가중적분법에 의한 반무한영역의 추계론적 유한요소해석

Stochastic Finite Element Analysis of Semi-infinite Domain by Weighted Integral Method

최 창 근* 노 혁 천**
Choi, Chang-Koon Noh, Hyuk-Chun

요 지

추계론적 해석은 구조계 내의 해석인수에 존재하는 공간적 또는 시간적 임의성이 구조계 반응에 미치는 영향에 대한 고찰을 목적으로 한다. 확률장은 구조계 내에서 특정한 확률분포를 가지는 것으로 가정된다. 구조계 반응에 대한 이들 확률장의 영향 평가를 위하여 통계학적 추계론적 해석과 비통계학적 추계론적 해석이 사용되고 있다. 본 연구에서는 비통계학적 추계론적 해석방법 중의 하나인 가중적분법을 제안하였다. 특히 구조계의 공간적 임의성이 큰 특성을 가지고 있는 반무한영역에 대한 적용 예를 제시하고자 한다. 반무한영역의 모델링에는 무한요소를 사용하였다. 제안된 방법에 의한 해석 결과는 통계학적 방법인 몬테카를로 방법에 의한 결과와 비교되었다. 제안된 가중적분법은 자기상관함수를 사용하여 확률장을 고려하므로 무한영역의 고려에 따른 해석의 모호성을 제거할 수 있다. 제안방법과 몬테카를로 방법에 의한 결과는 상호 잘 일치하였으며 공분산 및 표준편차는 무한요소의 적용에 의하여 매우 개선된 결과를 나타내었다

핵심용어 : 추계론적 유한요소해석, 반무한영역, 가중적분법, 무한요소, 자기상관함수

Abstract

The stochastic analysis aims to obtain the response variability due to the spatial and/or temporal uncertainties which exist in the analysis parameters. The stochastic field is assumed to have pre-assigned statistical terms over the structural domain. In this study, one of the non-statistical stochastic methods is proposed, especially the analysis of semi-infinite domain is performed. To model the semi-infinite domain, infinite element is adopted. The results obtained using the proposed weighted integral method is compared with those obtained by Monte Carlo simulation. The ambiguity due to the infinity of the analysis domain can be excluded in case of weighted integral method since the auto-correlation function is used analytically. The results of Monte Carlo simulation and those by the proposed method revealed to be in good agreement and the improvement in the value of covariance and standard deviation of results is attained.

Keywords : *stochastic finite element method, semi-infinite domain, weighted integral method, infinite element, auto-correlation function*

* 정회원·한국과학기술원 토목공학과, 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

일반적으로 유한요소법은 해석인수에 대한 확정론적(deterministic) 가정에 기본한다. 이러한 확정론적 가정에 따르면 구조계 재료의 여러 해석적인 특징을 나타내는 인수들은 하나의 상수로 대표된다. 해석인수들로는 재료의 특성을 나타내는 재료탄성계수 E와 포아송비 ν 등을 들 수 있으며 구조물의 기하학적인 인수인 부재의 단면이나 평판/쉘의 경우 두께 t 등을 들 수 있다[1),5),7),8),10)].

그러나 실제 구조의 경우 해석인수들이 구조계 영역내의 위치벡터에 따라 다른 값을 가지고 있다고 가정하는 것이 보다 합리적인 가정이 될 것이다. 다시 말해서 확정론적 해석에서 가정되는 해석 인수의 대표값은 공간좌표에 따른 불확실성(uncertainty)을 가지고 있으며 확정론적인 가정은 실제로는 구현 불가능한 것이라고 할 수 있다. 이러한 가정에 기본하여 구조계 해석인수의 임의성이 구조계 반응에 미치는 영향을 평가하는 해석이 추계론적 해석(stochastic analysis)이다[9)]. 추계론적 해석에서는 구조계의 해석 인수들이 공간이나 시간에 따른 임의성(randomness)을 가지고 있다고 가정한다. 이들을 해석에 고려하여 확정론적인 가정으로부터 얻게 되는 구조반응의 평균치와 함께 공분산을 얻는다. 여기에서 구조반응의 평균치는 해석인수의 대표값을 사용한 확정론적 해석을 통하여 얻을 수 있다. 가정되는 확률장이 정규분포일 경우 확률장은 평균과 표준편차로 완벽하게 표현될 수 있다.

추계론적 유한요소해석(stochastic FEM)은 유한요소법을 이용한 추계론적해석으로 본 연구에서는 추계론적 해석의 한 방법인 가중적분법(weighted integral method)을 사용하고자 한다. 선행 연구자들에 의하여 제안[8)]/개선[1),5)]된 가중적분법은 유한요소의 영역에 대한 자기상관함수(auto-correlation function)의 적분을 통하여 구조계의 반응변화도(response variability)를 얻는 방법으로 본 연구에서는 무한요소(infinite element)를 이용하여 무한영역의 해석에까지 확장하였다.

통계학적 추계론적 해석방법으로 분류되는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)은 가정하는 임의장(random field)의 통계학적 특성에 맞는 확률장을 생성하고 생성된 표본에 대하여 모두 해석을 수행한 후 그 결과들에 대한 통계처리를 통하여 구조계의 반응변화도를 얻는 방법이다. 이 방법의 이론적 배경은 추계론적 방정식이 많은 수의 확정론적 방정식에 대한 ensemble로서 표현될 수 있다는 가정이다. 본 연구에서 정식화된 방법에 의한 해석 결과는 몬테카를로 방법의 결과와 비교되었다.

본 연구의 주된 해석 대상은 반무한영역(semi-infinite domain)으로 구조물이 위치하고 있는 지반 또는 유체영역 등을 들 수 있다. 본 연구에서는 구조물의 기초가 되는 지반을 그 대상으로 선택하여 이에 대한 추계론적 해석을 수행하고자 한다. 지반의 경우 다른 재료에 비하여 상당한 정도의 불확실성을 가지고 있으므로 이에 대한 추계론적 해석은 매우 중요한 사항이라고 할 수 있다. 시험자료에 따르면 지반의 탄성계수는 분산계수(coefficient of variation ; COV) 0.3이상의 비교적 높은 공간적 불확실성을 가지는 것으로 나타나고 있다.

무한요소는 현재까지 정적해석 및 동적해석을 위하여 많은 종류의 요소들이 개발되었다[2),3),6),12)]. 이들 요소들은 구조-지반 상호작용과 유체 등을 포함한 무한영역의 해석 도구로 사용되고 있다. 본 연구에서는 Bettess[3)](1980)에 의하여 제안된 무한요소를 사용하고자 한다. 이 요소는 일반 유한요소와 유사한 적용성을 가지고 있으며 감소함수(decay function)를 사용하여 무한경계조건을 적용할 수 있다.

2. 가중적분법

이 방법은 임의장을 표현하는 확률장 함수 $f(x)$와 확정론적 함수 $t(x)$의 곱에 대한 주어진 영역에서의 적분을 하나의 확률변수 X로 사용하며 확률변수 X는 다음의 식으로 표현된다[1),5),8)].

$$X = \int_{\Omega^e} f(\mathbf{x}) t(\mathbf{x}) d\Omega^e,\ \mathbf{x} \in \Omega^e,\ \Omega^e \subset \Omega_{str} \qquad (1)$$

식 (1)에 의한 확률변수 X의 공분산은 다음과 같이 정의된다.

$$Cov[X_1,\ X_2] = E[(X_1 - X_1^o)(X_2 - X_2^o)]$$

$$= \int_{\Omega_1^e}\int_{\Omega_2^e} E[f(\mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}_2)]$$

$$t(\mathbf{x}_1) t(\mathbf{x}_2) d\Omega_2^e d\Omega_1^e \qquad (2)$$

위의 식에서 $E[\cdot]$는 평균연산자를 나타내며 상첨자 'o'는 평균값을 의미한다. 피적분함수의 일부인 평균연산자 내의 항은 정의에 의하여 아래와 같이 자기상관함수로 치환된다.

$$R_{ff}(\xi = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = E[f(\mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}_2)],$$

$$\mathbf{x}_i \in \Omega_i^e,\quad \Omega_i^e \subset \Omega_{str} \qquad (3)$$

2.1 가정하는 확률장

추계론적 해석에서 확률장으로 가정되는 해석인수로는 재료인수와 기하학적 인수 그리고 작용하중의 시간적 임의성 등을 들 수 있는데 본 연구에서는 재료탄성계수 E값의 공간적 분포를 확률장으로 택하고자 한다. 공간적 임의성을 가지는 재료탄성계수는 아래의 식으로 표현할 수 있다.

$$E(\mathbf{x}) = E_o[1 + f(\mathbf{x})] \qquad (4)$$

위의 식에서 E_o는 탄성계수의 평균값을 나타내고 $f(\mathbf{x})$는 확률장을 나타내는 함수로 공간상의 좌표 $\mathbf{x}$에 따라 다른 값을 가지는 함수이다. 확률장 함수 $f(\mathbf{x})$는 재료탄성계수가 음의 값을 가지는 모호성을 배제하기 위해서 -1보다 큰 값을 가져야 하며 평균값은 0이 되는 함수이다. 이 함수는 해석자가 수식화 할 수 없는 함수로 단지 임의 두 점에서의 이 함수의 곱에 대한 평균치로 정의되는 자기상관함수를 가정할 수 있을 뿐이다.

2.2 자기상관함수

자기상관함수는 확률변수의 상대 공간좌표에 따른 상호관계를 나타내는 함수로써 확률변수 $a(\mathbf{x})$에 대하여 다음의 식과 같이 정의된다.

$$R_{aa}(\xi) = E[a(\mathbf{x}) a(\mathbf{x} + \xi)] \qquad (5)$$

위의 정의는 자기상관함수가 두 위치에 존재하는 확률변수의 상대거리벡터(ξ)만의 함수라는 사실을 보여주고 있다. 위의 정의는 추계론적 유한요소해석을 위한 정식화 과정에서 변위의 공분산을 구하는 부분에 적용된다. 본 연구에서 사용한 자기상관함수의 형태는 아래와 같다.

$$R_{ff}(\xi) = \sigma_{ff}^2 \exp\left\{-\frac{|\xi_1| + |\xi_2|}{d}\right\} \qquad (6)$$

위의 식에서 σ_{ff}^2은 확률장 $f(\mathbf{x})$의 분산계수를 나타내며, ξ_i는 상대거리 벡터 ξ의 공간좌표상의 성분을 나타낸다. 지수함수 내의 d는 가정하는 확률장의 특성을 나타내는 값으로 상관관계거리(correlation distance)로 불린다.

3. 감소함수를 사용한 무한요소

무한영역에 대한 해석에는 무한영역을 한정영역으로 사상하는 방법, 경계적분법을 사용하는 방법, 지수함수 형태의 좌표계로의 변환을 이용하는 방법 등이 적용된다[3]. 가장 간단한 해석 방법은 무한영역을 유한영역으로 가정하는 것이다. 무한한 영역을 가지는 실제적인 영역은 없다고 할 수 있지만 무한 가정에 의한 해석의 타당성이 인정되는 문제들은 자연계에 많이 존재하고 있다. 이들 중의 하나로 구조물이 위치하고 있는 지반을 들 수 있다. 지반은 구조물의 규모에 비하여 매우 광범위한 영역을 가지고 있기 때문에 이를 무한영역으로 모델링하여 해석을 수행하는 것은 타당하리라 생각된다. 본 연구에서는 무한영역의 모델링을 위하여 무한요소를 사용하였다. 사용한 요소는 일반적인 유한요소를 무한영역으

로 확장한 것으로 Bettess(1980)에 의하여 제안되었으며 무한경계의 모사를 위하여 감소함수를 사용하였다.

3.1 무한요소의 형상함수

적용된 무한요소의 형상함수는 유한요소의 형상함수와 무한영역의 거동을 표현하는 감소함수 ϕ의 곱으로 표현된다.

$$N_i(\xi, \eta) = \phi_i(\xi, \eta) M_i(\xi, \eta) \tag{7}$$

여기에서, M_i는 유한요소의 형상함수이며 N_i는 무한요소의 형상함수이다. 함수 $\phi_i(\xi, \eta)$는 감소함수로서 그 자신의 절점에서 단위값을 가져야 한다. 형상함수 N_i는 무한의 거리에서 무한영역의 값을 가져야 한다. 일반적으로 무한영역에서의 변위 값은 0이라고 할 수 있으므로 형상함수는 무한의 거리에서 0의 값을 나타내는 특성을 필요로 한다. 무한요소에 사용되는 감소함수의 형태는 지수함수를 포함한 다수가 사용될 수 있다. 사용 가능한 감소함수의 형태와는 관계없이 형상함수에 대한 미분은 아래와 같이 표현된다. ξ방향으로만 감소하는 경우는 다음의 식과 같다.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi}\phi_i + M_i\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial M_i}{\partial \eta}\phi_i \tag{8}$$

양방향으로 감소하는 경우에 대한 미분은 아래와 같다.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi}\phi_i + M_i\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial M_i}{\partial \eta}\phi_i + M_i\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \tag{9}$$

3.2 감소함수

감소함수의 형태는 다음과 같다.

$$\phi_i(\xi) = \left(\frac{\xi_i - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^n \tag{10}$$

여기에서 ξ_o는 일종의 원점으로서 무한영역방향의 반대방향에 위치하고 있어야 한다. 일반적으로, 감소하는 방향이 양의 방향이면 $\xi_o < -1$의 조건을 만족해야 한다. 위의 식에서 n의 값은 ξ 방향으로 무한에 접근할 경우 형상함수의 값이 0으로 수렴함을 나타내기 위하여 M_i에 쓰여진 ξ의 차수보다 큰 차수를 사용해야 한다[3]. 양방향으로 감소하는 경우의 감소함수는 다음과 같은 함수를 사용한다.

$$\phi_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_i - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^n \left(\frac{\eta_i - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^n \tag{11}$$

음의 방향으로 향해 있는 무한요소의 감소함수를 한 방향과 양방향에 대해서 나타내 보면 다음과 같다.

$$\phi_i(\xi) = \left(\frac{\xi_o - \xi_i}{\xi_o - \xi}\right)^n,$$

$$\phi_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_o - \xi_i}{\xi_o - \xi}\right)^n \left(\frac{\eta_o - \eta_i}{\eta_o - \eta}\right)^n \tag{12}$$

3.3 감소인수 ξ_o의 결정

일반적으로 감소인수는 알려진 이론해와 수치해법을 이용한 수치해를 일치시킬 수 있는 값으로 결정된다. 무한영역의 거동이 $1/r$로서 표현된다고 가정하면 4절점 및 8절점 요소의 경우 다음과 같이 감소인수를 결정할 수 있다.

$$\xi_o = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}, \quad \xi_o = \frac{1}{r_2 - r_1}(-r_2 - \sqrt{r_1 r_2}) \tag{13}$$

여기에서 r_1, r_2는 감소인수의 결정을 위하여 사용된 두 점의 좌표값을 나타낸다. 사용된 무한요소에 대한 수치적분은 아래의 식을 이용한다. 이 식은 기존 유한요소에 사용되는 적분점 ξ와 가중치 W를 수정하여 얻은 것이다.

$$\xi_\infty = \frac{2\xi}{1-\xi}, \quad W_\infty = W\frac{2}{(1-\xi)^2} \tag{14}$$

4. 가중적분법에 의한 반응변화도 정식화

본 연구에서 대상으로 하는 확률장은 반무한영역 내의 탄성계수이다. 탄성계수의 공간적분포는 식(4)와 같이 표현되며 확률장 함수 $f(\mathbf{x})$는 평균이 0이고 균질성(homogeneous)의 정규분포하는 함수로 가정한다.

4.1 확률요소강성행렬

유한요소법에서 구성되는 요소강성행렬은 아래의 식과 같다.

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} d\Omega^e \tag{15}$$

여기에서 적합행렬 $\mathbf{D}_e$는 식(4)를 포함하므로 최종적으로 아래와 같이 평균강성행렬(mean stiffness) $\mathbf{K}_o^e$와 가감강성행렬(deviatoric stiffness) $\Delta\mathbf{K}^e$로 분해된다. 두 행렬의 형태는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_o^e = \int_{\Omega e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B} d\Omega^e \tag{16a}$$

$$\Delta\mathbf{K}^e = \int_{\Omega e} f(\mathbf{x}) \mathbf{B}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B} d\Omega^e \tag{16b}$$

식(16b)를 가중적분에 의한 확률변수 X의 합으로 나타내기 위하여 변형률행렬 $\mathbf{B}$를 다음과 같이 상수만을 요소로 가지는 상수변형률행렬 $\mathbf{B}_i$와 독립인 다항식 p_i의 곱의 합으로 분해한다.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_i p_i, \quad i=1, \cdots, N_p \tag{17}$$

여기에서 N_p는 변형률행렬 $\mathbf{B}$에 포함된 독립인 다항식의 수를 나타낸다. 식(17)을 식(16b)에 대입하여 정리하면 가감강성행렬은 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{ij}^e X_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, N_p \tag{18}$$

여기에서 상수강성행렬 $\mathbf{K}_{ij}^e$와 확률변수 X_{ij}는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_o \mathbf{B}_j, \quad i, j = 1, \cdots, N_p \tag{19a}$$

$$X_{ij} = \int_{\Omega^e} f(\mathbf{x}) p_i p_j d\Omega^e, \; i, j = 1, \cdots, N_p \tag{19b}$$

요소강성행렬은 평균강성행렬 $\mathbf{K}_o^e$와 가감강성행렬 $\Delta\mathbf{K}^e$의 합으로 표현되고 가감강성행렬이 확률변수 X_{ij}의 함수이므로 요소강성행렬 또한 확률변수 X_{ij}의 함수라고 할 수 있다. 확률변수 X_{ij}의 개수 NV는 식(16b)와 식(17)에 따르면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$NV = \frac{1}{2} N_p (N_p + 1) \tag{20}$$

4.2 변위벡터의 Taylor 전개

강성행렬이 확률변수 X_{ij}의 함수이므로 강성행렬의 역변환과 하중벡터의 곱에 의하여 정의되는 변위벡터 역시 확률변수의 함수라고 할 수 있다. 이러한 가정하에 변위벡터를 확률변수의 평균 X_o에 대하여 1차 Taylor 전개하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_o + \Delta X_i^r \mathbf{U}_{,(ir)}|_E,$$

$$i = 1, \cdots, NV, \; r = 1, \cdots, NE \tag{21}$$

위의 식에서 NE는 요소망에 사용된 요소의 수를 나타내며

$$\mathbf{U}_o = \mathbf{U}(X_o), \; \Delta X_i^r = X_i^r - X_i^{ro},$$

$$\mathbf{U}_{,(ir)}\Big|_E = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_i^r}\Big|_E \tag{22}$$

여기에서 상하첨자 'o'는 평균을 의미하며 하첨자로 사용된 'E'는 평균값에서의 연산을 의미한다. 식(22)에서 변위벡터의 확률변수에 대한 편미분은 평형방정식에 대한 편미분으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U}_{,(ir)}|_E = -\mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{K}_{,(ir)}|_E \mathbf{U}_o \tag{23}$$

식(23)을(21)에 대입하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_o - X_i^r \mathbf{K}_o^{-1} \mathbf{K}_{,(ir)}|_E \mathbf{U}_o,$$
$$i = 1, \cdots, NV,\ r = 1, \cdots, NE \quad (24)$$

변위에 대한 평균과 공분산을 얻기 위하여 식(24)에 평균 및 공분산 연산자를 가하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$E[\mathbf{U}] = \mathbf{U}_o \quad (25)$$

$$Cov[\mathbf{U},\ \mathbf{U}] = \{\mathbf{K}_o^{-1}\mathbf{K}_{,(ir)}|_E \mathbf{U}_o \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{,(js)}|_E \mathbf{K}_o^{-T}\}$$
$$E[X_i^r X_j^s] \quad (26)$$

식(25)는 변위의 평균치가 확정론적 해석과 같은 결과를 나타내고 있음을 보여주고 있는데 이것은 현재의 정식화에서 변위 벡터에 대한 1차 Taylor전개를 수행하였기 때문이다. 공분산에 대한 결과식은 식(26)을 정리하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Cov[\mathbf{U},\ \mathbf{U}] = \mathbf{K}_o^{-1} E[\Delta\mathbf{K}^{rr} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \Delta\mathbf{K}^{ss}] \mathbf{K}_o^{-T}$$
$$r,s = 1, \cdots, NE \quad (27)$$

식(27)의 평균치 연산자 내의 식은 식(3)의 정의를 사용하면 두 요소 $e1$, $e2$에 대하여 다음과 같이 구성된다.

$$E[\Delta\mathbf{K}^{e1} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \Delta\mathbf{K}^{e2}] = \int_{\Omega_1^e}\int_{\Omega_2^e} R_{ff}(\xi) \mathbf{B}_{e1}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B}_{e1} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T$$
$$\mathbf{B}_{e2}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B}_{e2} d\Omega_2^e d\Omega_1^e \quad (28)$$

제안된 정식화에 의한 반응변화도 해석에는 자기상관함수의 적분이 필요하다. 식(28)의 적분이 그것으로 두 개의 각기 다른 요소 $e1$, $e2$에 속한 위치 벡터의 상대거리를 나타내는 상대거리벡터(separation vector)인 ξ에 대한 적분을 나타내고 있다.

그림 1은 유한요소 대 유한요소와 유한요소 대 무한요소에 대한 적분시 나타나는 상대거리벡터를 정의하고 있다. 유한요소 대 무한요소의 경우 상관관계거리 벡터의 특정 성분이 무한대의 값을 가지는 경우가 나타난다. 이런 부분은 해석상의 모호성을 유발하지만, 가중적분법의 경우 식(28)의 수치적분을 통하여 근사적으로 고려될 수 있다.

5. 몬테카를로 방법과 확률장의 생성

통계학적 방법에 의한 추계론적 유한요소해석에서 가장 중요한 요소는 사전 설정된 확률적 특성을 가지는 확률장의 생성으로써 생성된 N개의 표본은 ensemble의 개념하에서 확률장의 통계적 특성을 만족해야 한다. 일반적으로 확률장 표본의 생성은 스펙트럼묘사법(spectral representation)과 ARMA(auto-regressive moving average) 방법 또는 공분산행렬분해법(covariance matrix decomposition method) 등에 의하여 수행된다. 본 연구에서는 통계학적전처리방법[16]을 사용하였다. 이 방법은 공분산행렬분해법과 스펙트럼묘사법의 조합에 의한 표본생성방법으로 적은 계산시간과 높은 수렴성을 가지고 있다. 이 방법의 경우 사전 설정된 통계항들을 만족하려면 $4\times NF\times NEM$개의 표본 생성을 필요로 한다. 여기에서, NF는 표본생성 알고리즘에 사용된 cosine항의 수이며, NEM은 확률변수의 수로서 유한요소해석의 경우 구조계 모델링에 사용된 유한요소(또는 무한요소 포함)의 수와 같다. 생성된 확률장에 대한 통계처리 결과 평균과 표준편차는 기 설정된 목적값에 대하여 10^{-8}정도의 작은 차이를 나타내었다.

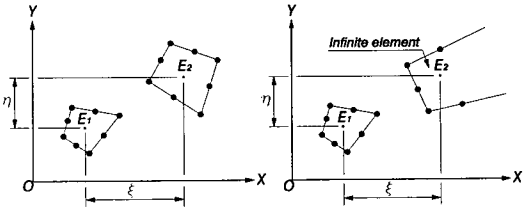


그림 1 요소사이의 상대거리 벡터

6. 예제해석 및 고찰

해석대상 반무한영역에 대한 모델은 그림 2와 같다. 대상 영역은 가로 세로 10의 크기로 설정하였고 재료탄성계수는 $E=1.0$ 포아송비는 $\nu=0.25$의 값을 취하였다. 선하중(line load)이 작용하는 부분을 경계로 대칭성을 보이므로 반모델을 사용하였다. 두께방향인 Z방향으로는 1.0의 두께를 가정하였으며 응력상태는 평면변형률로 가정하였다. 탄성계수 확률장의 분산계수 σ_{ff}는 0.1로 가정하였다. 그림 2에서 굵은 선으로 표시된 부분은 유한요소만으로 모델링되는 부분으로서 무한영역의 유한영역 가정시 고려되는 부분이다. 음영부분은 유한요소와 무한요소의 조합시 무한요소로 모델링 되는 부분을 표시하고 있다. 해석결과는 위의 유한영역에 대해서 N개의 유한요소를 사용한 모델(Model 1)과 $N1$개의 유한요소와 $N2$개의 무한요소를 혼용한 모델(Model 2)의 경우를 비교한다. 여기에서, $N=N1+N2$이다.

6.1 반무한 탄성영역의 이론해와 확정론적 해석

그림 2의 구조계에서 하중아래 y좌표를 따르는 변위에 대한 이론해는 J. Boussinesq의 3차원 해로부터 Flamant[14]에 의해서 얻어진 것으로 다음과 같다.

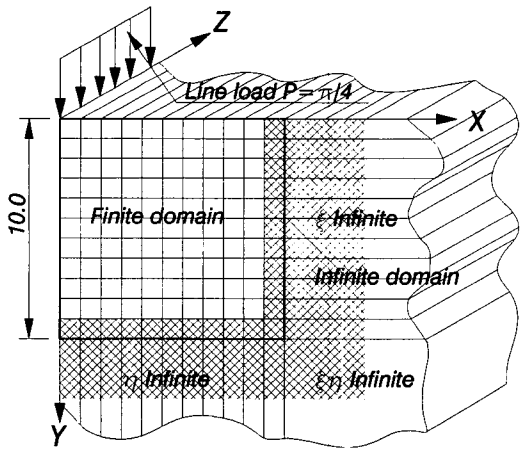


그림 2 해석대상 반무한영역

$$\nu|_{x=0}=\frac{2P}{\pi E}\ln\frac{y_o}{y} \tag{29}$$

위의 식은 하중 $P=\pi/2$에 대한 해로서 구조대칭을 고려한 반모델을 작성하였으므로 유한요소 해석에는 그림 2와 같이 $P=\pi/4$의 하중을 작용하였다. 여기에서 y_o는 하중에 의한 변위가 0이 된다고 가정되는 위치까지의 거리를 나타낸다. 그러므로 식 (29)에 의한 이론해는 비확정적인 해를 제공하고 있다. 본 연구에서 수행한 유한요소의 해석과 비교할 경우 $y_o=12$에서 유한요소해석과 이론해와 결과가 잘 일치하였다. 이 경우의 이론해는 표 1과 같다.

그림 3은 Model 1에 대한 해석 결과로서 요소망의 세분화에 다른 결과의 향상은 하중작용점에서만 부각되고 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 경계조건에 의한 과도한 구속작용에 의한 것이라고 할 수 있으며 유한요소만을 사용한 경우 요소망의 세분화에 따른 결과 향상이 매우 미흡함을 보여주고 있다. 반면 Model 2에 대한 해석은

표 1 반무한 영역의 이론해(y_o=12)

y좌표	y방향변위	y좌표	y방향변위
0	∞	6	0.6931
1	2.4849	7	0.5390
2	1.7917	8	0.4055
3	1.3863	9	0.2877
4	1.0986	10	0.1823
5	0.8755		

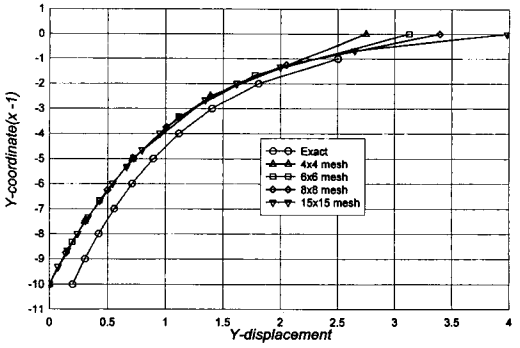


그림 3 Model 1에 의한 해석결과

Model 1과 달리 요소망의 세분화에 따라 결과가 전영역에 걸쳐 이론해에 수렴해 가는 양상을 나타내고 있다. 그림 4에서 보듯이 무한요소를 조합한 Model 2에 대한 해석결과는 y_o=12로 가정한 이론해와 잘 일치하고 있다.

6.2 반무한 탄성영역에 대한 추계론적 해석

그림 5는 몬테카를로 방법(MCS)과 가중적분법(WI)에 의한 해석 결과를 비교하고 있다. 두 해석 방법 모두 무한요소를 조합 사용한 Model 2에 대하여 낮은 분산계수(COV)를 나타내고 있다.

$$COV = \frac{\sigma_R}{|R_o|} \tag{30}$$

식(30)과 같이 분산계수(COV)는 표준편차의 평균에 대한 비의 값으로 표시된다. 그러므로, 분

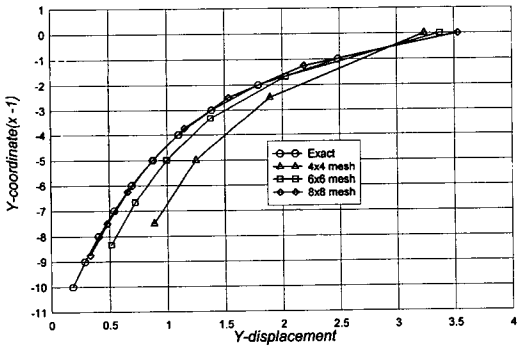


그림 4 Model 2에 의한 해석결과

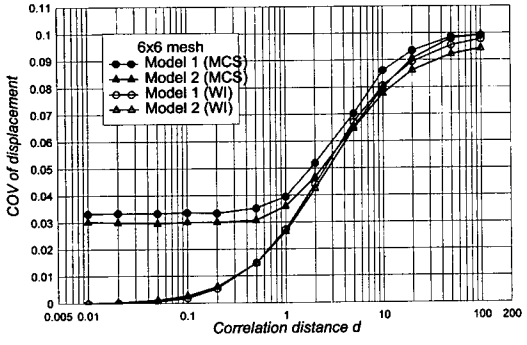


그림 5 모델과 해석 방법에 따른 분산계수의 변화

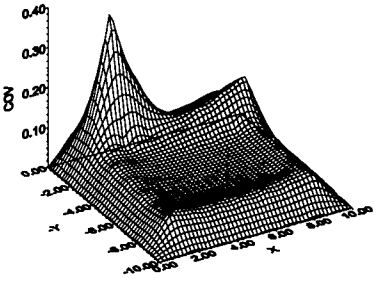
모인 변위의 평균값이 무한요소의 사용에 의하여 증가 되었기 때문에 Model 2의 경우 Model 1에 비하여 낮은 분산계수를 나타낸다.

몬테카를로 방법의 경우 그림 5에서 보듯이 상관관계거리 d의 값이 적을 경우 평평한 부분이 나타난다. 그 이유는 d의 값이 적은 경우 실제의 확률장이 백색잡음(white noise)형태를 나타내기 때문이다. 그러나 구조계의 모델링에 사용된 조악한 요소망은 이러한 확률장을 적절히 모사할 수 없다. 즉, d의 값이 0.2이하인 경우 사용된 요소망에 의한 확률장의 표현은 모두 동일한 것으로 인식된다. 그러나 가중적분법의 경우는 자기상관함수에 대한 수치적분을 통하여 간접적으로 확률장을 고려하므로 이론적인 값을 잘 나타내고 있는 것을 볼 수 있다.

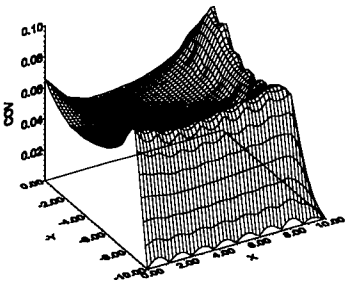
그림 6과 7은 몬테카를로 방법(MCS)과 제안된 가중적분법(WI)에 의하여 얻어진 분산계수 및 표준편차의 분포를 나타내고 있다. 분산계수의 분포와 표준편차의 분포가 상이한 것은 구조계 내의 평균값이 위치마다 다르기 때문이다. 이들 결과들은 Model 1에 의한 해석 결과로서 제안 방법과 몬테카를로 방법이 상호 잘 일치하는 것을 볼 수 있으며 제안 방법이 구조계 내의 반응변화도의 평가에 매우 유용함을 보여주고 있다. Model 2에 대한 해석의 경우는 경계부분에 사용된 무한요소의 영향으로 두 방법에 의한 분산계수 및 표준편차의 분포는 다소 상이하게 나타났다.

그림 8은 가중적분법에 의한 해석 결과로서 Model 1과 Model 2에서 나타난 y방향 변위에 대한 표준편차 분포를 나타낸 것이다. Model 2의 경우 무한요소의 사용에 의하여 그림 8b에서 보듯이 경계부분에서 표준편차가 나타나고 있으며 전체적으로 다소 증가된 값을 나타내는 것을 볼 수 있다. 이것은 무한요소의 사용에 의하여 평균변위가 증가되고 이에 따라 표준편차 값이 다르게 평가되고 있음을 보여준다.

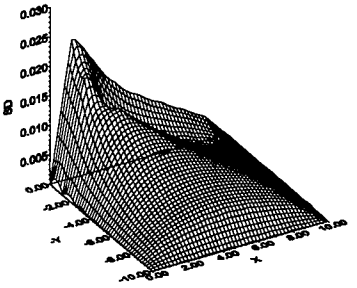
몬테카를로 방법과 제안방법에 의한 해석결과는 표 2에 비교하였다. 표에서 보듯이 몬테카를로 방법에 의한 결과가 변위에서는 6-9%, 표준



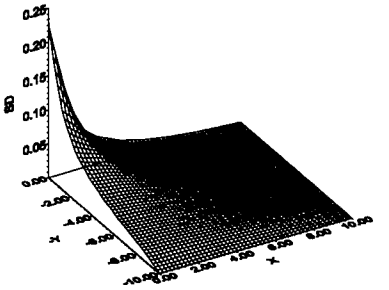
(a) 분산계수분포 MCS-x변위



(b) 분산계수분포 MCS-y변위

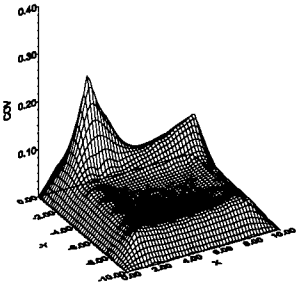


(c) 표준편차 MCS-x변위

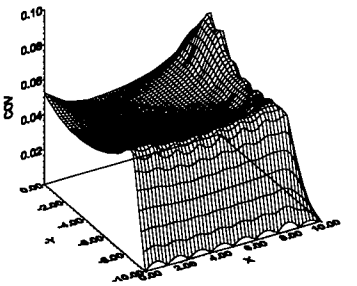


(d) 표준편차 MCS-y변위

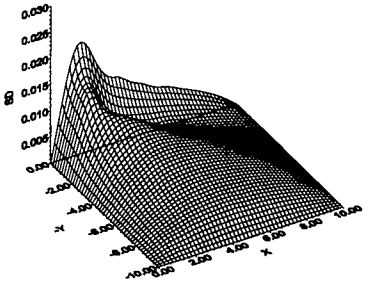
그림 6 분산계수 및 표준편차의 분포(MCS)



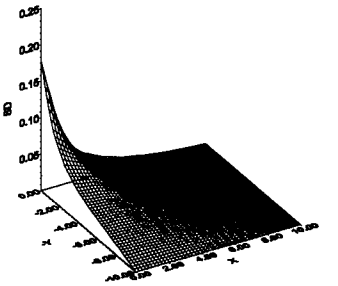
(a) 분산계수분포 WI-x변위



(b) 분산계수분포 WI-y변위

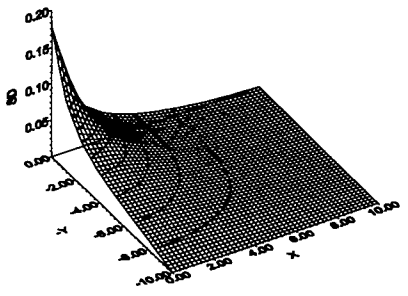


(c) 표준편차 WI-x변위

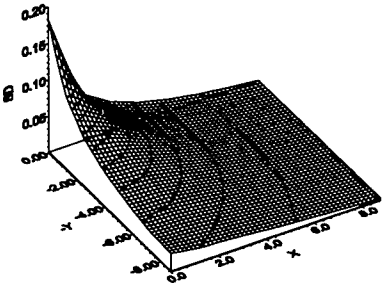


(d) 표준편차 WI-y변위

그림 7 분산계수 및 표준편차의 분포(WI)



(a) Model 1



(b) Model 2

그림 8 표준편차분포

편차에서는 4-5% 정도 크게 나타나고 있다. 몬테카를로 방법에 의한 결과가 다소 크게 나타나는 것은 통계학적인 방법과 비통계학적 방법사이에 나타나는 일반적인 현상으로 연속적인 확률장을 이산분포하는 확률변수로 표현해야 하는 몬테카를로 방법의 특징이라고 할 수 있다. 표 2에서 찾아볼 수 있는 하나의 특징은 Model 2의 경우 Model 1에 비하여 다소 낮은 값의 분산계수를 보여주고 있지만 변위의 표준편차는 오히려 Model 2에서 더 크게 나타난다는 것이다. 이것은 무한요소를 조합한 Model 2가 변위의 평균값을 이론해에 근사하게 표현함에 의하여 얻어지는 장점중의 하나로서 무한요소 사용의 이점을 보여주고 있음은 물론 그에 대한 추계론적 해석의 중요성과 제안 방법의 정확성을 보여주고 있다.

표 2 몬테카를로 방법과 제안방법의 비교

	*Model 1			**Model 2			이론해
	변위	분산계수	표준편차	변위	분산계수	표준편차	변위
MCS	2.0695	0.0706	0.1461	2.3388	0.0671	0.1570	2.2618
Proposed WI	2.0521	0.0684	0.1404	2.1993	0.0682	0.1500	2.2618
MCS/WI	1.0085	1.0325	1.0406	1.0634	0.9840	1.0467	

상관관계거리(correlation distance) d=5.0, 하중작용점 아래 1.25 지점, *Model 1=유한요소 64, **Model 2=유한요소 49+무한요소 15

표 3은 몬케카를로 방법과 제안방법에서 얻어진 두 모델 사이의 결과를 비교하고 있다. 표에서 보듯이 Model 2의 경우 Model 1에 비하여 13%와 7%의 변위 증가를 나타내고 있으며 표준편차의 경우 7.5%와 7%의 증가를 보여주고 있다. 구조 반응의 표준편차는 해석인수의 불확실성에 의한 구조거동의 불확실성 정도를 나타내는 것으로서, 무한요소의 적용에 의하여 증가된 표준편차를 얻었다는 것은 구조거동의 불확실성 폭이 증가됨을 의미하여 거동예측의 관점에서는 안전측의 결과를 얻을 수 있음을 의미한다.

그림 9는 요소망의 세분화에 따른 몬테카를로 방법과 가중적분법에 의한 결과 변화를 보여주고 있다. 요소망의 세분화에 따라 몬테카를로 방법은 하한경계를 가지고 수렴하고 있으며 가중적분법의 경우는 상한경계를 가지고 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 몬테카를로 방법의 경우 조악한 요소망이 확률장을 표현하기에 부적절함을 나타내며 요소망의 세분화에 따라 확률장의 모사가 개선되는 것을 보여준다.

그림 10은 몬테카를로 방법에서 요소망의 세분화에 따른 분산계수의 변화추이로서 상관관계거리 $d=0.01$에서의 값을 나타낸 것이다. 그림에서 보듯이 분산계수는 요소망의 세분화에 따라

표 3 모델에 따른 결과비교

해석방법	항 목	*Model 1/ Exact	**Model 2 /Exact	Model 2/ Model 1
MCS	변 위	0.9150	1.0340	1.1302
	분산계수	·	·	0.9503
	표준편차	·	·	1.0746
Pro-posed WI	변 위	0.9073	0.9723	1.0717
	분산계수	·	·	0.9971
	표준편차	·	·	1.0684

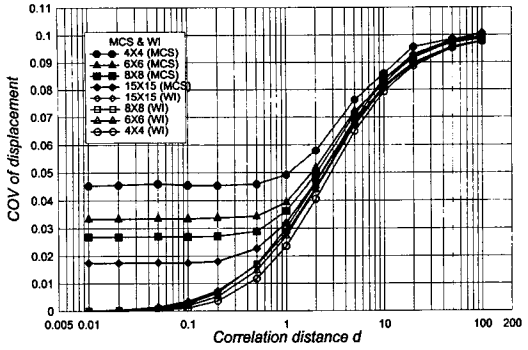


그림 9 요소망 세분화에 따른 결과비교

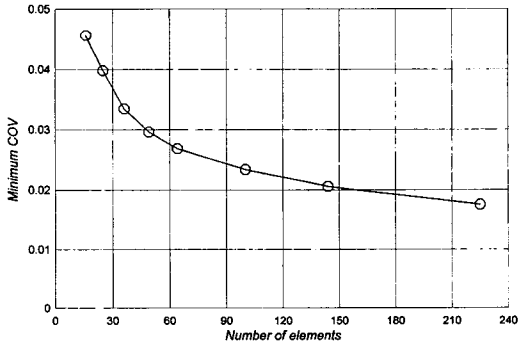


그림 10 요소망 세분화에 따른 몬테카를로 방법의 수렴

이론해라고 할 수 있는 0으로 느린 속도로 수렴해가고 있는 것을 볼 수 있다. 그러므로 몬테카를로 방법은 요소망을 무한 세분화할 경우 이론해에 수렴한다고 할 수 있을 것이며 그림 10은 그 추이를 보여주고 있다.

본 연구의 예제 및 검증을 위하여 사용된 반무한영역의 이론해 및 무한요소의 거동은 실제적으로 불확정성(indeterminacy)를 가지고 있다. 해석에 따른 결과를 고찰하여 보면 식(29)로 주어진 이론해의 경우 y_o의 값이 크면 좀더 유연한 결과를 보이며 무한요소의 경우도 감소함수의 차수가 증가함에 따라 유연도가 증가하는 경향을 보였다. 그러나 이러한 해의 불확정성에도 불구하고 그림 4와 표 3에서 보듯이 무한요소의 사용에 의한 결과의 향상을 볼 수 있으며 반응변화도(response variability) 해석의 경우 나타난 결과의 향상은 매우 크다고 할 수 있다. 특히 통계학적인 방법인 몬테카를로 방법과 비통계학적인 방법의 하나인 가중적분법이 상호 잘 일치하는 좋은 결과를 보여주고 있다.

7. 결 론

본 논문에서는 가중적분법에 의한 반무한영역에 대한 추계론적 유한요소해석방법에 대하여 논하였다. 유한영역을 가지는 평면문제와 평판문제 등에 적용되었던 가중적분법은 본 연구를 통하여 무한영역에까지 확장 적용되었다. 해석 결과의 타당성 및 추계론적해석에서의 무한요소의 적용성은 통계학적 방법인 몬테카를로 방법과의 비교를 통하여 제시되었다. 결과 검증에는 유한요소만을 사용한 Model 1과 무한요소를 조합 사용한 Model 2의 두 모델을 사용하였다.

확정론적 해석결과 Model 2는 이론해와 유사한 거동을 보였으나 Model 1은 상대적으로 강성이 큰 특성을 나타내어 반무한영역에 대한 해석에서 무한요소의 사용이 매우 바람직한 결과를 나타냄을 알 수 있었다. 본 연구의 주된 목적인 추계론적 해석에서 Model 2는 Model 1에 비하여 몬테카를로 방법의 경우 7.5%, 가중적분법의 경우 7%정도 큰 표준편차를 나타내었다. 이는 무한영역에 대한 실제적인 모델링의 중요성을 나타냄은 물론 무한요소를 적용한 가중적분법에 의한 추계론적해석의 타당성을 보여주는 것이다. 이러한 결과는 구조계 내의 공간적 불확실성이 매우 크다고 할 수 있는 반무한영역의 거동에 대한 보다 믿을 만한 해를 얻는데 도움을 주리라고 기대된다.

참 고 문 헌

1. 최창근, 노혁천, "사변형 요소를 이용한 추계론적 유한요소해석", 대한토목학회논문집, 제13권, 제 5호, 1993, pp.29~37
2. Angelov, T. A., "Infinite Elements-Theory and Applications," *Computers and Structures*, Vol. 41, No. 5, 1991, pp.959~962

3. Bettess, P., "More on Infinite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp.1613~1626
4. Butcher, C. G. and Shinozuka, M., "Structural Response Variability", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 114(12), 1988, pp.2035~2054
5. Choi, C. K. and Noh, H. C., "Stochastic Finite Element Analysis of Plate Structures by Weighted Integral Method", *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, Vol. 4, No. 6, 1996, pp.703~715
6. Curnier, A., "A Static Infinite Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp.1479~1488
7. Deodatis, G. and Shinozuka, M., "Bounds on Response Variability of Stochastic Systems", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 115(11), 1989, pp.2543~2563
8. Deodatis, G. Wall, W. and Shinozuka, M., "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method", In P. D. Spanos and C. A. Brebbia, editors, "*Computational Stochastic Mechanics*", 1991, pp.395~406
9. Kleiber, M. and Hein, T. D., *The Stochastic Finite Element Method*, John Wiley & Sons Ltd., 1992
10. Lawrence, M. A., "Basis Random Variables in Finite Element Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp.1849~1863
11. Newland, D. E., *An Introduction to Random Vibration and Spectral & wavelet Analysis*, Longman Scientific & Technical, 1994
12. Pissanetzky, S., "An Infinite Element and a Formula for Numerical Quadrature over an Infinite Interval", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp.913~927
13. Shinozuka, M., "Structural Response Variability", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 113(6), 1987, pp.825~842
14. Timoshenko, S. and Goodier, J., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, London, 1961
15. Vanmarcke, E. and Grigoriu, M., "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 109(5), 1983, pp.1203~1214
16. Yamazaki, F, Shinozuka, M., "Simulation of stochastic fields by statistical preconditioning", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 116(2), 1990, pp.268~287
17. Zhu, W. Q., Ren, Y. J. and Wu, W. Q., "Stochastic FEM Based on Local Average of Random Vector Fields", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 118(8), 1992, pp.496~511

(접수일자 : 1998. 12. 7)