

구조시스템의 동적응답을 이용한 역해석에서의 악조건 특성 규명

On the Ill-condition of Reverse Process from Structural Dynamic Response Data

양 경 택*
Yang, Kyung-Taek

요지

본 연구에서는 시스템의 해석적 모델과 측정된 응답을 이용하여 입력하중을 추정하는 역해석 기법을 유한요소모델과 같은 해석적 모델을 알고 있는 경우와 주파수응답함수와 같은 실험적 모델을 알고 있는 경우에 대하여 제시하였으며 이때 발생되는 수학적 악조건의 특성을 규명하였다. 역해석시 발생되는 수학적 악조건은 시스템의 동강성행렬과 측정위치에 의해 결정되는 특성행렬의 조건수에 따라 결정되며 역해석기법을 공학문제에 적용하기 위하여는 특성행렬의 조건수가 낮아지도록 주자유도 및 측정점을 선택하여야하고 특히 공진영역 및 반공진영역에서는 필연적으로 악조건이 발생됨을 알 수 있었다. 수학적 악조건의 특성을 명확히 규명하기 위하여 간단한 수치해석을 통하여 그 결과를 제시하였다.

핵심용어 : 악조건, 역해석, 유한요소모델, 입력하중규명, 동강성행렬, 조건수

Abstract

An approach to identifying input forces is proposed using measured structural dynamic responses and its analytical model such as finite element model and regenerated frequency response functions. The identification of forces is a reverse process and ill-conditioned problem. Its solution is unstable and generally case dependent. In this paper, the ill-condition is described considering characteristic matrix which is defined by measured degrees of freedom and dynamic stiffness matrix. Special attention is focused on the condition number of a characteristic matrix used in the solution algorithm of this reverse process. Simple example is presented in support of the ill-condition of a reverse process.

Keywords : ill-condition, reverse process, finite element method, identification of force, dynamic stiffness matrix, condition number

1. 서 론

시스템해석의 궁극적인 목적은 대상시스템을

묘사하는 해석적 모델을 수립하여 특정입력하중에 대한 시스템의 응답을 구하는데 있다. 최근들어 컴퓨터의 보편화와 상용유한요소 프로그램의

* 정회원·대림대학 자동화과, 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

보급으로 해석 및 제어에 주로 유한개의 자유도를 지닌 이산모델(discrete model)이 주로 사용되고 있으며 유한요소프로그램의 전처리기능(pre-processor)의 발달로 기하학적 형상이 복잡한 시스템에 대하여도 수백 또는 수천의 자유도를 지닌 이산시스템 모델을 쉽게 구할 수 있다^{1), 2)}. 더우기 해석적 모델의 신뢰도를 제고하기 위하여 유한요소모델과 실측데이터를 결합하는 시도가 상당부분 진행되어 왔으며 이를 이용한 대상 시스템의 결함색출이나 노후도 진단과 같은 시스템 규명(system identification)기법들이 사용되고 있는 실정이다^{3)~5)}.

해석 및 시스템규명이외에 시스템공학의 또 다른 분야는 측정된 응답과 시스템의 해석적 모델로부터 입력하중을 규명하는 분야로서 공학적으로 많은 요구가 있음에도 불구하고 불안정한 수학적 특성때문에 사용에 제한을 받아온 것이 현실이다. 기계구조물과 같은 시스템에 작용하는 동적 입력하중을 파악하는 것은 설계나 상태진단에 매우 유용하게 사용될 수 있으며 충격이나 진동과 같은 문제에서 주어진 응답레벨을 일으키는 입력하중의 특성을 명확하게 규명하는 것은 필수적이다. 이처럼 구조계의 동적입력하중을 구하는 것은 해석(analysis)의 반대개념인 역해석(reverse process)으로 수학적으로 악조건(ill-condition)이 발생한다고 알려져 있으며^{6), 7)} 이는 측정된 응답의 미세한 오차나 시스템의 해석적 모델수립시 발생되는 작은 오차가 입력하중 규명에 많은 오차를 발생시키는 것을 의미하며 이로 인해 이 기법을 공학적 문제에 적용하는데 많은 어려움이 발생하게 된다. 이를 해결하기 위하여 최적제어기법을 이용한 여러가지 시도가 제어공학 분야에서 제안되었고 역필터(inverse filter)나 컴플렉스 셉스트럼(complex cepstrum)과 같은 신호처리 기법들이 단일입력/단일출력 시스템에 대하여 제안되었으나⁸⁾ 대부분의 공학적 문제는 복수의 입력하중에 대한 복수의 응답문제이므로 실용화에 제한을 받아 왔으며 이에 대한 연구가 현재 활발히 진행중이다^{9), 10)}.

본 연구에서는 역해석기법을 공학문제에 적용하여 유한요소모델과 같은 시스템의 해석적모델과 구조계의 부분적인 측정응답을 이용하여 입력하중을 추정하는 방법을 제시하였으며 이 때 발생되는 수학적 악조건의 특성을 규명하였다. 입력하중의 추정을 위한 역해석에 있어서는 대상 시스템의 해석적 모델을 알고 있는 경우와 측정된 주파수응답함수를 알고 있는 경우를 구분하였으며 유한요소모델과 같은 해석적 모델의 단점인 많은 수의 자유도를 줄이기 위하여 시스템의 입출력과 관련된 소수의 자유도만을 지닌 축약된 해석적 모델을 사용하였다. 또한 역해석에서 발생되는 수학적 악조건을 구조시스템이 발현하는 모우드(mode)와 같은 동적특성과 연관하여 규명하였으며 악조건의 특성을 명확히 예시하기 위하여 간단한 구조계에 대한 수치해석을 통하여 그 결과를 제시하였다.

2. 역해석 모델링

2.1 운동방정식

n 개의 자유도를 지닌 비례감쇠 선형시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서 M , C , K 는 시스템의 질량, 감쇠, 강성 행렬로서 유한요소모델이거나 축약된 형태의 등가모델이다. 식(1)의 운동방정식을 이용하여 모우드해석을 수행한 뒤, 물리좌표계 $x(t)$ 를 모우드좌표계 $\eta(t)$ 로 변환하면 식(2)와 같고

$$\begin{aligned} & \{\ddot{\eta}(t)\} + [2\xi\omega_n] \{\dot{\eta}(t)\} + [\omega_n^2] \{\eta(t)\} \\ & = [\Phi]^T f(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$[\Phi]$ 는 정규화된 모우드행렬(normalized modal matrix)로서 다음의 성질을 만족한다¹¹⁾.

$$[\Phi]^{-T}[\Phi]^{-1} = [M] \quad (3-a)$$

$$[\Phi]^{-T}[\omega_n^2][\Phi]^{-1} = [K] \quad (3-b)$$

$$[\Phi]^{-T}[2\xi\omega_n][\Phi]^{-1} = [C] \quad (3-b)$$

해석의 관점에서는 식(1), (2)로 표현되는 구조계의 지배방정식을 이용하여 외부의 입력하중에 대한 응답을 구하게 되며 경계조건이 명확하게 기술되는 구조계에 대하여는 정확한 해석결과를 구할 수 있다. 또한 입력하중을 산정하거나 연속체를 유한요소모델화 하는 과정에서 발생되는 오차는 식(1), (2)에서처럼 입력하중과 응답의 관계가 승적(convolution) 관계이므로 대개의 경우 응답에 선형적으로 영향을 미치게 된다.

반면 측정된 구조계의 부분적인 응답과 구조계의 해석적 모델을 이용하여 입력하중을 추정하는 문제는 역해석(reverse process)으로서 식(1) 또는 (2)의 지배방정식에서 응답벡터 $\{x\}$ 나 $\{\eta\}$ 로부터 입력하중 $\{f\}$ 를 규명하는 과정이다. 이는 입력과 시스템으로부터 응답을 구하는 승적과는 반대개념인 응답과 시스템으로부터 입력을 구하는 역승적(deconvolution)기법을 사용하여야 하며 본 논문에서는 구조계의 유한요소모델과 같이 해석적 모델을 알고 있는 경우와 해석적 모델 또는 실측데이터로부터 주파수응답함수를 알고 있는 경우를 구분하여 역해석 방법을 제시하였고 이때 발생되는 악조건의 특성을 규명하였다.

본 연구의 기본가정은 다음과 같다.

가정 1: 구조계는 선형시스템이다.

가정 2: 측정된 응답의 갯수(m)는 관심있는 구조계의 모우드 수(q) 이상이다.

가정 3: 관심있는 구조계의 모우드수(q)는 입력하중의 갯수(p) 이상이다.

2. 2 동강성행렬을 이용한 역해석

대상 시스템에 대해 유한요소모델과 같은 해석적모델을 알고 있는 경우에 측정가능한 소수의 응답으로부터 입력하중을 구하는 역해석은 다음과 같다.

식(1)을 주파수영역에서 표시하면 식(4)나 식(5)와 같고¹¹⁾

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)X(\omega) = F(\omega) \quad (4)$$

$$\text{또는 } D(\omega) \cdot X(\omega) = F(\omega) \quad (5)$$

여기서 $X(\omega)$, $F(\omega)$ 는 $x(t)$ 와 $f(t)$ 의 푸리에 변환(Fourier transform)이고 $D(\omega)$ 는 구조계의 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)이다.

유한요소모델과 같은 선형계의 이산모델은 보통 많은 수의 자유도를 지니게 되는데 이 경우 연산의 효율성 및 측정점의 감소를 위하여 계를 기술하는 자유도의 수를 줄이게 된다. 하중의 입력위치 및 측정이 가능한 응답의 위치에 대한 m 개의 자유도를 $\{X_m\}$ 으로 하고 $(n-m)$ 개의 제거될 자유도를 $\{X_s\}$ 로 구분하여 분리된 행렬 형태로 표현하면 식(6)과 같고

$$\begin{bmatrix} D_{mm}(\omega) & D_{ms}(\omega) \\ D_{sm}(\omega) & D_{ss}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m(\omega) \\ X_s(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $D_{ij}(\omega)$ 는 동강성 행렬성분이다.

식(6)에서 $\{X_s\}$ 를 $\{X_m\}$ 으로 표현한 뒤

$$X_s(\omega) = -D_{ss}^{-1}(\omega) \cdot D_{sm}(\omega) \cdot X_m(\omega) \quad (7)$$

식(7)을 식(6)에 대입하여 축약된 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$[D_{mm} - D_{ms}D_{ss}^{-1}D_{sm}]X_m(\omega) = I \cdot F_m(\omega) \quad (8)$$

$$\text{또는 } D^c(\omega) \cdot X_m(\omega) = I \cdot F_m(\omega) \quad (9)$$

$$(m \times m) \quad (m \times 1) \quad (m \times m) \quad (m \times 1)$$

여기서 I 는 단위행렬이며 $D^c(\omega)$ 는 축약된 형태의 동강성행렬이다.

F_m 의 축약된 하중벡터중에서 실제로 입력하중이 작용하는 p 개의 위치만을 선정하고 입력하중이 영인 $(m-p)$ 개의 하중성분을 제거하면 식(9)는 식(10)과 같다.

$$\begin{aligned} D^c(\omega) \cdot X_m(\omega) &= I_p \quad \cdot \quad F_m^p(\omega) \\ (m \times m) \quad (m \times 1) \quad (m \times p) \quad (p \times 1) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 I_p 는 단위행렬 I 의 열중에서 입력하중에 해당하는 열만을 선정한 행렬이며 F_m^p 은 하중벡터 F_m 중에서 하중이 영이 아닌 성분만을 취한 벡터이다. 측정된 구조계의 응답 X_m 으로부터 구조계의 입력하중 F_m^p 를 규명하는 문제는 식(10)으로부터 다음과 같다.

$$F_m^p(\omega) = (I_p)^+ D(\omega) \cdot X_m(\omega) \quad (11)$$

여기서 $(I_p)^+$ 는 I_p 의 일반화된 역행렬(generalized inverse)로 식(12)과 같이 정의된다.

$$(I_p)^+ = [[I_p]^T [I_p]]^{-1} [I_p]^T \quad (12)$$

주파수 응답함수의 관점에서 시스템의 출력을 나타내는 특성행렬의 개념을 도입하여 식(10)과 식(11)을 정리하면 다음과 같고

$$X_m(\omega) = [A] F_m^p(\omega) \quad (10')$$

$$F_m^p(\omega) = [A]^+ X_m(\omega) \quad (11')$$

여기서 특성행렬,

$$[A] = [D^c(\omega)]^{-1} \cdot I_p \quad (13)$$

측정된 응답으로부터 입력하중을 추정하는 문제는 식(11')과 같이 최소자승오차의 개념을 도입한 선형대수 방정식으로 표현되며 시간영역에서 입력하중의 특성은 역푸리에 변환(inverse Fourier Transform)을 통해 구할 수 있다.

2. 3 주파수응답함수를 이용한 역해석

식(5)의 동강성행렬로부터 주파수응답함수를 구하면 식(14)와 같다.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= D(\omega)^{-1} \cdot F(\omega) \\ &= H(\omega) \cdot F(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $H(\omega)$ 는 주파수응답함수로서 유한요소 모델과 같은 해석적 모델로부터 구하거나 또는 실측데이터를 이용하여 구할 수 있다. 외부에서 입력되는 하중이 p 개이고 응답측정점이 m 개인 경우 식(14)은 식(15)과 같이 축약된 형태로 표현할 수 있으며¹¹⁾

$$\begin{aligned} X_m(\omega) &= H^c(\omega) \cdot F_m^p(\omega) \\ (m \times 1) \quad (m \times p) \quad (p \times 1) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $H^c(\omega)$ 는 축약된 주파수응답함수이고 $H_{ij}^c(\omega)$ 성분은 j 번째 하중에 대한 구조계의 i 번째 자유도의 응답을 나타내며 식(10')과 식(15)를 비교하면 전절에 기술한 특성행렬과의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} [A] &= H^c(\omega) \\ &= D^c(\omega)^{-1} \cdot I_p \end{aligned} \quad (16)$$

식(15)의 관계식에서 측정된 응답 X_m 으로부터 입력된 하중을 추정하는 문제는 최소자승오차의 개념으로 다음과 같으며

$$\begin{aligned} F_m^p &= [H^c(\omega)]^+ X_m \\ &= [A]^+ X_m \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)이 물리적 의미를 지니기 위하여는 특성행렬 $[A]$ 에 대한 일반화된 역행렬의 랭크(rank)가 보장되어야 하며 이를 위하여는 측정된 응답의 수 (m)가 입력하중의 수 (p) 이상 이어야 한다.

3. III-Condition

측정되거나 또는 추정된 시스템의 응답으로부터 입력하중을 구하는 역해석은 식(11), (17)에

서처럼 선형대수방정식을 푸는 문제로 귀결되며 측정데이타에 오차가 없을 경우에는 완벽하게 입력하중을 규명할 수 있다. 그러나 구조계의 입출력을 나타내는 관계식에서 유한요소모델과 같은 해석적 모델의 오차나 또는 구조계의 응답을 측정할 때 발생되는 측정오차로 인하여 응답벡터에는 δX_m 만큼의 응답오차가 발생하게 되며 이로 인하여 규명된 입력 하중에는 δF_m^p 만큼의 오차가 발생하게 된다. 식(18)의 입출력 관계식을 이용하여 추정된 하중벡터의 상대오차범위는 선형대수이론으로부터 식(19)와 같이 표현된다¹³⁾.

$$X_m = A \cdot F_m^p \quad (18)$$

$$\frac{\|\delta F_m^p\|}{\|F_m^p\|} \leq \|A\| \|A^+\| \left\| \frac{\delta X_m}{X_m} \right\| \quad (19)$$

여기서 $\|A\|$ 는 구조계의 특성행렬 $[A]$ 의 놈(norm)이며 $\|A\| \|A^+\|$ 는 조건수(condition number)이다.

특성행렬 $[A]$ 의 조건수는 대수 방정식의 선형독립성을 확인하는 수단이며 역해석에서 발생되는 수학적 불안정을 판단하는 기준이 된다. 조건수를 구하기 위하여는 특이해분리기법(singular value decomposition)이 주로 사용되며 측정된 구조계의 응답이 m 개이고 입력하중이 p 개인 경우에 특성행렬 $[A]$ 를 특이해분리하면 식(20)과 같다¹³⁾.

$$[A] = [U][\sigma_i][V]^T \quad (20)$$

여기서 σ_i 는 특이치(singular value)로 정의되어며 $[U]$ 와 $[V]$ 는 다음의 조건을 만족하는 좌측특이벡터(left singular vector) 및 우측특이벡터(right singular vector)이다.

$$[U]^T[U] = [I] \quad (21-a)$$

$$[V]^T[V] = [I] \quad (21-b)$$

특성행렬 $[A]$ 조건수는 식(20)의 특이치중 최소의 특이치(σ_{\min})에 대한 최대의 특이치(σ_{\max})의 비로

서 최소의 특이치가 영에 근접할 경우에는 식(22)로 정의되는 조건수가 커지게 되어 수학적으로 불안정한 해를 야기시키게 되는 악조건이 발생한다¹³⁾.

$$\begin{aligned} Cond(A) &= \sigma_{\max}/\sigma_{\min} \\ &= \|A\| \|A^+\| \end{aligned} \quad (22)$$

역해석을 이용한 입력하중의 추정에서 발생되는 오차의 한계는 식(19)에서처럼 특성행렬의 조건수에 의해 결정되며 구조계의 조건수는 동강성행렬이나 주파수응답함수와 밀접한 관계를 지니고 있으며 식(13)으로부터 특성행렬의 조건수를 식(23)과 같이 표시할 수 있다.

$$\|A\| \|A^+\| \leq \|D^c(\omega)\| \|D^c(\omega)^{-1}\| \|I_p\| \|I_p^+\| \quad (23)$$

추정된 하중벡터의 상대오차는 식(19)와 식(23)으로 부터 다음과 같이 표시할 수 있으며 축약된 구조계의 동강성행렬의 조건수와 하중의 입력위치에 따라 변화하게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta F_m^p\|}{\|F_m^p\|} &\leq \|A\| \|A^+\| \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \\ &\leq \|D^c(\omega)\| \|D^c(\omega)^{-1}\| \|I_p\| \|I_p^+\| \cdot \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \\ &= Cond(D^c(\omega)) \cdot Cond(I_p) \cdot \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \end{aligned} \quad (24)$$

그림 1(b)와 같이 역해석을 수행하려는 대상구조계에 있어서는 조건수가 식(24)처럼 주파수에 따라 변화하게 되며 공진영역(resonance region)에서는 특정 모우드의 기여도가 다른 모우드의 기여도보다 월등히 크므로 식(22)에서 최대의 특이치가 큰 값을 지니게 되어 조건수가 커지게 되고 반공진영역(anti-resonance region)에서는 특정 모우드의 기여도가 다른 모우드보다 월등히 작아 최소의 특이치가 영에 접근하므로 또한 조건수가 커지게 된다.

이를 에너지흐름의 관점에서 표현하면 그림 2(a)와 같이 구조계의 공진영역에서는 입력하중

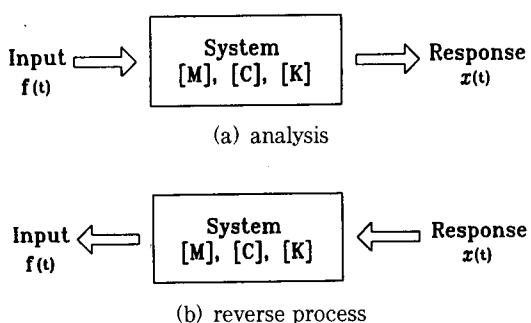


Fig. 1 Analysis and reverse process.

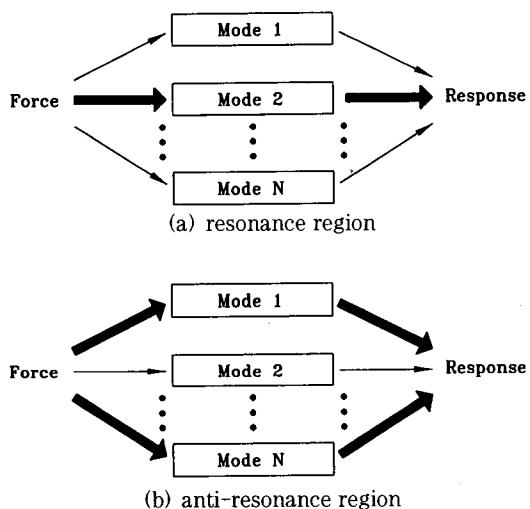


Fig. 2 Flow of energy through structural system

에 의한 에너지가 특정경로(mode)만을 통하여 응답에 기여하게 되므로 역해석에 사용되는 특성 행렬의 랭크가 보장되지 않게 되며 반공진영역에서는 그림 2(b)와 같이 입력하중의 에너지가 특정경로를 제외한 다른 경로만을 통하여 응답에 기여하므로 결과적으로 특성행렬의 랭크가 1개 모자라게 된다.

식 (24)에서 알 수 있듯이 조건수가 커지면 작은 측정응답의 오차에도 불구하고 규명된 입력하중에는 많은 오차가 발생하게 되고 수학적으로도 악조건이 발생하게 되어 공학적으로 의미없는 결과를 도출하게 되는 것이 일반적인 현상이다.

4. 수치해석 및 고찰

역해석시 발생하는 악조건의 특성은 동강성행렬의 조건수와 관계되며 조건수는 인접한 모우드의 기여도의 비이므로 다자유도의 계에서는 여러 주파수에서 악조건이 발생하게 되는데 본 장에서는 악조건의 특성을 명확하게 나타내는 2자유도의 계에 대하여 수치해석을 수행하였으며 그이상의 다자유도의 계에 대하여는 2자유도계에서 발생되는 악조건이 반복적으로 나타나게 된다.

그림 3과 같은 2개의 자유도를 지닌 구조시스템에 대하여 외부에서 독립된 2개의 입력하중이 작용할 경우 구조계의 응답은 2개의 질량에 대한 변위로서 나타나게 된다. 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같으며 구조시스템의 물성치는 표 1과 같다.

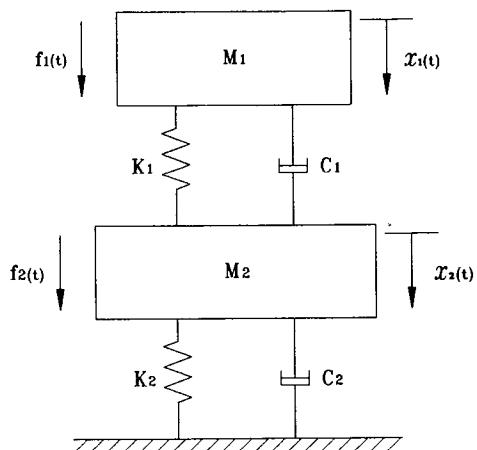


Fig. 3 2 dof example structure,

Table 1 System parameters

	Magnitude	Unit
M_1	100	kg
M_2	100000	kg
C_1	10	N sec/m
C_2	1000	N sec/m
K_1	4×10^6	N/m
K_2	7×10^7	N/m

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1+C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1+K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

대상시스템을 모우드해석하면 1차 고유진동수 (f_1)는 4.21Hz이며 2차 고유진동수 (f_2)는 31.86Hz로서 표 2의 고유벡터에서 알 수 있듯이 1차 모우드는 두 질량사이의 상대운동이 없는 강체운동모우드 (rigid body mode)이고 2차모우드는 탄성운동모우드 (flexible mode)이다. 전체시스템의 동적특성을 나타내는 주파수응답함수는 그림 4와 같다.

Table 2 Modal parameters

	f_n	Mode shape		remarks
		x_1	x_2	
1st Mode	4.21	0.71	0.71	rigid body mode
2nd Mode	31.86	11.0	-0.001	flexible mode

우선 대상시스템에 대한 역해석에서 발생되는 특성을 규명하기 위하여 2개의 입력하중과 2개의 응답에 대해 식(13)으로 정의되는 구조시스템에 대한 특성행렬의 특이치를 식(20)으로부터 구하고 이를 이용하여 조건수를 주파수별로 구하면 그림 5와 같다. 그림에서처럼 대상시스템의

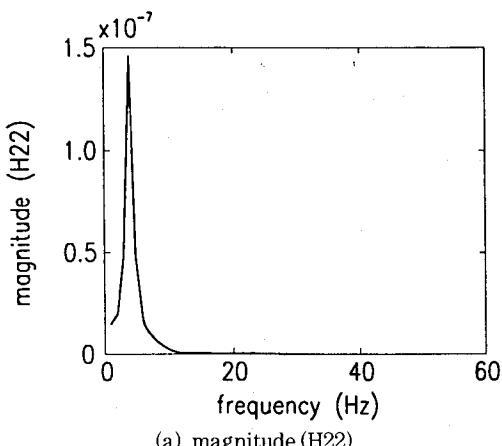
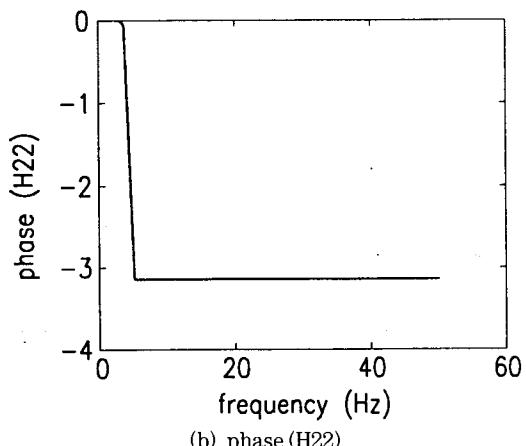
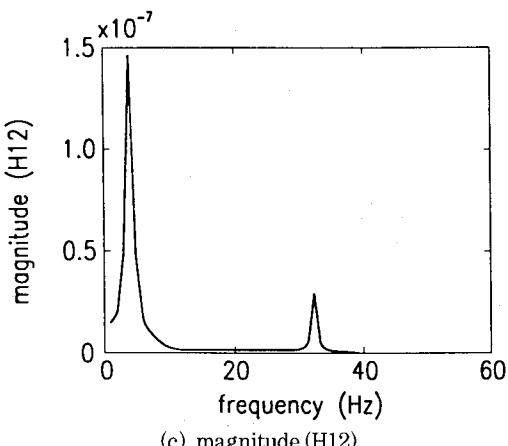
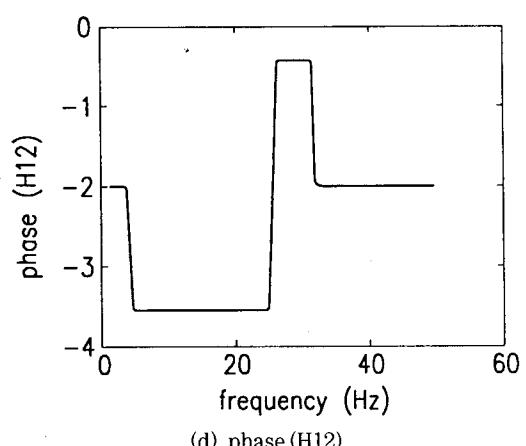
(a) magnitude (H_{22})(b) phase (H_{22})(c) magnitude (H_{12})(d) phase (H_{12})

Fig. 4 Frequency response functions

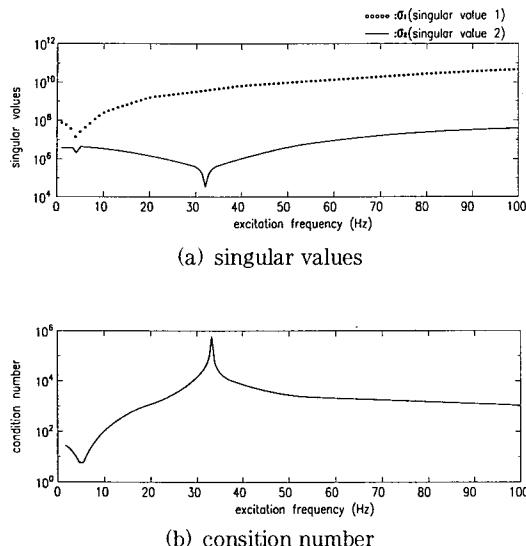


Fig. 5 Singular values and condition number of an example structure

조건수는 2차 고유진동수(f_2) 근처에서 상당히 크게 나타나고 있으며 1차고유진동수영역(f_1)에서는 조건수가 비교적 작은 값을 취하고 있다. 이는 앞서 모우드해석의 결과에서 처럼 1차모우드는 독립적으로 잘 분리된 모우드로써 전체 시스템에 대하여 독립적인 역할을 하게 되어 악조건의 영향이 없는 반면 2차모우드에서는 연성효과로 인하여 악조건이 발생하게 된다.

본 예제에서는 독립된 2개의 랜덤하중 및 정현파하중을 발생시키고 이를 입력하중으로 가정하여 구조계의 변위응답을 구한 뒤, 이 변위응답을 측정치로 하여 구조계에 가해지는 2개의 입력하중을 규명하였다. 입력하중 규명시 발생할 수 있는 실질적 문제인 측정잡음과 해석적 모델의 오차에 대한 영향을 고려하기 위하여 다음과 같이 세경우에 대하여 수치해석을 수행하였으며 전체적인 과정을 그림 6에 도시하였다.

4. 1 측정잡음과 해석적 모델의 오차가 없는 경우

평균이 영이고 광대역(wide band)의 주파수특성을 지닌 랜덤하중을 발생시키어 입력하중으로

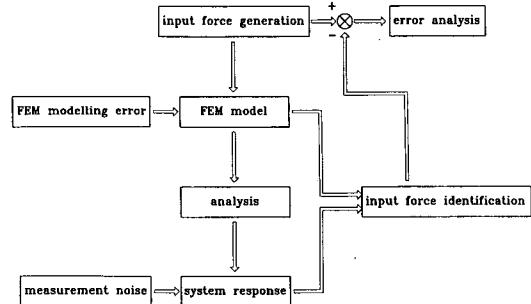


Fig. 6 Flow chart of reverse process

한 뒤, 구조계의 응답을 구하면 그림 7과 같고 이를 측정된 변위응답으로 가정하여 식(11)로부터 2개의 입력하중을 규명하였다. 측정된 응답변위는 그림 7에서 처럼 1차 모우드인 4.21Hz가 주가 되고 2차 모우드인 31.86Hz가 부가적으로 포함되어 있다.

측정잡음 및 해석적 모델의 오차가 없는 경우에 본 논문에서 제시된 방법으로 규명된 입력하중은 그림 8과 같이 시간영역에서 실제 입력하중을 정확히 규명하고 있으며 이는 식(19)의 입력추정의 상대오차식에서 예측할 수 있듯이 추정된 입력하중의 상대오차는 영이며 측정된 응답으로부터 입력하중을 추정하는데 대수학적으로 아무런 문제점도 야기시키지 않고 측정점의 수가 입력하중의 수 이상일 경우에는 항상 정확한 결과를 얻을 수 있다. 또한 입력하중을 회전기계에서 발생되는 동하중과 같이 정현파로 한 경우에도 규명된 입력하중은 그림 9와 같이 실제입력하중을 잘 묘사하고 있다.

4. 2 측정잡음이 존재하는 경우

현장측정시 발생할 수 있는 측정잡음의 영향을 고려하기 위하여 그림 7과 같은 응답에 인위적으로 랜덤한 잡음을첨가하여 입력하중을 규명하였다. 첨가된 잡음은 정규분포의 특성을 지닌 랜덤잡음이고 잡음비는 정의는 응답신호의 r.m.s값에 대한 측정잡음의 r.m.s비로 다음식과 같이 정의하였다.

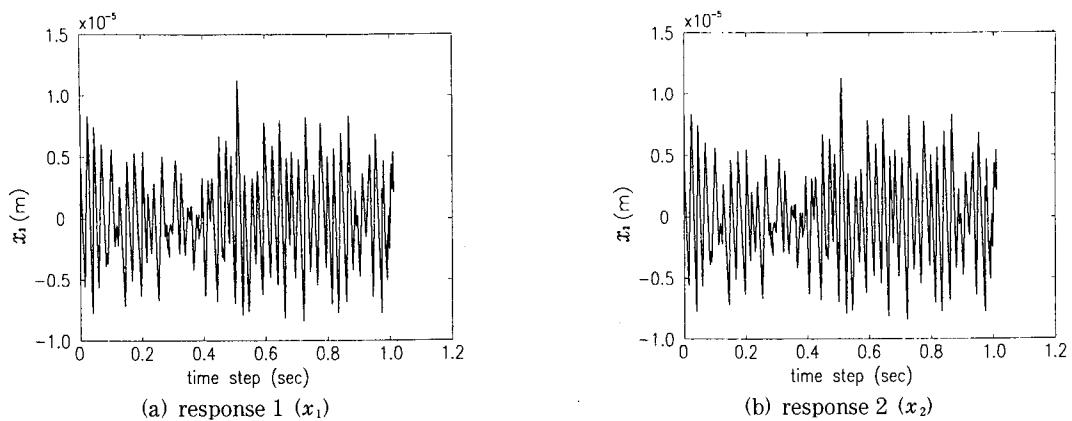


Fig. 7 Response due to random input forces

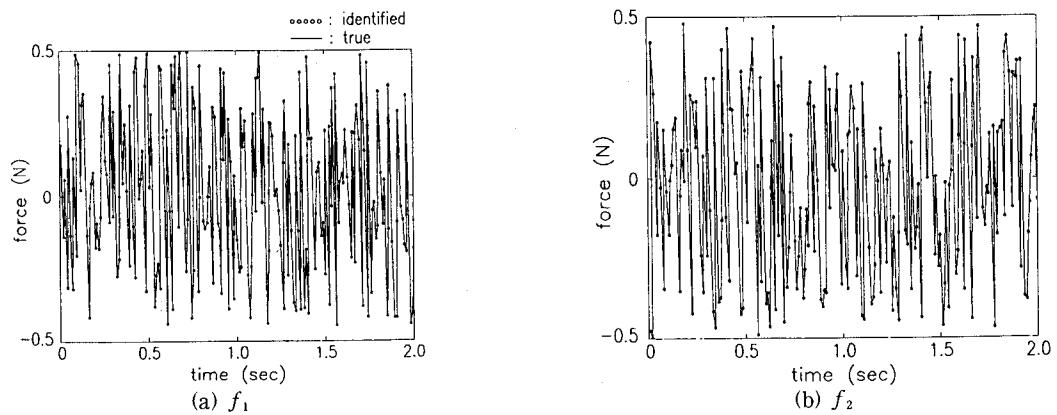


Fig. 8 Comparisons of true and identified input forces(random input forces)

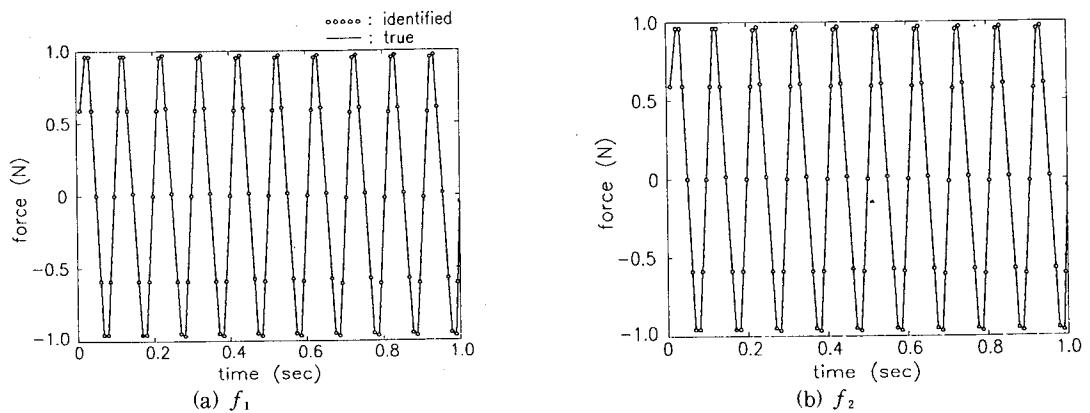


Fig. 9 Comparisons of true and identified input forces(sinusoidal input forces)

$$\text{잡음비} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum y_i^2}} \times 100(\%) \quad (26)$$

여기서 \hat{y}_i 는 측정잡음이 포함된 응답신호이고, \hat{y}_i 는 측정잡음이 없는 응답신호이다.

랜덤한 입력하중에 대한 측정잡음의 영향을 검토하기 위하여 $10^{-7}\%$ 의 잡음비를 지닌 응답을 이용하여 입력하중을 규명한 뒤, 입력하중의 추정오차를 나타내면 그림 10과 같고 그 오차의 주파수 성분은 그림 11과 같다. 이는 식(24)에서처럼 입력하중의 추정오차는 응답오차와 구조시스템의 조건수에 의해 결정되는데, 응답오차가 작다하더라도 조건수가 큰 경우에는 악조건이 발

생하여 입력추정에 많은 오차가 발생하며 그 오차의 주된 주파수 성분은 조건수가 가장 큰 32Hz 근방임을 알 수 있다.

또한 입력하중이 정현파인 경우에도 1%미만의 측정잡음에 의해 규명된 입력하중은 실제하중과는 그림 12와 같이 많은 차이를 보이게 되며 입력추정오차의 주된 영향은 조건수가 큰 32Hz 성분이 된다.

4. 3 해석적 모델에 오차가 있는 경우

측정잡음이외에 입력하중을 규명시 발생할 수

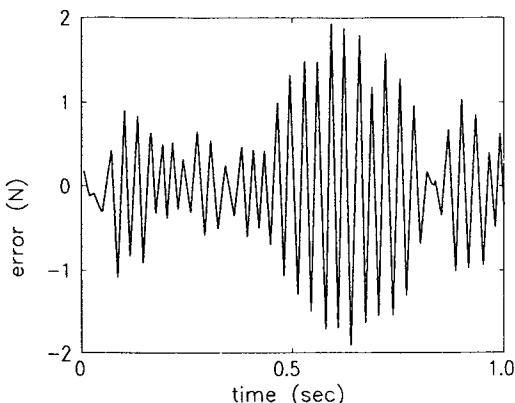


Fig. 10 Input identification error due to measurement noise.

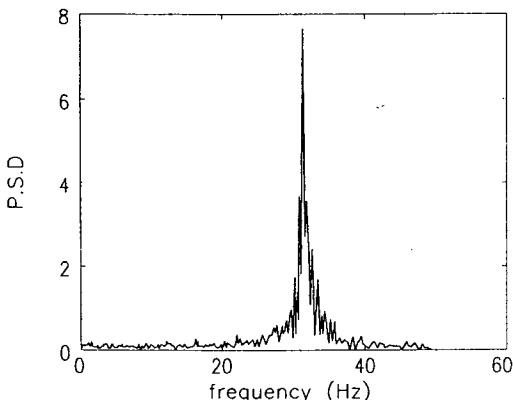
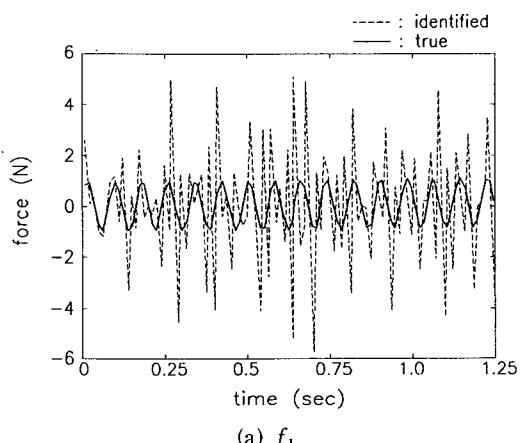
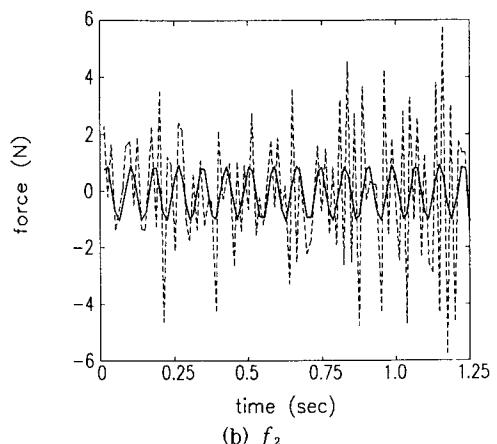


Fig. 11 Frequency components of input identification error signals.



(a) f_1



(b) f_2

Fig. 12 Comparisons of true and identified input forces.

있는 오차의 원인은 대상구조물을 묘사하는 해석적 모델의 오차이다. 일반적으로 대상구조물을 유한요소법으로 모델링하는데 있어 무한개의 자유도를 지닌 연속체를 유한개의 자유도로 표현하는 과정에서 질량, 감쇠, 강성행렬에 불확실성이 발생하게 되는데, 이러한 오차가 구조시스템의 입력하중을 규명하는데 영향을 미치게 되며 이를 평가하기 위하여 다음과 같이 해석적 모델의 오차를 정의하였다.

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta K_{ij}|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |K_{ij}|} \times 100 (\%) \\ \Delta C &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta C_{ij}|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |C_{ij}|} \times 100 (\%) \quad (27)\end{aligned}$$

여기서 K_{ij} , C_{ij} 는 대상구조시스템의 강성 및 감쇠계수이고 ΔK_{ij} 및 ΔC_{ij} 는 강성 및 감쇠에 인위적으로 첨가한 해석적 모델의 오차이다.

크기가 1인 랜덤하중을 입력으로 하여 구조계의 응답을 구하고, 1%의 모델링 오차가 있는 해석적 모델과 구조계의 응답을 이용하여 입력하중을 추정한 뒤, 추정된 입력하중의 오차를 도시하면 그림 13(a)와 같고 오차의 주파수 성분은 그림 13(b)와 같다. 미소한 해석적모델의 오차에도 불구하고 추정된 입력하중의 오차는 약 32Hz에서 주로 발생되고 있으므로 입력하중을 규명하기 위한 역해석에서 가장 민감한 문제는 대상시스템에 대한 해석적 모델의 오차크기보다는 대상 구조시스템을 묘사하는 해석적 모델의 조건수임을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 시스템의 해석적 모델과 측정된 응답신호를 이용하여 입력하중을 규명하는 역해석 방법을 동강성행렬과 주파수응답함수차원에서 제시하였고 이 때 발생되는 수학적 악조건의 특성을 규명하였다. 간단한 구조계에 대한 수치 해석을 통하여 역해석에서 발생되는 해의 불안정

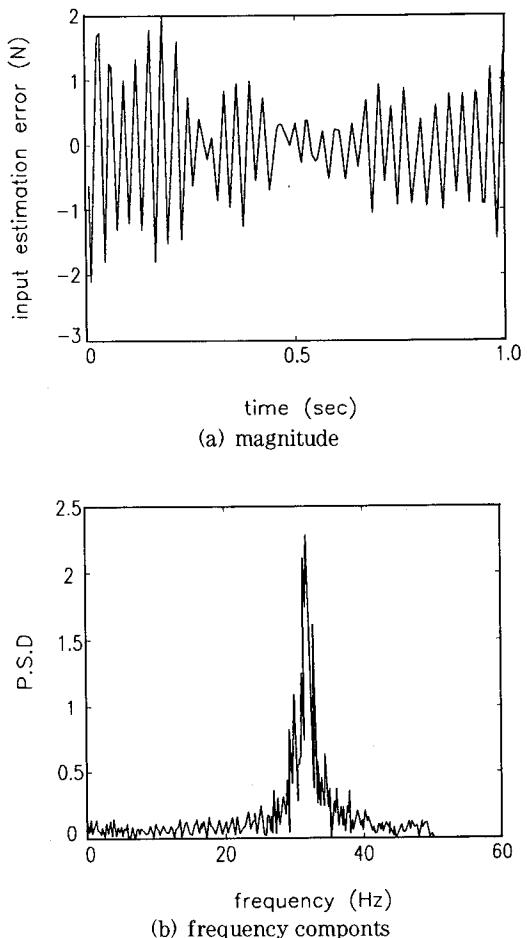


Fig. 13 Input identification error due to system model error

성과 악조건의 특성을 검증하였으며 이로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

1) 입력하중을 추정하기 위한 역해석에서는 측정된 응답의 수가 구조계가 발현하는 모우드의 수 이상이어야 하며 또한 모우드의 수는 입력하중의 수 이상이어야 한다.

2) 역해석기법을 적용할 때, 측정잡음이 없는 경우에는 완벽하게 입력하중을 규명할 수 있으나 역해석 문제의 수학적 특성상 작은 측정잡음이나 구조계의 모델링 오차에도 민감하게 해의 불안정

성을 나타내고 있다.

3) 역해석시 발생되는 악조건은 대상 시스템을 묘사하는 축약된 질량, 강성, 감쇠행렬로 구성되는 특성행렬의 조건수에 따라 결정되며 또한 조건수는 인접한 모우드와의 상대적 기여도의 비로서 다자유도의 계에 있어서는 여러주파수에서 악조건이 발생할 수 있으므로 특성행렬의 조건수가 작아지도록 주자유도(master degree of freedom)를 설정하여야 한다.

4) 조건수가 큰 영역은 물리적으로 공진영역이나 또는 반공진영역이며 입력하중이 랜덤한 하중이나 충격력과 같이 광대역의 주파수 성분을 지니고 있는 경우에는 펠연적으로 악조건이 발생한다.

5) 역해석 방법을 실제 공학문제에 적용하기 위하여는 역해석의 특성인 수학적 악조건을 개선시키어야 하며 이를 위하여 주파수영역의 적절화 방법(regularization)이나 시간영역의 적응예측기법(adaptive prediction)을 역해석 알고리즘에 반영하는 시도가 추가로 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. ANSYS User Manual for Revision 5.0, Swanson Analysis Inc., 1993
2. ABAQUS/Standard, User Manual, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1994
3. J. B. Beliveau and M. Massoud, "Statistical Identification of an Astromast from FEM and Test Results using Bayesian Sensitivity Analysis", 2nd International Modal Analysis Conference, Vol. 1, 1983, pp.1121~1129
4. N. K. Sinha and B. Kustta, Modeling and Identification of Dynamic Systems, ORTRAND REINHOLD COMPANY, 1983
5. 양경택, "S.I.기법을 이용한 유한요소모델의 신뢰도 제고에 관한 연구", 전산구조공학회

논문집, 제10권 제2호, 1997, pp.149~150

6. J. T. Kim, *Source and Path Recovery from Vibration Response Monitoring*, Ph.D Thesis, Department of Mechanical Engineering, MIT, 1987
7. J. A. Fabumni, "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by Pseudo Inverse Technique", *AIAA Journal*, Vol. 24(3), 1986, pp.504~507
8. J. K. Hammond and P. M. Clarkson, "Optimal Control Deconvolution for Velocity Meter Signals", *ASME Trans. J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 110, 1988, pp.17~23
9. B. J. Dobson and E. Rider, "A Review of the Indirect Calculation of Excitation Forces from Measured Structural Response Data", Part C. *Imech Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 204, 1990, pp.69~75
10. J. K. Lee and Y. S. Park, "Response Selection and Dynamic Damper Application to Improve Multiple force Identification", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 8(6), 1994, pp.649~664
11. D. J. Ewins, *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., 1986
12. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1985
13. E. Routhwell and B. Drachman, "A Unified Approach to Solving Ill-Conditioned Matrix Problems", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp.609~620

(접수일자 : 1999. 1. 7)