱의 안쪽 반지름에서의 변위 $\hat{w}(1,t)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{w}(1,t) &= 0.04t, && 0\le t\le 20 \text{ seconds}\\ &= -0.04(t-40), && 20\le t\le 40 \text{ seconds}\end{aligned} \quad (24)$$

Fig. 7 에서, 점선은 주어진 부싱 안쪽에서의 변위 $\hat{w}(1,t)$를 나타내며, 실선으로 표현 된 힘 $\hat{F}(t)$ 는 리아니스식 등의 표준적인 응용역학의 식들을 이용하여 컴퓨터로 계산한 결과이다. Fig. 8 에서는, 점선은 Fig. 7 과 같이 주어진 부싱 안쪽에서의 변위 $\hat{w}(1,t)$를 나타내며, 실선으로 표현 된 힘 $\hat{F}(t)$ 는 새로 제안된 부싱모델을 이용했을 때의 결과를 나타낸다.

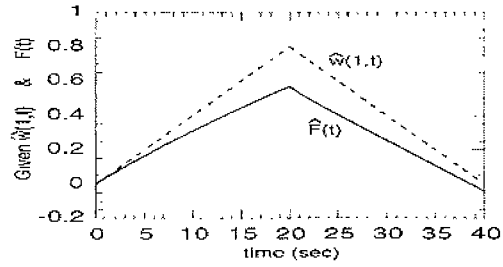

Fig.7 Displ. control test for Lianis model

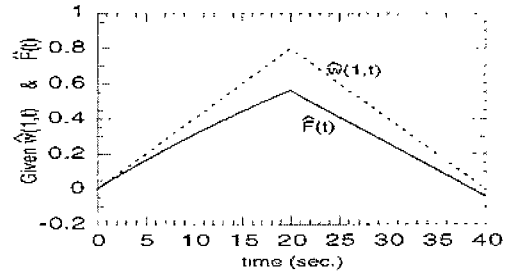

Fig. 8 Displ. control test for PR model

두 모델의 결과인 $\hat{F}(t)$ 를 비교하기 위하여, 상대오차를 E 라 놓고, 놈(2-norm)을 이용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$E=\frac{\|(PipkinRogers\text{결과})-Lianis\text{결과}\|}{\|Lianis\text{결과}\|} \quad (25)$$

Fig. 7 과 Fig. 8 에서, 상대오차인 E 는 0.8%로, 표준적인 응용역학적 방법에 대하여 비선형 점탄성 부싱모델 (Pipkin-Rogers 모델)이 근접한 결과를 보여주고 있으며, 힘 $\hat{F}(t)$ 와 변위 $\hat{w}(1,t)$의 직접 관계식으로 만들어냄으로, 이 모델은 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있게 되었다.

5. 결론

본 연구는 축방향모드에 관하여만 고려되었다. 실제의 부싱에 있어서는, 축방향뿐만 아니라, 반

경방향, 원주방향 등도 고려되어야 하며, 이 여러 힘과 모멘트 등의 복합적인 커플링(Coupling)도 고려되어야 한다. 따라서, 다른 여러 모드에 대한 연구와 더불어 그 커플링에 대한 연구가 계속되고 있으며, 축방향모드에 대한 본 연구의 결론은 다음과 같다.

축방향의 변형에 대한 힘과 변위에 대한 관계를 알아보는 데있어서, 서로 다른 두 가지의 모델이 연구되었다. 리아니스모델을 이용한 기존의 응용역학방법을 이용한 식은 정확성에서는 장점이 있었으나, 그 관련 식들이 음함수 적으로 관련됨으로 인하여 동력학적 모의실험에 직접 이용되기에는 어려움이 있었다. 반면에, 새로 제시된 비선형 점탄성 모델은 여러 상수의 값들은 계산하는 과정이 복잡해 보이기는 하나, 그 과정이 컴퓨터를 이용하여 순서대로 일반화되어 이용되기에 어려움이 없을 뿐 아니라, 완성된 기본 식은 힘과 변위의 직접관계식으로 본 논문에 연결된 다음 과제인 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있는 장점을 가지고 있다. 두 가지 모델은 컴퓨터를 이용한 변위제어실험(Displacement control test)을 통하여 근접한 결과를 보였다.

참 고 문 헌

1. Alan Wineman, Timothy VanDyke and Shixiang Shi, "A Nonlinear Viscoelastic Model for One Dimensional Response of Elastomeric Bushings", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 40, No. 12, pp. 1295-1305, 1998.
2. Bernard D. Coleman and Walter Noll, "Foundations of Linear Viscoelasticity", Reviews of Modern Physics, Vol. 33, pp. 239-249, 1961.
3. George Lianis,"Constitutive Equations for Viscoelastic Solids Under Finite Deformation", Purdue University Report AA&ES 63-11, 1963.
4. W. Goldberg, B. Bernstein an George Lianis, "The Exponential Extension Ratio History, Comparison of Theory with Experiment", Purdue University Report AA&ES 67-1, 1967.
5. Charles W. McGuirt and George Lianis, "The Constant Stretch Rate History, Comparison of Theory with Experiment", Purdue University Report AA&ES 67-2, 1967.
6. W. Goldberg and George Lianis, "Behavior of Viscoelastic Media Under Small Sinusoidal Oscillations Superposed on Finite Strain", Purdue University Report AA&ES 67-3, 1967.
7. Charles W. McGuirt and George Lianis, "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations", Transactions of the Society of Rheology, Vol. 14:2, pp. 117-134, 1970.
8. Seong Beom Lee, A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response, Ph.D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1997.
9. A. C. Pipkin and T. G. Rogers, "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior", J. of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 59-72, 1968.
10. J. Douglas Faires and Richard L. Burden, Numerical Methods, PWA, pp. 270-312, 1993.
11. J. E. Dennis, Jr., "Nonlinear Least Squares and Equations", The State of the Art in Numerical Analysis, ed. D. Jacobs, Academic Press, pp. 269-312, 1977.