

高次스펙트럼의 機械的 시스템 適用 研究, (1) - 바이스펙트럼과 2次 位相結合 解析 -

Higher Order Spectra and Their Application to Mechanical Systems (I) - Bispectrum and Analysis of QPC -

이준서*, 차경옥**
Joon Seo Lee, Kyung Ok Cha

ABSTRACT

This paper is concerned with the development of useful engineering techniques to detect and analyse nonlinearities in mechanical systems. The methods developed are based on the concepts of higher order spectra. The study of higher order statistics has been dominated by work on the bispectrum. The bispectrum can be viewed as a decomposition of the third moment(skewness) of a signal over frequency and as such is blind to symmetric nonlinearities. The phenomenon of quadratic phase coupling(QPC) can be analyzed by bicoherence function. Finally, the application of these techniques to data from actual mechanical systems will be performed in second report.

주요기술용어 : Nonlinearities(비선형성), Higher Order Spectra(고차스펙트럼), Bispectrum(바이스펙트럼), Skewness(비대칭도), QPC(2차위상결합), Bicoherence function (바이코헤런스 함수)

1. 서 론

과위스펙트럼을 이용한 선형 전달함수는 공학의 여러 현상들을 해석하고 규명하기 위하여 사

용되어졌다. 하지만 기존의 선형 전달함수만으로는 설명할 수 없는 현상들이 많이 있다.⁽¹⁾ 따라서 이러한 현상들을 보다 정확하게 해석하는 데는 고차 통계학을 응용한 고차스펙트럼이 필요하다. 보통 바이스펙트럼으로 대변되고 있는 고차스펙트럼에 대한 연구는 이론적인 측면^{(2),(3),(4)}과 응용적인 측면^{(5),(6),(7)}으로 크게 분류할 수 있다. 대부분의 현대 과학 분야에서 한계나 장벽은 비선형 문제로 귀착되기 때문에 이러한 비선형

* 정회원, 충청대학 기계설계학과

** 정회원, 명지대학교 기계공학과

문제의 해석 및 해결이 과학기술 진보에 필수적인 요건이며 계속적으로 풀어가야 할 과제이기도 하다. 선형 시스템 해석과 관련된 스펙트럼 해석 기술에 대한 연구는 대부분 1970년대에 정립되었으나^{(8),(9)} 비선형 시스템 해석과 관련된 고차스펙트럼에 관한 연구는 아직까지 확실히 정립되어 있지 않다.

본 논문에서는 비선형 시스템 해석에 이용되는 고차스펙트럼 중 현재 공학분야에 많이 응용되고 있는 바이스펙트럼을 설명하고자 한다. 또한 이것의 정규화 방법 가운데 하나인 바이코헤런스 함수와 간단한 시스템을 이용한 2차 위상 결합 신호(QPC signal)의 검출(detection) 방법을 연구하고자 하였다.

2. 바이스펙트럼의 고찰

2.1 기대값, 확률밀도함수 및 모멘트

임의의 신호 $g(x)$ 에 대한 $g(x)$ 의 기대값(expectations)은

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx \quad (2.1)$$

이고, 여기서 E 는 기대연산자(expectation operator)를 나타낸다. 또한 $g(x)$ 의 기대값은 x 의 확률밀도함수가 주어졌을 때 x 가 발생하는 가능성에 대하여 가중된 $g(x)$ 의 평균이다. 이때 물리적인 현상을 묘사하는 정상 및 랜덤과정 $\{x(t)\}$ 의 모멘트는 다음식으로 정의된다.

$$\mu_k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

여기서, $p(x)$ 는 $\{x(t)\}$ 의 확률밀도함수이고, μ_k 는 k 차모멘트라고 한다. 또한 제로모멘트($k=0$)에 대해서는

$$\mu_0 = E[x^0] = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 p(x)dx = 1 \quad (2.3)$$

이고, 1차모멘트($k=1$)는 다음과 같다.

$$\mu_1 = E[x^1] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \mu \quad (2.4)$$

윗식은 $\{x(t)\}$ 의 평균이다. 또한 2차모멘트($k=2$)는 다음과 같다.

$$\mu_2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \Psi^2 \quad (2.5)$$

윗식은 $\{x(t)\}$ 의 평균 제곱값(mean square value)이며 이것의 양의 제곱근을 'rms'(root mean square)라고 한다. 그러나 2차 혹은 고차모멘트에 대해서는 중심모멘트(central moments)라고 불리는 평균에 대한 모멘트를 계산해서 사용하는 것이 때때로 편리하다. 2차 중심모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu^c_2 &= E[(x-\mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)dx = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

윗식은 $\{x(t)\}$ 의 분산(variance)이다. 분산에서 양의 제곱근을 표준편차라고 한다. 식(2.2)를 사용한 모멘트의 계산은 필요에 따라 r 차의 고차로 확장될 수 있다. 정상 및 랜덤신호 $x(t)$ 에 대하여 r 차모멘트를 위와 같은 방법으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mu_r = E[x^r(t)] \quad (2.7)$$

위와 마찬가지로 $\mu_1 = E[x(t)] = \mu_x$ 는 $x(t)$ 의 평균이 된다. 그러므로 고차모멘트를 다시 고려하면 일반적으로 평균에 대하여 중심모멘트(central moments)로서 계산될 수 있기 때문에⁽¹⁰⁾ 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$\mu_r = E[(x(t) - \mu_x)^r] \quad (2.8)$$

따라서 2차 중심모멘트는 신호의 분산이 된다.

$$\text{var}[x(t)] = \mu_2 = E[(x(t) - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 \quad (2.9)$$

윗식은 평균에 대한 신호의 분포도 측정을 나타낸다. Fig.1에 표시한 것처럼 가우시앵 또는 정규분포를 갖는 신호의 확률밀도함수는 평균과

분산으로 완벽하게 설명될 수 있다.

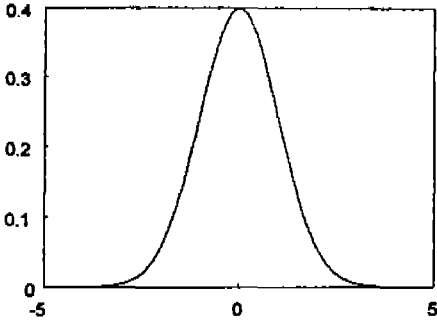


Fig.1 Gaussian PDF Probability Density Function

$$(\mu_3 = 0, \mu_4 = 3)$$

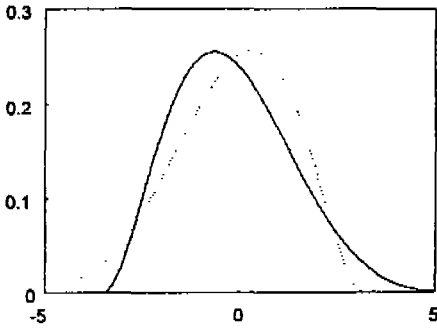


Fig.2 Negative skewed PDF, $\mu_3 < 0$, (solid line) and positive skewed PDF, $\mu_3 > 0$, (dotted line)

그렇지만 고차모멘트는 더 복잡한 신호의 성질을 설명하는데 사용된다. 평균에 대한 3차모멘트 μ_3 는 비대칭도(skewness)로서 확률밀도함수의 비대칭도를 측정할 수 있으며, 대칭분포에서는 $\mu_3 = 0$ 가 된다. Fig.2에서 실선으로 나타낸 것과 유사한 확률밀도함수는 왼쪽으로 기울어져 있기 때문에 음(negative)의 비대칭도를 갖는다. 반면 점선으로 표시된 것과 유사한 확률밀도함수는 오른쪽으로 기울어져 있기 때문에 양(positive)의 비대칭도를 갖는다. 또한 무차원

비율인 μ_3/σ_x^3 는 비대칭계수로 확률밀도 분포의 기울어진 정도를 측정한다. 이와 같이 신호처리 분야에서는 고차모멘트를 이용하여 신호의 기본적인 성질을 설명할 수 있다.

2.2 주파수 영역의 고찰

기존의 파워스펙트럼은 주파수 영역에서 오직 신호의 파워만을 분리하며 주파수에 대한 비대칭도의 분해를 얻고자 할 때는 고차스펙트럼 가운데 하나인 바이스펙트럼을 사용해야 한다. 파워스펙트럼은 가장 낮은 차수의 스펙트럼으로 계산이 간단하고 해석하기가 쉽기 때문에 신호의 2차 통계량에 관련된 결정적, 확률적 과정에 대해서 보편적으로 사용되어왔다. 일반적으로 신호에 있어서 에너지는 다음과 같은식으로 표시된다. 즉

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (2.10)$$

윗식에 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ 를 대입하면,

$$\overline{x^2(t)} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)e^{j2\pi t(f_1+f_2)} dt df_1 df_2 \quad (2.11)$$

이 되고, t 에 대한 적분식(2.11)과 δ 함수(delta function)의 이동성질(shifting property)을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \int \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)\delta(f_1+f_2) df_1 df_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(-f_1) df_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

그러므로, 에너지 스펙트럼은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_{xx}(f) = X(f)X(-f) \quad (2.13)$$

이때 정상확률과정에 대하여 파워스펙트럼은

$$S_{xx}(f_1, f_2) = E[X(f_1)X(-f_2)] \quad (2.14)$$

이고, 정상과정(stationary process)에서 $S_{xx}(f_1, f_2)$ 는 $f_1 = -f_2$ 를 제외하고는 영(zero)이 된다. 이러한 결과로부터 정상확률과정에서 파워스펙트럼에 대한 정의식은 다음과 같이 보다 일반적인 식으로 될 수 있다.

$$S_{xx}(f) = E[X(f)X^*(f)] \quad (2.15)$$

여기서, *는 켈레복소수(complex conjugate)를 나타낸다. 파워스펙트럼(power spectrum)의 가장 큰 특징은 각 주파수 성분을 서로에 대하여 비종속 관계로 취급하고 각 주파수에 대한 파워를 측정하는 것이다. 따라서 위상(phase)에 대한 어떠한 정보도 포함하고 있지 않다. 이것을 위상 눈가림(phase blind)이라고 한다. 에너지 스펙트럼을 구하기 위하여 신호의 에너지를 분해하는 것과 유사하게 3차 신호에 대한 해석을 수행할 수 있다.

$$\overline{x^3(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^3(t) dt \quad (2.16)$$

윗식에 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ 를 대입하면 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} \overline{x^3(t)} &= \iiint_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(f_3)e^{j2\pi(f_1+f_2+f_3)t} dt df_1 df_2 df_3 \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(f_3)\delta(f_1+f_2+f_3)df_1 df_2 df_3 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)x(-f_1-f_2)df_1 df_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

윗식으로부터 결정적 신호의 바이스펙트럼(bispectrum)은 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$E_{xxx}(f_1, f_2) = X(f_1)X(f_2)X(-f_1-f_2) \quad (2.18)$$

확률적 과정에 있어서 파워스펙트럼과 같은 방법을 사용한다면 바이스펙트럼은 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{xxx}(f_1, f_2, f_3) = E[X(f_1)X(f_2)X(f_3)] \quad (2.19)$$

만약 위에서 설명한 과정이 정상(stationary)이라면 $S_{xxx}(f_1, f_2, f_3)$ 는 평면 $f_3 = -f_1 - f_2$ 를 제외하고는 제로이다. 그러므로 정상확률과정

의 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$S_{xxx}(f_1, f_2) = E[X(f_1)X(f_2)X^*(f_1+f_2)] \quad (2.20)$$

파워스펙트럼이 신호의 파워와 2차모멘트에 관련된 것처럼 바이스펙트럼은 비대칭도(skewness)와 3차모멘트에 관련되어 있다. 파워스펙트럼이 독립적으로 각 주파수 성분을 고려하는 반면 바이스펙트럼은 두 주파수 변수 f_1 과 f_2 의 함수이다. 그리고 바이스펙트럼은 f_1, f_2 그리고 f_1+f_2 주파수 성분 사이의 상호작용(interactions)을 해석할 수 있다. 이것은 실수부와 허수부를 포함하는 복소수 양으로 위상(phase)과 크기(magnitude)정보를 갖고 있지만, 본 연구에서는 크기(magnitude)만을 고려하고자한다. 즉, 두 가지 간단한 보기를 나타내기 위하여 사인파를 사용하였다. 사인파는 정상랜덤 신호라는 가정을 따르지 않지만 결과를 쉽게 이해할 수 있기 때문에 하나의 보기로 사용되었으며, 양의 주파수 성분과 음의 주파수 성분사이의 원하지 않는 교차항을 없애기 위하여 주파수가 p_1 인 복소사인파를 사용하였다.

$$x(t) = e^{j2\pi p_1 t} \quad (2.21)$$

윗식을 Fourier 변환시키면 다음과 같다.

$$X(f) = \delta(f-p_1) \quad (2.22)$$

여기서, δ 는 디랙 델타함수(Dirac delta function)이다. Fig.3에 식(2.21)의 신호 $x(t)$ 에 대한 파워스펙트럼을 나타내었다. 만약 식(2.22)의 $X(f)$ 를 식(2.18)에 대입한다면, 바이스펙트럼은 다음과 같이 정리된다.

$$E_{xxx}(f_1, f_2) = \delta(f_1-p_1)\delta(f_2-p_1)\delta(f_1+f_2-p_1) \quad (2.23)$$

윗식 우변에는 세 항의 곱을 포함하고 있다. 위에서 세 개의 항이 모두 제로가 아닐 경우, 바이스펙트럼에서는 단지 제로가 아닌 한 지점만이 있을 것이다. 따라서 (f_1, f_2) 평면에 세 개의

항을 도시해 보면은 Fig.4처럼 $f_1 = p_1$ 과 $f_2 = p_1$, 그리고 $f_1 + f_2 = p_1$ 인 세 개의 직선이 될 것이다. 이때 $p_1 \neq 0$ 에 대해서 세 직선의 어떠한 상호작용점도 찾을 수 없다. 그러므로 단일 사인파의 바이스펙트럼은 제로이다. 다음에는 주파수 p_1 과 p_2 의 두 개의 복수 사인파를 갖는 신호를 고려하여 이 신호의 Fourier변환을 하면,

$$X(f) = \delta(f - p_1) + \delta(f - p_2) \quad (2.24)$$

이므로, 이것을 Fig.5에 나타내었다. 또한 이 신호의 결정적 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$E_{xxx}(f_1, f_2) = \{ \delta(f_1 - p_1) + \delta(f_1 - p_2) \} \\ \{ \delta(f_2 - p_1) + \delta(f_2 - p_2) \} \\ \{ \delta(f_1 + f_2 - p_1) + \delta(f_1 + f_2 - p_2) \} \quad (2.25)$$

따라서 위의 식의 우변을 전개하면 각각 3승인 8개의 항으로 구성된다. 만약 이것을 (f_1, f_2) 평면에 도시한다면, Fig.6에서 나타낸 것처럼 $f_1 = p_1$,

$f_2 = p_1, f_1 = p_2, f_2 = p_2, f_1 + f_2 = p_1$ 그리고 $f_1 + f_2 = p_2$ 인 여섯개의 직선으로 나타난다.

만약 $p_2 = 2p_1$ 이라면, 세 직선에 대한 하나의 교점이 있을 것이다. 그 교점은 Fig.6에서 점으로 표시된 (p_1, p_1) 에서 생길 것이다. 실제적으로 주파수가 각각 50Hz와 100Hz인 두개의 사인파에 대한 바이스펙트럼의 보기를 Fig.7에 나타내었으며, (50, 50)Hz에서 피크(peak)가 나타남을 알 수 있다. 3차원 표면에 바이스펙트럼의 크기를 나타내기 위하여 그물망(mesh) 형태의 그림이 때때로 사용되지만 이 방법으로 복잡한 신호를 나타낼 경우 큰 레벨의 신호로 인하여 작은 레벨의 신호가 가려지는 결과를 초래하므로 정확하고, 자세한 내용을 나타내기 위하여 등고선도(contour map)가 사용된다. 이와 같이 바이스펙트럼은 세제곱 신호평균의 분해로 정의되며 신호의 비대칭도(skewness)와 관련된다.

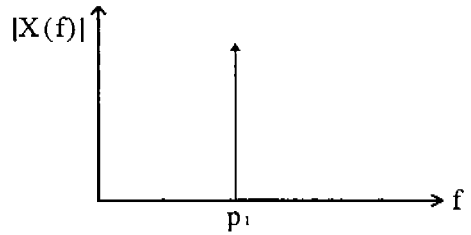


Fig.3 Fourier transform of sine wave

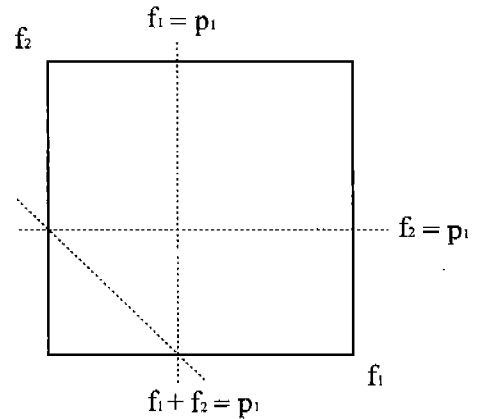


Fig.4 Bispectrum of sine wave

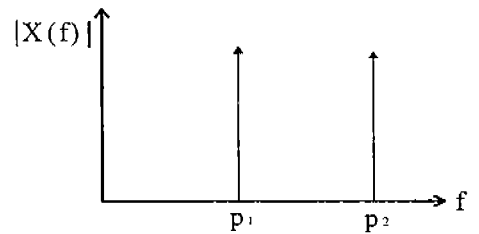


Fig.5 Fourier transform of two sine waves ($p_2 = 2p_1$)

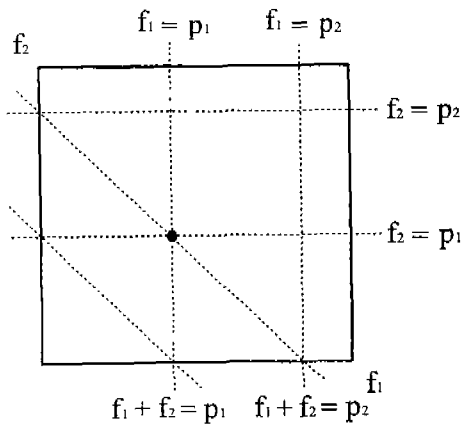


Fig.6 Bispectrum of two sine waves ($p_2 = 2p_1$)

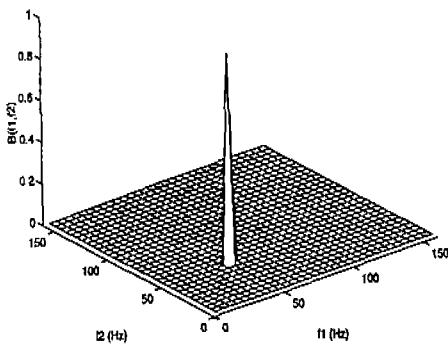


Fig.7 The bispectrum of two sine waves (50Hz and 100Hz)

3. 2차위상결합 신호의 검출

바이스펙트럼의 정규화 방법 가운데 하나인 바이코헤런스 함수는 기존의 코헤런스 함수(coherence function)가 시스템의 입력과 출력 신호의 주파수영역 상관도를 해석하는 것⁽¹¹⁾과는 달리 한 신호상에 혼합되어 있는 두 주파수 성분의 상관도를 해석할 수 있다. 즉, 바이코헤런스의 크기(magnitude)는 f_1 과 f_2 에서 주파수 성

분의 위상들 사이의 상관을 나타낼 수 있다. 2차 위상결합은 2차 비선형 성분을 갖는 신호에서 발생하는 것이다. 이러한 바이코헤런스의 유용성을 알아보기 위하여 Fig.8과 같이 가우스성 백색잡음 $x(t)$ 를 주파수 0.1과 0.2사이의 협대역 필터(narrow band filter)로 필터링하여 신호 $z(t)$ 를 구하고, 비선형 형태의 2차의 $z(t)^2$ 으로 통과시켜 $w(t)$ 를 구한다. $w(t)$ 와 유사한 스펙트럼을 갖는 신호 $y(t)$ 를 발생시키기 위하여 두 번째 필터는 $w(t)$ 의 스펙트럼과 같은 특성을 갖도록 한다. 그러나 이 신호는 어떠한 비선형 성분도 포함하고 있지 않다. Fig.9에 $w(t)$ 의 파워스펙트럼을 Fig.10에는 $y(t)$ 의 파워스펙트럼을 각각 나타내었다. 그림과 같이 두 신호의 파워스펙트럼에는 크기 차이만이 나타나고 어떠한 정보도 나타내지 못한다. 하지만 $w(t)$ 는 2승연산에 의하여 발생된 2차 위상결합(QPC)성분들을 포함하고 있으므로 신호 $w(t)$ 의 바이코헤런스 함수를 구할 경우 Fig.11에서와 같이 주파수 영역 0.1과 0.4에 걸쳐서 피크를 나타내고 있다. 그러나 신호 $y(t)$ 는 어떠한 위상결합도 없는 가우스성 잡음을 포함하고 있기 때문에 신호 $y(t)$ 의 바이코헤런스는 영(zero)이 될 것이다. 이와 같이 바이코헤런스 함수를 이용하면 기존의 파워스펙트럼으로는 찾아낼 수 없었던 2차 비선형 신호를 갖는 시스템의 2차 위상결합 정보를 찾아낼 수 있다.

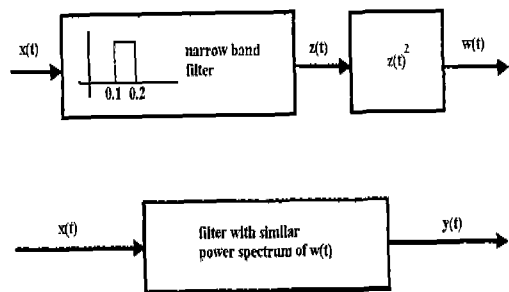


Fig.8 The diagram of the generation of signal with QPC

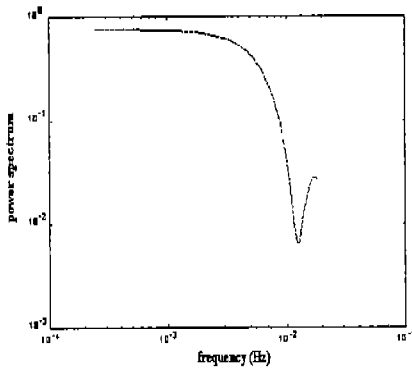


Fig.9 Power spectrum of signal with QPC

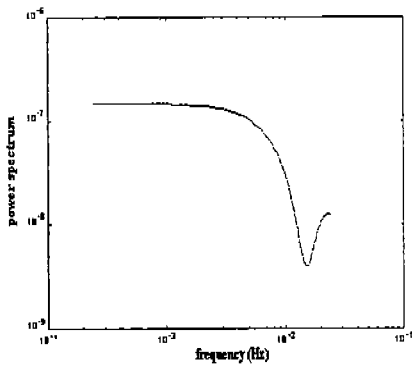


Fig.10 Power spectrum of signal with no QPC

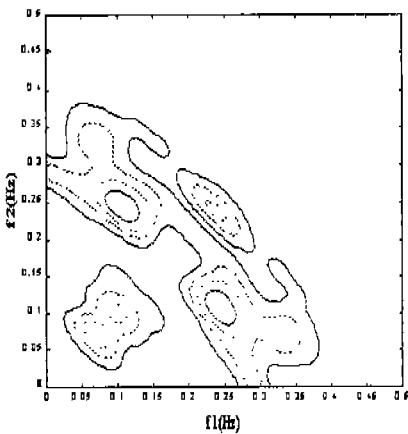


Fig.11 Bicoherence of signal with QPC

4. 결 론

고차스펙트럼과 기계적 시스템 적용에 대한 첫 번째 연구로 바이스펙트럼을 이론적으로 고찰하였으며, 간단한 비선형 모델을 이용하여 바이스펙트럼의 응용에 관하여 연구하였다. 기존의 선형시스템 해석에 많이 사용되어 온 파워스펙트럼과 기여도 함수로는 해석될 수 없는 현상이 많이 있음을 제시하였고 이와 같은 문제를 해결하기 위해서는 고차의 스펙트럼이 필요함을 확인하였다. 고차스펙트럼 해석 기법의 하나인 바이코헤런스 함수는 하나의 신호에 혼합되어 있는 두 성분의 상관도를 해석할 수 있다. 따라서 두 신호 사이의 상관도를 나타내는 전통적인 선형 시스템 해석법의 하나인 기여도 함수와는 그 성격이 다르며 신호의 2차 위상결합 현상을 해석할 수 있다. 선형시스템 해석법과 고차스펙트럼을 병행하여 공학 연구분야에 적용한다면 더 많은 정보를 얻을 수 있으며 더 정확한 시스템 해석이 가능할 것이다. 본 논문에서 연구된 이론적 내용을 바탕으로 두 번째 연구 논문에서는 실제 비선형 시스템(내연기관 배기계) 해석을 통한 공학적 적용에 대하여 발표할 것이다.

참 고 문 헌

1. Martin Schetzen, 'The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems', KRIEGER PUBLISHING COM. Reprint Edition, p.310, 1989.
2. C. L. Nikias, J. M. Mendel, 'Signal Processing with Higher-Order Spectra', IEEE Signal Processing Magazine, pp 11-37, July 1993.
3. C. L. Nikias, A. P. Petropula, 'Higher order spectra analysis. a nonlinear signal processing framework', Prentice Hall, 1993.
4. C. L. Nikias, M. R. Raghuveer,

- 'Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework', Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 7, pp 869-891, July 1987.
5. S. Elgar and R. T. Guza, 'Observations of Bispectra of Shoaling Surface Gravity Waves', J. Fluid Mech. Vol. 161, p.425-448, Dec. 1985.
 6. E. J. Powers and R. W. Miksad, 'Polyspectral Measurement and Analysis of Nonlinear Wave Interactions in Fluids', ASME, G00380, p.9-16, 1987.
 7. R. W. Miksad, F. L. Jones and E. J. Powers, 'Measurements of Nonlinear Interactions During Natural Transition of a Symmetric Wake', Physics of Fluids, Vol. 26, No.6, p.1402-1407, June 1983.
 8. Seybert, A. F., and Hamilton, J. F., Time delay Bias Errors in Estimating Frequency Response and Coherence Functions', Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, No.1, p.1, 1978.
 9. Lyon, R. H., 'Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
 10. A. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes, 'Introduction to the theory of statistics', McGraw-Hill, 1974.
 11. Bendat, J. S., and Piersol, A. G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 2nd Edition, Wiley-interscience, New York, 1986.