

부분구조법에 의한 건축물의 국부진동해석

Substructuring Technique for Local Vibration of Building Structures

이 동 근*

Lee, Dong-Guen

안 상 경**

Ahn, Sang-Kyoung

김 진 구***

Kim, Jin-Koo

요지

국부진동에 의하여 영향을 받는 일부 부재를 분석하기 위하여 구조물 전체에 대하여 동적해석을 수행하는 것은 비경제적일 수 있다. 본 논문에서는 국부진동의 효율적인 해석을 위하여 부분구조법을 사용하였다. 선택된 부재의 해석에 사용할 경계조건을 구하기 위하여 자유도를 응축하는 행렬응축기법을 사용하였다. 해석의 정당성을 검토하기 위하여 경계조건을 고정지지와 단순지지한 경우와 비교하였다. 본 연구에서 제시한 부분구조기법을 이용하면 가진층(加振層)에 대해서는 효율적으로 매우 정확한 거동을 예측할 수 있지만, 가진층(加振層)에서 멀리 떨어진 곳에 대한 거동 예측 시에는 다소 오차가 발생한다.

핵심용어 : 국부진동, 부분구조법, 경계조건, 행렬응축기법

Abstract

When a structure is loaded with local vibration source, it may not be economical to model the whole structure to obtain the responses of specific members located near the sources. In this study, a substructuring technique has been used for local vibration of a framed structure. The boundary conditions of members selected are determined by condensing the degrees of freedom of the remaining members. Fixed and hinged boundary condition are also assumed for comparison. According to the results, the substructuring technique is quite efficient in predicting the responses of a structure on which the vibration source is located, but is not very reliable for the members located far away from the source.

Keywords : local vibration, substructuring technique, boundary condition, condensing the degrees of freedom

1. 서 론

건축구조물에는 동적하중을 유발하는 기계설

비가 설치되어 있기 때문에 이것으로 인하여 진동이 유발된다. 기계설비에 발생되는 하중은 기계설비의 구조와 배치에 따라서 달라지며 아무리

* 정회원·성균관대학교 건축공학과, 교수

** 성균관대학교 건축공학과, 박사과정

*** 정회원·성균관대학교 건축공학과, 전임강사

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

정교하게 제작된 기계설비라 할지라도 어느 정도의 동적하중이 발생되는 것은 피할 수 없다. 이러한 기계설비에 의하여 유발되는 하중은 크게 연직하중과 수평하중으로 구분될 수 있으며 연직하중이 주류를 이루고 있다.

구조물 내부에 설치된 기계설비의 진동에 의하여 연직하중이 가해지는 경우에는 구조물 전체에 진동이 발생하기보다는 기계가 설치된 인근부재에 국부진동의 형태로 주로 발생하며, 하중위치 및 구조물의 강성 및 질량의 분포에 따라서 구조물 전체의 진동으로 확산되기도 한다. 이때, 동적거동을 예측하기 위하여 전체구조물을 해석하는 것은 번거로운 일이다. 효율적인 연직진동해석에 관한 연구^{1), 2)}는 2차원구조물에 대하여 주로 이루어 졌으며 참고문헌 3에서는 구조물을 부분구조물로 나누어 각각의 부분구조물에 대하여 행렬응축기법을 이용하는 방법이 소개되어 있다. 이러한 방법은 구조물 전체를 해석하는 것보다는 자유도의 수가 줄어들지만 적합조건을 만족시키기 위해서는 좀 더 많은 자유도를 필요로 하며 계산이 복잡해지는 단점이 있다. 그러므로 본 논문에서는 국부진동이 발생하는 경우에 대하여 하중이 가진(加振)되는 곳과 응답을 얻고자 하는 곳만을 효율적으로 모형화 하는 기법에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 시간이력해석을 통하여 가속도 시간이력 비교, 진동수영역에서의 비교와 최대 및 최소가속도를 비교하였으며 가진충에 대해서는 매우 정확한 해석결과를 얻을 수 있었다.

2. 부분구조기법에 의한 국부진동해석

건축구조물의 국부진동은 주로 인접부재의 강성과 질량에 의하여 좌우된다. 그러므로 구조물 전체를 해석하는 것은 많은 시간과 기억용량을 요구하게 된다. 따라서 본 논문에서는 부분구조법을 사용하여 전체구조물을 부분구조물로 간략화 하여 해석하였다. 그러나 전체구조물을 너무 간략화 시키면 중요모드가 소실되며 이것은 많은 해석오차를 발생시키므로 최소한의 해석오차를 갖는 부분구조물의 모형화가 필요하다. 이를 위

하여 본 연구에서는 행렬응축기법에 의하여 계산된 경계조건을 사용하는 부분구조법에 의한 모형화 기법을 제안하였다.

그림 1(a)와 같은 대상구조물이 있을 때, 하중이 가진되는 구조물을 그림 1(c)와 같이 부분구조물이라 하고 부분구조물을 제외한 모든 구조물을 그림 1(b)와 같이 경계구조물이라 하자. 이때 부분구조물에서의 응답을 구하고자 할 때 대상구조물 전체를 모형화 하지 않고 부분구조물만 해석할 수 있다면 해석이 한결 간편해 질 것이다. 하지만 부분구조물만을 모형화 하여 해석할 경우에는 경계조건이 문제가 된다. 일반적으로 경계조건을 고정지지 또는 단순지지로 모형화한 부분구조물로 해석 할 수 있지만, 그 구조물의 경계에 부재가 연결되어 있을 경우에는 강성 및 질량값을 정확히 고려하기가 어렵다. 따라서 부분구조물로 모형화 할 때 경계조건을 효율적으로 고려할 수 있는 모델링 기법이 필요하다.

그림 1과 같이 국부진동이 발생하는 부재를 구조물로부터 분리하고 행렬응축기법을 부분구조물을 제외한 경계구조물에 적용하여 부분구조물과의 연결점 (a, b, c점)의 자유도 성분만을 남긴다. 이 자유도 성분에 대한 축소된 질량과 강성을 국부진동부재의 경계조건으로 사용할 수 있다. 부분구조물의 자유도 성분을 A로 표시하고 경계구조물의 자유도 성분을 B라 표시하여 감쇠가 없는 경우에 대하여 동적 평형방정식에 대입하면 식(1)과 같이 된다.

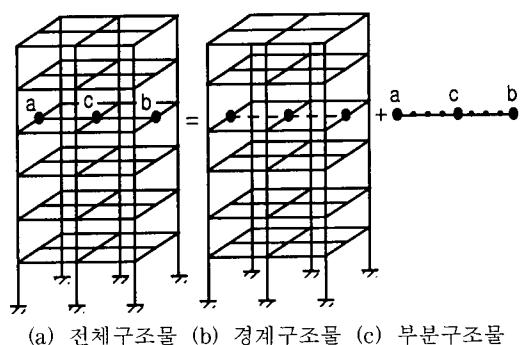


그림 1 경계조건을 고려한 연직진동 해석모형

$$\begin{bmatrix} M_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{D}_A \\ \ddot{D}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A \\ A_B \end{bmatrix} \quad (1)$$

행렬응축기법을 이용하면 응답을 구하고자 하는 자유도 성분만을 남기고 불필요한 자유도를 소거할 수 있다. 이를 위하여 Guyan의 정적 및 동적 행렬응축기법⁴⁾을 이용하였다. 정적 행렬응축을 위하여 식(1)의 강성행렬을 나타내면 다음의 식(2)와 같다.

$$\begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A \\ A_B \end{bmatrix} \quad (2)$$

식(2)를 전개하면 식(3)과 식(4)와 같이 된다.

$$S_{AA}D_A + S_{AB}D_B = A_A \quad (3)$$

$$S_{BA}D_A + S_{BB}D_B = A_B \quad (4)$$

여기서 식(4)를 D_A 에 대하여 정리한 후, 식(3)에 대입하면 식(5)와 같이 된다.

$$S_{AA}^*D_A = A_A^* \quad (5)$$

여기서 S_{AA}^* 및 A_A^* 는 다음과 같다.

$$S_{AA}^* = S_{AA} - S_{AB}S_{BB}^{-1}S_{BA} \quad (6)$$

$$A_A^* = A_A - S_{AB}S_{BB}^{-1}A_B \quad (7)$$

다음으로 식(1)에 대하여 동적 행렬응축기법을 적용하면 다음과 같다. 여기서는 식(8)과 같이 가정함으로써 식(9)와 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$T_{BA} = -S_{BB}^{-1}S_{BA} \quad (8)$$

$$M_{AA}^* = M_{AA} + T_{BA}^*M_{BA} + M_{AB}T_{BA} \quad (9)$$

그러므로 축소된 강성 및 질량행렬인 식(6)과 식(9)를 이용하면 고유치 해석에 소요되는 시간

과 시간이력해석에 소요되는 시간을 많이 단축할 수 있다. 이러한 모형화방법은 전체 구조물을 해석하는 경우보다 질량 및 강성행렬의 크기가 매우 줄어들게 되어 개인용 전산기로서도 실제의 복잡한 구조물을 해석할 수 있다. 여기서 주의하여야 할 점은 강성행렬은 근사값이 아니지만 질량행렬의 경우는 근사값이므로 과도하게 행렬을 응축하게 되면 많은 오차를 유발하게 된다. 그러므로 본 논문의 3절에서 예제해석을 통하여 고려하여야 할 부재의 범위와 효율성을 검토하였다.

3. 예제 해석

3.1 예제구조물의 개요

본 논문에서 그림 2와 같은 3차원 골조구조물에 대하여 부분구조법에 의한 모형화기법의 효율성을 검토하였다. 예제구조물은 7층의 철근콘크리트조 구조물로서 각 부재의 단면치수는 표 1과 같다.

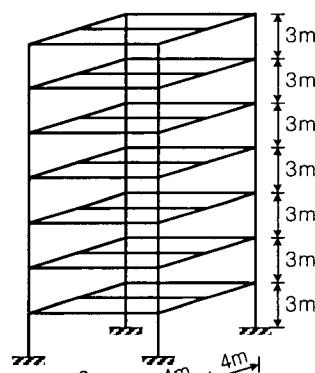


그림 2 예제 구조물(모델 A)

표 1 부재 단면치수

(단위 : cm)

총 수	기둥 (B×H)	보 (B×H)
5~7	45×45	40×60
1~4	60×60	40×60

동적해석에 사용한 질량은 구조물의 자중만을 고려하였다. 구조물의 감쇠비는 콘크리트구조물로 가정하여 5%로 하였다. 동적하중은 그림 3에 나타낸 것과 같으며, 해석 시간간격은 0.02초로 하였다. 구조물 전체에 대하여 세분화한 모델을 모델 A라 하였으며 정확해라고 가정하여 국부진동모델과 가속도 시간이력을 비교하였다. 여기서 경계조건의 중요성을 검토하고자 단순지지와 고정지지의 경계조건을 사용한 모델과 부분구조모델을 비교하였다.

3. 2 가진층(加振層)에서의 진동해석

구조물 내부의 임의의 보에 연직방향으로 진동하중이 가해져 국부진동이 발생한다면 가진되는 보만을 가지고 부분구조물로 모형화 할 수 있다.

그림 4의 모델 S-1은 본 논문에서 제안하고 있는 행렬응축기법에 의해 얻어진 경계조건을 사

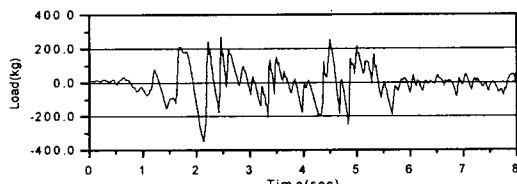


그림 3 입력하중

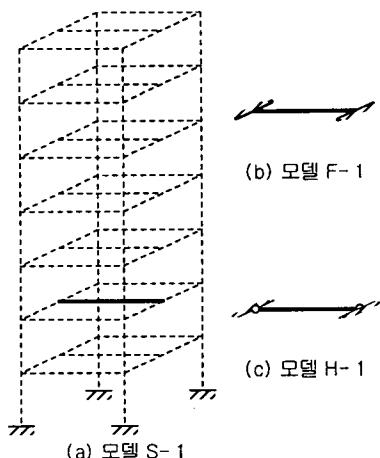
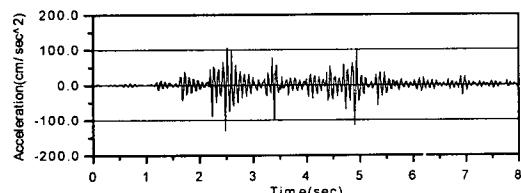


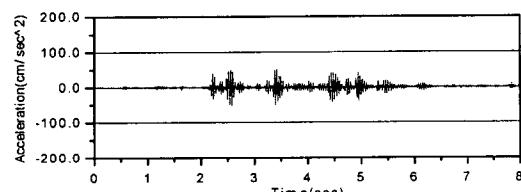
그림 4 부분구조 모델

용한 모형이다. 모델 H-1은 경계조건을 단순지지로, 모델 F-1은 경계조건을 고정지지로 하여 가진(加振)되는 보만을 모형화 한 것이다. 해석 결과는 그림 5에 나타내었으며 가진점에서의 가속도시간이력을 모델 A, 모델 H-1, 모델 F-1 및 모델 S-1에 대하여 나타내었다.

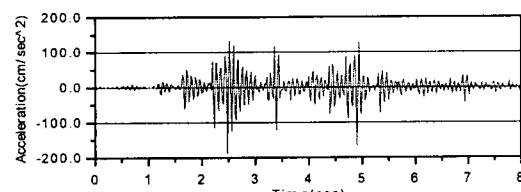
해석결과를 비교하면 경계조건을 고정지지로 가정한 모델 F-1은 모델 A의 결과보다 가속도의



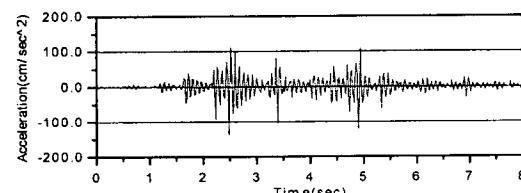
(a) 모델 A



(b) 모델 F-1



(c) 모델 H-1



(d) 모델 S-1

그림 5 가진점(A점)에서의 가속도 시간이력

크기가 작게 나타났는데 이것은 큰보의 강성이 과대평가 되었기 때문이다. 즉 작은보는 큰보에 지지되어 있는데 큰보에 발생하는 비틀림 효과를 고려하지 못하기 때문이다. 모델 H-1의 결과는 큰보의 비틀림 강성을 과소평가 하게 되어 응답이 확대되어 나타남을 알 수 있다. 그러나 모델 S-1은 비교적 정확해라고 가정한 모델 A와 비슷한 응답을 보이고 있다.

위의 해석결과를 최대값과 최소값에 대하여 발생시간과 함께 표 2에 나타내었으며 모델 A와 가장 근사한 최대 및 최소 가속도값을 나타내는 것은 모델 S-1이라는 것을 알 수 있다. 또한 최대 및 최소값이 나타나는 시간까지 일치함을 알 수 있다. 그러나 모델 S-1도 최대값 및 최소값에서 약간의 오차를 보이고 있다. 이것은 과도한 행렬용축으로 인하여 약간의 오차가 발생하였다. 이러한 시간이력 해석결과를 진동수 영역에서 표현하면 응답에 나타난 주된 주파수 성분을 검출 할 수 있다. 그림 6은 그림 5에 나타낸 가속도 시간이력을 진동수 영역에서 나타낸 것이며, 모델 A와 비교하였다. 모델 F-1의 응답은 지지조건을 고정지지로 가정함에 따라 진동수 성분이 정해라 가정한 모델 A보다 높게 나타나고 있다. 모델 H-1은 진동수 성분이 모델 A에 비하여 낮게 나타나고 있으며 이것은 지지조건을 단순지지로 가정하였기 때문이다. 그러나 모델 S-1은 모든 진동수 대역에서 좋은 결과를 보이고 있다.

그러나 더 정확한 해석을 위해서는 더 많은 부재를 고려할 필요가 있다. 그림 7은 가진되는 작

표 2 가진점(A점)에서의 가속도응답

모델명	최대 가속도		최소 가속도	
	발생시간 (sec)	최대값 (cm ² /sec)	발생시간 (sec)	최소값 (cm ² /sec)
A	2.520	105.8525	2.480	-130.6991
F-1	3.420	51.1487	2.580	-51.9746
H-1	2.520	132.9321	2.480	-189.1019
S-1	2.520	110.4871	2.480	-137.2962

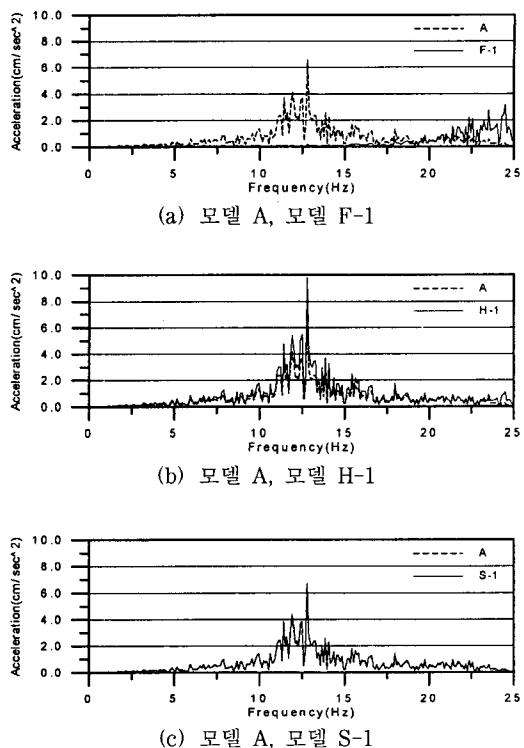
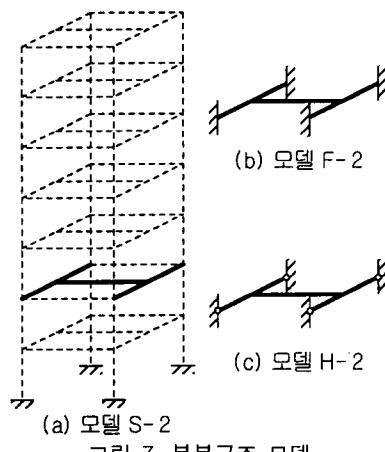
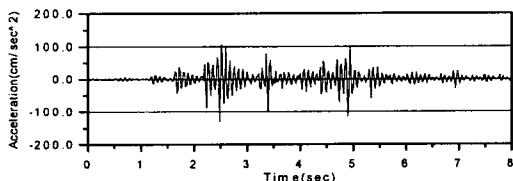


그림 6 가진점에서 가속도응답의 진동수 성분

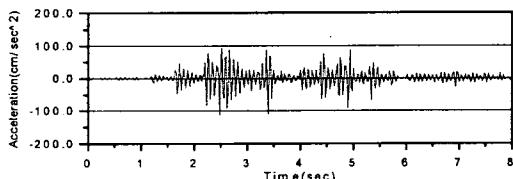


은보와 이를 지지하고 있는 큰보를 포함하여 모형화 하였으며, 그림 4에 나타내었던 모델보다 좋은 결과가 예상된다.

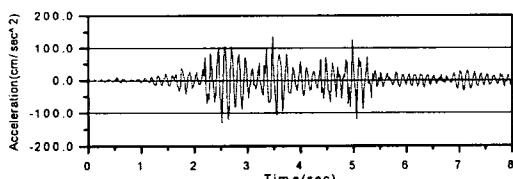
해석결과는 그림 8에 나타내었다. 그림 8을 보면, 모델 S-2가 가장 좋은 결과를 보이고 있다. 그러나 모델 F-2의 경우는 시간이력에서 비슷한 양상을 보이지만 최대값 및 최소값에 많은 오차를 보이고 있다. 이것은 진동수영역에서 나타낸 그림 9를 비교하여 보면 쉽게 알 수 있다. 모델 A에 비하여 상대적으로 모델 F-2는 고주파성분이, 모델 H-2는 저주파성분이 지배적임을 알 수 있다. 그러나 모델 S-2는 전 진동수 대역에서 잘 일치함을 알 수 있다.



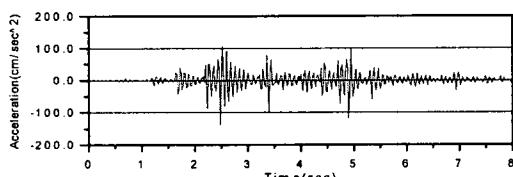
(a) 모델 A



(b) 모델 F-2



(c) 모델 H-2

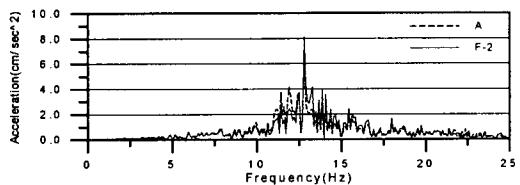


(d) 모델 S-2

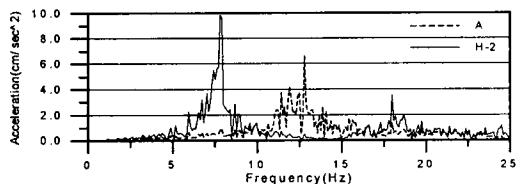
그림 8 가진점(A점)에서의 가속도 시간이력

표 3 가진점(A점)에서의 가속도응답

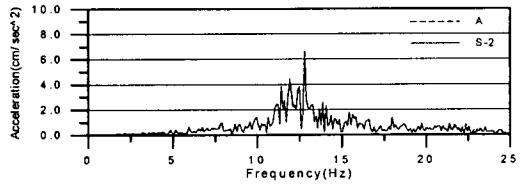
모델명	최대 가속도		최소 가속도	
	발생시간 (sec)	최대값 (cm ² /sec)	발생시간 (sec)	최소값 (cm ² /sec)
A	2.520	105.8525	2.480	-130.6991
F-2	2.520	92.7069	2.480	-114.1915
H-2	3.480	135.1761	2.520	-131.5257
S-2	2.520	105.0520	2.480	-137.2169



(a) 모델 A, 모델 F-2



(b) 모델 A, 모델 H-2



(c) 모델 A, 모델 S-2

그림 9 가진점에서 가속도응답의 진동수 성분

위의 결과를 비교할 때 더 정확한 해석을 위하여 그림 10에 나타낸 것과 같이 큰보에 연결된 기둥을 포함하는 더 많은 부재를 사용하여 모형화 하였다. 그러므로 정확도 면에서는 그림 10에 나타낸 모델 H-3가 가장 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다. 또한 이러한 방법을 통하여 해석결과의 수렴도를 알 수 있다.

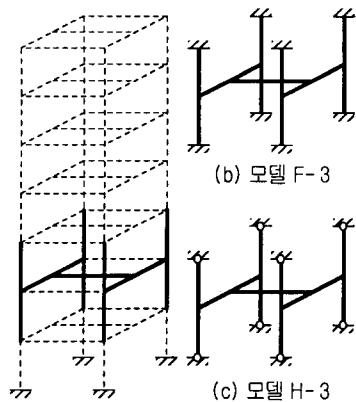


그림 10 부분구조 모델

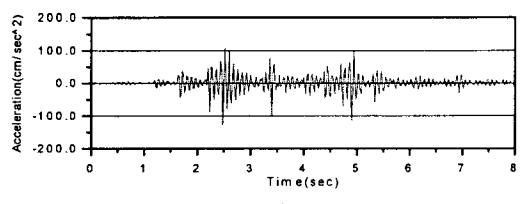
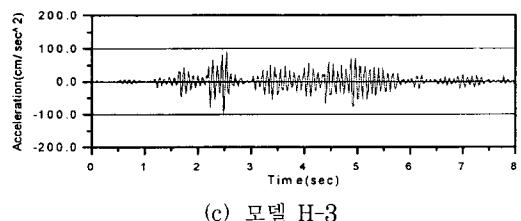
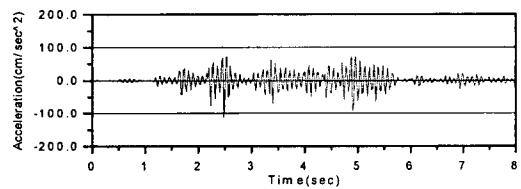
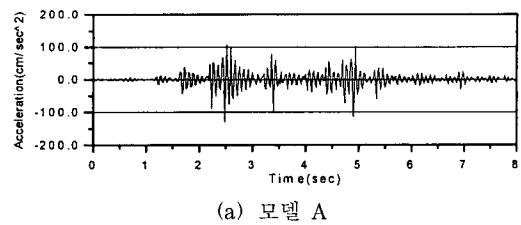


그림 11 가진점(A점)에서의 가속도 시간이력

표 4 가진점(A점)에서의 가속도응답

모델명	최대 가속도		최소 가속도	
	발생시간 (sec)	최대값 (cm ² /sec)	발생시간 (sec)	최소값 (cm ² /sec)
A	2.520	105.8525	2.480	-130.6991
F-3	4.880	72.4651	2.480	-115.3113
H-3	2.540	88.4453	2.480	-96.4691
S-3	2.520	106.6465	2.480	-129.3611

S-3가 모델 S-1 및 S-2보다 정확한 값을 보이고 있음을 알 수 있다. 이상에서의 결과를 종합하면 다음과 같은 소결론을 얻을 수 있다. 경계조건을 고정지거나 단순지지로 모형화하게 되면 자유도 수가 증가한다고 하여 해석결과가 정확해에 수렴하지는 않는다. 그러나 본 논문에서 제안한 모형화기법을 사용할 경우에는 인근 부재를 많이 고려할수록 해석결과는 정확해에 수렴함을 알 수 있었다.

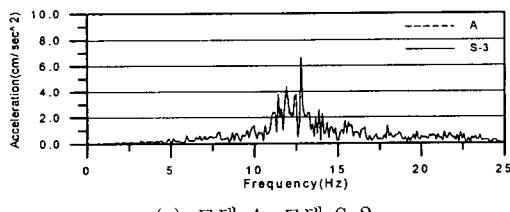
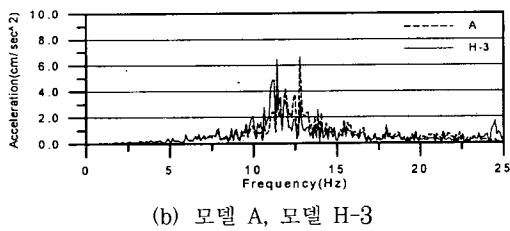
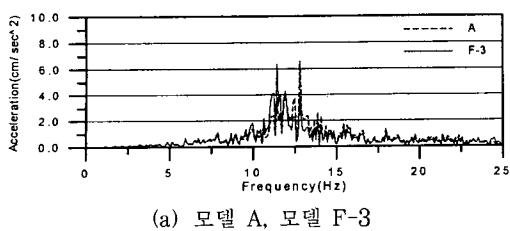


그림 12 가진점에서 가속도응답의 진동수 성분

해석시간과 자유도수를 비교하여 보더라도 모델 S-3이 효율적이라는 것을 알 수 있다. 예제구조물의 대하여 모델 A와 같이 모형화할 경우는 전체자유도수가 798개가 되지만, 본 연구에서 제시한 부분구조기법을 사용한 모델 S-3의 경우에는 자유도의 수가 156개로 해석시간과 컴퓨터 기억용량을 상당히 절약할 수 있다. 일반적으로 해석시간의 경우에는 자유도수의 세제곱에 비례하므로 자유도수가 2배 늘어난다면 해석에 소요되는 시간은 8배가 된다. 본 예제구조물의 경우에는 전체구조물에 대하여 해석한 경우와 부분구조기법을 사용한 모델에 대하여 표 5에 비교하여 나타내었다. 해석에 사용한 컴퓨터의 사양은 Pentium 133MHz에 RAM 64MB이다.

본 연구에서 제시한 부분구조기법을 이용하여 국부진동해석을 수행할 경우에 얻을 수 있는 장점은 행렬응축과정에서 해석시간이 다소 추가되

표 5 모델에 따른 해석시간

모델	자유도수	소요시간
모델 A	798	26분 36초
모델 S-1	30	1분 10초
모델 S-2	78	1분 22초
모델 S-3	156	1분 48초

지만, 행렬응축을 통하여 자유도수가 감소하게 되므로 고유치해석과 시간이력해석에 소요되는 시간이 매우 줄어들게 된다. 그러므로 구조물의 경간수와 층수가 증가될수록 자유도의 수는 급격하게 증가하게 될 것이며, 따라서 이러한 부분구조기법의 효과는 더욱 증대될 것이다.

3.3 비가진층(非加振層)의 국부진동해석

가진층이 아닌 다른 층에서의 거동을 예측하고자 하는 경우에는 구조물의 규모에 따라 가진층과 거동을 예측할 층의 부재들을 연결하여 부분구조물로 모형화하는 것은 한계가 있다.

그러나 두 층의 인접부재들로 모형화 할 수 있다면 매우 효율적일 것이며 해석시간 또한 많이 줄어들 것이다. 이를 위하여 그림 13과 같이 부분구조기법을 이용한 3개의 모델에 대하여 가속도 시간이력과 최대 및 최소 가속도를 비교하였다. 하중은 그림 3에 나타낸 것을 사용하였으며, 3층 바닥의 작은보 중앙 A점에 연직방향으로 가해지는 것으로 하였다. 가속도 시간이력을 비교

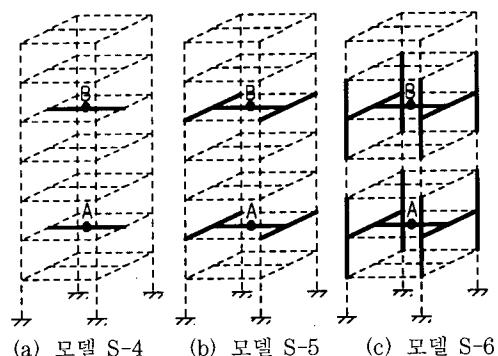


그림 13 부분구조 모델

한 곳은 6층의 작은보 중앙점 B이다.

먼저 각 모델에 대하여 최대 및 최소가속도 값을 나타내었으며 발생시간을 함께 표 6에 나타내었다. 표 6에 나타낸 각 모델들을 비교하여 보면 특정한 모델에 대하여 정확한 값을 나타낸다고 말할 수 없다.

또한 그림 14에 나타낸 비가진점(非加振點)에서의 시간이력은 모델 S-4, 모델 S-5 및 모델 S-6이 모델 A의 결과와 다소 많은 차이가 발생하지만 비슷한 양상을 보이고 있음을 알 수 있다. 이것은 행렬응축 과정에서 발생하는 수치적 오차 때문일 수도 있으며, 더 큰 이유는 부분구조물과 전체 구조물과의 자유도수 및 이에 따른 고유진동모드수의 차이, 즉 구조물의 진동에 영향을 미치는 진동모드를 제대로 표현하지 못하기 때문이다 생각된다.

해석결과를 진동수 영역에서 나타내면 이러한 오차는 좀 더 명확히 나타나게 된다. 그림 15는 해석결과를 진동수 영역에서 나타낸 것이다.

위의 결과에서 가진충과 응답을 얻고자하는 층의 인접부재들로 모형화하여 해석할 경우에는 많은 수의 인접부재를 고려하여도 해석결과가 정확해에 수렴하지는 않는다는 것을 알 수 있었다. 이상에서와 같이 본 연구에서 제시한 부분구조기법을 이용할 경우에는 가진되는 층에 대해서는 비교적 정확하게 거동을 예측할 수 있다. 비가진 층에 대한 거동 예측 시에는 어느 정도 오차가 발생하였다. 그러나 해석결과와 다소 차이가 발생하지만 비슷한 양상을 보이고 있음을 알 수 있다.

표 6 비가진점(B점)에서의 가속도 응답

모델명	최대 가속도		최소 가속도	
	발생시간 (sec)	최대값 (cm ² /sec)	발생시간 (sec)	최소값 (cm ² /sec)
A	2.540	5.2295	2.520	-5.7555
S-4	2.540	5.6974	2.600	-6.7032
S-5	2.640	8.0816	2.520	-8.2918
S-6	2.640	6.7407	4.940	-6.6223

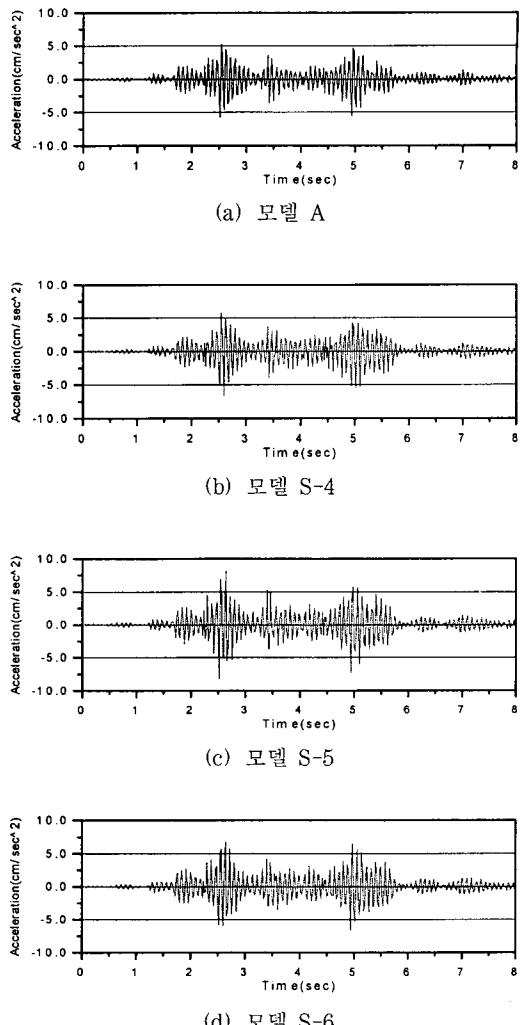
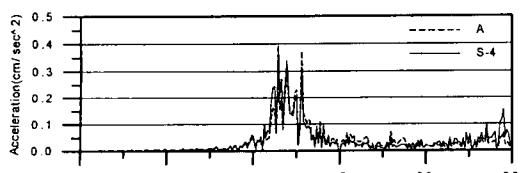


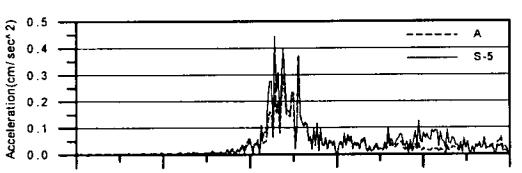
그림 14 비가진층(B점)에서의 가속도 시간이력

4. 결 론

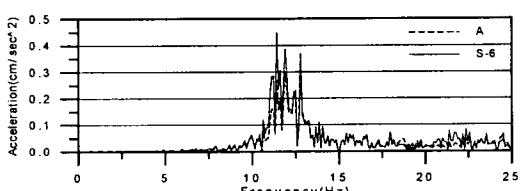
본 논문에서는 건축구조물을 효율적으로 해석하기 위하여 구조물의 일부분만을 모형화하는 부분구조기법에 대하여 연구하였다. 경계조건에 대한 영향을 비교하기 위하여 부분구조모형의 경계조건을 단순지지, 고정지지로 모형화한 모델과 비교하였다. 또한 강성과 질량행렬을 행렬응축기법을 이용하여 응축한 경계조건을 이용한



(a) 모델 A, 모델 S-4



(b) 모델 A, 모델 S-5



(c) 모델 A, 모델 S-6

그림 15 비가진층(B점)에서 가속도응답의 진동수 성분

모델과 비교하였다. 각 모델별 해석결과를 비교, 분석하기 위하여 가속도 시간이력, 최대 및 최소 가속도와 발생시간을 함께 비교하였다. 이상으로 논문에서는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 행렬응축기법을 이용하여 경계조건을 고려하는 부분구조법의 경우에는 가진층에 대하여 모

든 자유도를 고려하면 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있다.

2) 경계조건을 단순지지 및 고정지지로 가정하여 해석할 경우에는 연직방향의 강성 및 질량이 제대로 고려되지 않아 해석결과에서 많은 오차가 발생한다.

3) 비가진층에서의 동적거동 예측에 있어서는 과도한 행렬응축으로 인하여 다소의 오차가 발생할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 연구비 지원으로 수행되었음을 밝히며 이에 감사드립니다.

참고 문현

1. 이동근, 송종걸, 정길영, 김우범, "대형 철골구조물의 효율적인 국부진동해석", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제7권, 제1집, 1994, pp.105~112
2. 이동근, 송정걸, 이동근, 김우범, "구조물의 효율적인 연직진동해석", 대한토목학회논문집, 제15권, 제4호, 1995, pp.835~843
3. William Weaver, Jr., Paul R. Johnston., *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, 1987, pp.444~463
4. Weaver, JR., Timoshenko, and Young, *Vibration problems in engineering*, WILEY, 1990, pp.534~542

(접수일자 : 1998. 10. 14)