

# 소수의 고유진동수를 사용하는 비파괴 균열발견모델의 유도 및 검증

## Experimental Verification of Nondestructive Crack Detection Model Using a Few Natural Frequencies

김 정 태\*  
Kim, Jeong-Tae

### 요 지

본 연구에서는 고유진동수를 사용하여 균열의 위치와 크기를 발견하는 비파괴 균열발견모델을 유도하고 Euler-Bernoulli보를 대상으로 이 모델의 적합성을 검증하였다. 먼저, 균열위치예측모델과 균열크기예측모델로 이루어진 균열발견체계를 제시하였는데, 균열위치예측모델은 모드민감도와 고유진동수 사이의 선형적인 관계로부터 간접적으로 유도되었으며 균열크기예측모델은 균열발생에 의한 변형에너지의 손실을 진동특성치의 변화와 비교하는 동적 파괴역학적 방법으로 유도되었다. 다음으로, 기존에 발표된 양단-자유보에 대한 진동모드 실험결과를 사용하여 균열위치와 균열크기를 예측하고 평가하므로써 균열발견모델의 적합성과 적용성을 실험적으로 검토하였다. 대부분의 손상시나리오에서 균열위치와 균열크기 예측치는 실제값과 근사하게 일치하였다.

핵심용어 : 비파괴, 손상, 균열발견, 모드해석, 고유진동수

### Abstract

In this paper, a newly-formulated nondestructive crack detection model using a few natural frequencies is presented and its feasibility to locate and size cracks in structures is experimentally verified using Euler-Bernoulli beams. To meet this objective, the following approach is utilized. Firstly, the crack detection scheme which consists of the crack localization model and the crack sizing model is formulated. Secondly, the feasibility and the practicality of the crack detection model are evaluated by locating and sizing cracks in free-free beams for which measured modal parameters of sixteen crack cases were previously reported. Major results observed from the crack detection exercises include that, for most damage cases, the predicted locations and sizes are in good agreement with the inflicted ones.

*Keywords* : nondestructive, damage, crack detection, modal analysis, natural frequency

## 1. 서 론

건물 및 교량과 같은 대형구조물들은 각종 운

영하중, 지진, 풍하중, 부식에 지속적으로 노출되어 있다. 이들 구조물의 중요부재에 숨겨진 손상의 위치 및 크기를 조기에 그리고 정확하게 발견

\* 정회원·부경대학교 해양공학과, 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

하는 것은 치명적인 구조물 파괴를 미연에 예방하기 위하여 매우 중요하다. 이들 구조물에서의 정확한 손상발견을 위해서는 적절한 실험계측에 의한 구조거동 모니터링 기술과 구조손상의 위치 및 그 크기를 정확하게 예측하고 추정하는 기술이 요구된다.

지난 1980년대 이후, 구조진동측정에 의한 비파괴적 손상발견에 관한 많은 연구들이 수행되었다. Gudmunson<sup>1)</sup>과 Adams<sup>2)</sup>는 진동모드섭동이론에 근거하여 선형구조계의 구조특성의 변화를 추정하는 방법을 제시하였다. Chen<sup>3)</sup>과 Stubbs<sup>4)</sup>는 다자유도 선형구조계의 민감도 해석을 통해 강성도 또는 유연도의 구조특성치의 변화를 예측하는 방법을 제안하였다. Sundermeyer 등<sup>5)</sup>과 Ostachowicz 등<sup>6)</sup>, 그리고 Dimarogonas<sup>7), 8)</sup>은 구조물 내에 있는 균열의 기하학적 형상에 대한 강성도 또는 유연도의 변화를 진동특성치의 변화 및 선형과 비선형 파괴역학이론을 사용하여 해석하였다. 더욱 최근에 Mazurek<sup>9)</sup>과 Kim<sup>10)</sup>, 그리고 Aktan<sup>11)</sup>은 강교량에서 진동모드의 변화를 사용하여 구조계의 손상도를 유연도와 강성도의 상대적인 변화인 손상지수로서 예측하는 방법들을 제시하였다.

그 동안 연구개발된 손상추정방법들을 연속보 구조형식의 실물 교량 구조물에 실제적인 어려움 없이 적용하기 위해서는 다음과 같은 과제들이 해결되어야 한다. 첫째, 손상위치와 크기가 기하학적으로 산정되어야 한다. 구조물의 유지 및 관리의 측면에서 손상위치는 궁극적으로 구조물내의 공간위치(요소 또는 절점)로서 예측되어야 한다. 또한, 손상크기는 차후의 구조물 유지와 보수에 활용될 수 있도록 기하학적인 균열의 형상 및 크기와 같은 실제량으로 예측이 되어야 한다. 둘째, 소수의 진동모드 데이터를 사용하여 손상위치와 손상크기를 예측할 수 있어야 한다. 대부분의 교량구조물에서는 극히 제한적인 진동모드만이 허용가능한 계측 불확실성 범위내에서 측정이 가능하다. 예를 들면, 실물 판형교에서는 2~5개의 진동모드가 작은 오차 범위에서 계측될 수 있다<sup>11)</sup>. 셋째, 고유진동수만을 사용하여 손

상의 위치와 그 크기를 예측할 수 있어야 한다. 진동모드의 계측으로부터 얻어지는 단일 모드의 모드형상벡터는 그 모드의 고유진동수에 비하여 (1) 모드형상이 구조계 국부거동의 변화를 포함하는 장점이 있지만<sup>9), 10)</sup>, (2) 측정 및 분석과정의 오류가 모드형상의 국부거동과 혼합되어(고유진동수의 작은 오차는 고유벡터의 국부거동의 큰 오차) 그릇된 손상에측을 야기하며<sup>10)</sup>, (3) 진동모드형상 계측 설계가 어려우며 계측기간이 길게 소요된다. 이같은 어려움을 극복하기 위하여 환경적 진동(ambient vibration)의 상시 모니터링을 사용하는 연구가 수행되고 있다<sup>9)</sup>. 이에 비하여, 고유진동수의 사용은 (1) 단기간내에 구조계 전체의 진동모드반응을 측정할 수 있으며, (2) 모드형상을 계측하기 매우 어려운 구조물들(예를 들면, 매립구조, 교각, 말뚝, 파이프 및 해양구조물 등 경계조건이 계측조건을 좌우하는 구조물들)에서 적용될 수 있는 장점이 있다. 하지만, 구조물의 고유진동수를 사용하여 실물 교량구조물의 손상위치 및 크기를 추정하는 연구는 현재까지 큰 성과를 거두지 못하고 있으며, 이는 손상발견모델의 부정확성 및 진동모드와 고유진동수의 계측오차에 기인한다. 또한, 이 같은 고유진동수의 변화를 감지하여 구조손상을 추정하는 방법은 고유진동수가 작은 손상에 민감하게 변하는 구조부재 및 단순형태의 구조물에서 제한적으로 적용될 수 있음이 보고되고 있다.

본 논문에서는 고유진동수를 사용하여 균열의 위치와 크기를 발견하는 비파괴 균열발견모델을 새로이 유도하고 Euler-Bernoulli보를 대상으로 이 모델의 적합성과 적용성을 검증하고자 한다. 먼저, 구조물의 진동모드민감도와 고유진동수의 변화를 사용하는 균열위치예측모델(crack localization model)과 균열크기예측모델(crack sizing model)로 이루어진 균열발견체계를 유도하였다. 균열위치예측모델은 모드민감도와 고유진동수 사이의 선형적인 관계로부터 간접적으로 해를 구하는 방법을 채택하여 유도되었다. 또한 균열크기예측모델은 Euler-Bernoulli 보 모델로 그 범위를 국한하였으며, 균열발생에 의한 변형에너지의 손실

을 진동특성치의 변화와 비교하는 동역학적 파괴역학적인 방법으로 부터 유도되었다. 다음으로, 양단 자유보를 대상으로 균열위치와 균열크기를 예측하므로써 균열발견모델의 적합성과 적용성을 실험적으로 검토하였는데, Silva와 Gomes<sup>13)</sup>에 의해 기존에 발표된 16개의 균열보에 대한 진동모드실험 결과를 사용하였다.

앞서 설명한 것과 같이 고유진동수의 변화만을 사용하여 손상을 추정하는데 따른 여러 문제점에도 불구하고 본 연구에서는 (1) 모우드 형상의 계측오차로 인한 잘못된 손상예측을 피하기 위하여, 그리고 (2) 모드형상을 측정하기에 적절한 가속도계들을 설치할 수 없는 제한된 계측조건하의 구조물(예, 지중 구조물)의 손상검색에의 응용의 목적으로 고유진동수의 변화만을 계측하고 수치모델로부터 모드형상을 추정하여 모드민감도의 상대적 변화를 감지하여 손상위치를 색출하는 방법을 사용하였다.

2. 균열발견모델의 이론적 배경

이 절에서는 진동모드특성치의 변화를 통하여 직접 균열의 위치와 그 크기를 추정하는 균열발견체계의 이론적 배경이 요약되었다. 균열발견체계는 그림 1과 같은 일련의 단계로 구성된다. 먼저, 구조물의 초기(비손상)상태와 손상상태에서의 NM모드의 진동모드특성치가 모드실험으로부터 계측된다(dynamic modal testing). 초기상태의 모드특성자료가 기록되지 않은 현존하는 구조물들의 경우에는 초기진동특성치가 해석적인 방법으로 추정될 수 있다(FE model of structure). 다음으로, 초기상태와 손상상태의 모드특

성치와 구조특성치가 균열위치예측모델에 입력되어 균열위치가 추정된다(crack localization model). 균열위치가 예측 되면, 마지막으로, 초기상태와 손상상태의 진동모드특성치, 구조특성치 및 예측된 균열위치를 균열크기에측모델에 입력하여 균열크기를 추정한다(crack detection model).

그림 2에 보이는 균열과 같은 기하학적 형상의 변화로 인하여 발생하는 구조물의 고유진동수의 변화는 모드섭동이론으로부터 초기의 교란되지 않은 형상특성에 대한 교란된 형상특성의 상대적인 변화를 추정하여 분석할 수 있다. 또한, 고유진동수의 변화는 미소한 균열이나 미소절개 발생시의 변형에너지의 변화에 의존한다.

손상되지 않은 다자유도 비강쇄 선형구조계의 *i*모드의 고유진동수  $\omega_i$ 와 모드형상  $\phi_i$ 가 고유해인 특성방정식은 다음과 같다.

$$(k - \omega_i^2 m)\phi_i = 0 \tag{1}$$

여기서, **k**와 **m**은 각각 시스템 강성행렬과 시스템 질량행렬이다. 또한, *i*모드의 모드강성(modal stiffness)  $K_i (= \phi_i^T k \phi_i)$ 와 *i*모드의 모드질량(modal mass)  $M_i (= \phi_i^T m \phi_i)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$K_i = \omega_i^2 M_i \tag{2}$$

임의의 시간이 경과한 후에 구조물의 임의의 위치에 손상이 발생(예를들면, 그림 2의 균열과 같은 기하학적 형상의 변화) 하였음을 가정하자. 또한 손상된 구조계를 별표로 표기한다. 그러면, 손상된 구조계의 *i*모드의 고유진동수  $\omega_i$ 와 모드형상  $\phi_i$ 는 위의 식 (1)과 유사하게 손상구조계의 특성방정식으로 부터 구해지며, 손상구조계의 *i*모드의

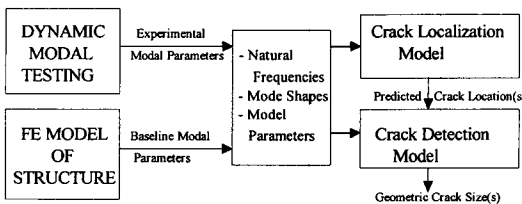


그림 1 균열위치와 균열크기 예측체계

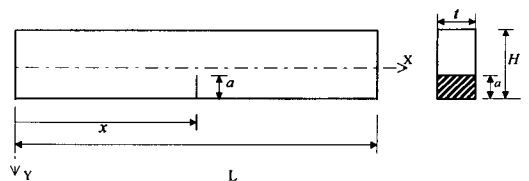


그림 2 단일 균열된 양단-자유 보의 기하학적 형상

모드강성  $K_i^*(=\phi_i^T \mathbf{k} \phi_i)$ 와 모드질량  $M_i^*(=\phi_i^T \mathbf{m} \phi_i)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$K_i^* = \omega_i^2 M_i^* \quad (3)$$

다음으로, 손상 전후의  $i$ 모드의 모드강성  $K_i$ 와  $K_i^*$ 를 손상전후의  $i$ 모드의 모드변형에너지  $W_i$ 와  $W_i^*$ 에 비교하면 다음과 같다<sup>1),5)</sup>.

$$\frac{\Delta W_i}{W_i} = \frac{\Delta K_i}{K_i} \quad (4)$$

여기서,  $\Delta K_i(=K_i^* - K_i)$ 는  $i$ 모드의 모드강성의 변화량이며  $\Delta W_i(=W_i^* - W_i)$ 는  $i$ 모드의 모드변형에너지(modal strain energy)손실량(즉, 구조형상보정 변형에너지)이다. 한편,  $\Delta W_i/W_i$ 는 손상 전후의 변형에너지 변화율을 대표한다. 또한, 식(2)-식(4)를 전개하고 재구성하여 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\frac{\Delta K_i}{K_i} = \frac{\Delta \omega_i^2}{\omega_i^2} \left(1 - \frac{\Delta M_i}{M_i}\right) + \frac{\Delta M_i}{M_i} \quad (5)$$

여기서,  $\Delta M_i$ 와  $\Delta \omega_i^2$ 는 각각 균열발생 전후의  $i$ 모드의 모드질량의 변화량과 고유치의 변화량이다.

균열발생에 의한 구조물 체적의 변화가 없는 것으로 가정하고 모드질량의 변화를 무시하여 식(5)의 일차적 근사치를 취한다. 그러면, 식(4)와 식(5)로부터  $i$ 모드의 변형에너지 변화율과 고유치의 변화율 사이의 다음과 같은 근사적 관계가 성립한다.

$$\frac{\Delta W_i}{W_i} \left(= \frac{\Delta K_i}{K_i}\right) \approx \frac{\Delta \omega_i^2}{\omega_i^2} \quad (6)$$

### 2.1 균열위치예측모델

균열위치예측모델(crack localization model)은 모드민감도와 고유진동수 사이의 선형적인 관계로부터 간접적으로 해를 구하는 방법을 사용하였다<sup>2),12)</sup>.  $NE$ 부재와  $N$ 절점으로 구성된 구조계의 경우, 손상발생 전후의  $i$ 모드의 모드강성의 변화

량  $\Delta K_i$ 는 근사적으로 아래의 식과 같다<sup>4)</sup>.

$$\Delta K_i = K_i^* - K_i \approx \sum_{j=1}^{NE} \phi_i^T \Delta \mathbf{k}_j \phi_i \quad (7)$$

여기서,  $\Delta \mathbf{k}_j$ 는  $j$ 부재의 손상발생전 부재강성도  $\mathbf{k}_j$ 와 손상발생후 부재강성도  $\mathbf{k}'_j$ 의 상대적 변화량이다.

$$\Delta \mathbf{k}_j = \mathbf{k}'_j - \mathbf{k}_j = \mathbf{k}_j \alpha_j \quad (8)$$

또한,  $\alpha_j(-1 \leq \alpha_j \leq 0)$ 는  $j$ th 부재의 부재강성도의 변화율을 지시하는 스칼라이다.

식(7)을  $i$ 모드의 모드강성  $K_i$ 로 나누고 식(7)와 식(8)을 식(5)에 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{NE} S_{ij} \alpha_j = Z_i \quad (9)$$

여기서,  $S_{ij}$ 는  $i$ 모드에서  $j$ 부재가 차지하는 변형에너지량의 비율을 나타내는 모드민감도이고,  $Z_i$ 는 손상발생 전후의  $i$ 모드 고유치의 변화율을 나타낸다.

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{NE} \phi_i^T \mathbf{k}_k \phi_i / K_i \quad (10a)$$

$$Z_i = \frac{\Delta \omega_i^2}{\omega_i^2} \left(1 - \frac{\Delta M_i}{M_i}\right) + \frac{\Delta M_i}{M_i} \quad (10b)$$

손상발생 전후에 질량의 변화가 없다고 가정하면, 손상도는 강성도 파라메타의 변화만으로 고려될 수 있으며, 식(10b)은 근사적으로 식(6)과 같게 되고 손상 전후의 고유진동수의 변화를 실험계측하여 계산할 수 있다. 한편, 다자유도 선형구조계의 해인 손상도는 식(9)으로부터 직접적으로 계산할 수 있는데, 이는 정방형 또는 정방형에 가까운 모드민감도 행렬을 사용하는 조건에서만 가능하다. 즉, 총 미지 손상위치 갯수(총 부재수)와 계측된 총 모드 수가 근사적으로 일치( $NM \approx NE$ )하는 조건에서 모드민감도의 역행렬을 통해 해가 계산된다. 이같은 민감도 행렬법을 적용하기 위해서는 (1) 미지 손상위치 수(구조계

총 부재수)를 측정가능한 진동모드 수에 근사한 수로 제한하거나 (2) Pseudo-Inverse기법을 이용하여 비정방행 모드민감도의 역행렬을 계산하여야 한다.

하지만, 미지 손상위치의 갯수를 극 소수로 제한할 수 없는(한편으로는, 높은 정확도로 계측가능한 진동모드 수가 제한된) 대부분의 구조계의 경우에 이상의 방법을 사용하기 어려운데, (4) 이는 총 모드수가 총 부재수 보다 아주 작은 경우 ( $NM \ll NE$ )에 식(9)이 약조건이 되기 때문이다. 이같은 경우, 식(9)에 제약조건을 부과하여 간접적으로 손상위치를 예측하는 아래의 식들을 유도할 수 있다.

먼저, 전체  $NE$  부재 ( $j=1, 2, \dots, Q, NE$ ) 구조계의 계측된  $NM$ 개 모드중 임의의 두 모드  $m$ 과  $n$ 을 고려하자. 임의의  $m$ 모드에 대해서 식(9)은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^{NE} S_{mj} \alpha_j = Z_m \quad (11)$$

또한 임의의  $n$ 모드에 대해서 식(9)은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^{NE} S_{nj} \alpha_j = Z_n \quad (12)$$

다음으로, 구조계의 단일위치  $Q$ 가 손상되었다고 가정하자. 이는 다음과 같은 제약조건을 의미한다.

$$\begin{aligned} \alpha_j &= 0, & j \neq Q \\ \alpha_j &\neq 0, & j = Q \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $\alpha_j \neq 0$ 는  $-1 \leq \alpha_j < 0$ 인 조건이다. 그러면, 식(11)와 식(12)은 다음과 같게 된다.

$$S_{mQ} \alpha_Q = Z_m ; S_{nQ} \alpha_Q = Z_n \quad (14)$$

식(14)로부터  $Z_m$ 을  $Z_n$ 으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{Z_m}{Z_n} = \frac{S_{mQ}}{S_{nQ}} \quad (15)$$

여기서,  $Z_m/Z_n$ 은 손상  $\alpha_Q$ 의 발생에 의한  $m$ 모드 고유치변화율과  $n$ 모드 고유치변화율의 비이고,  $S_{mQ}/S_{nQ}$ 는  $m$ 모드에서의 부재  $Q$ 의 모드민감도와  $n$ 모드에서의 부재  $Q$ 의 모드민감도의 상대적 비를 나타낸다.

위의 식(15)은 식(9), 식(13) 및 식(14)에 의거하여 전체 계측모드  $NM$ 에 대하여 다음과 같이 확장될 수 있다.

$$\frac{Z_i}{\sum_{k=1}^{NM} Z_k} = \frac{S_{iQ}}{\sum_{k=1}^{NM} S_{kQ}}, \quad (i=1, 2, \dots, NM) \quad (16)$$

한편, 식(15)과 식(16)은 상기의 가정과 식(13)에 의거하여 부재  $Q$ 가 손상된 조건에서만 성립한다. 임의의 부재  $j(j=1, 2, Q, \dots, NE)$ 에 대해서 식(16)이 성립하는 정도는 다음과 같은 오차지수  $e_{ij}$ 를 사용하여 산정하였다.

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{Z_i}{\sum_{k=1}^{NM} Z_k} - \frac{S_{ij}}{\sum_{k=1}^{NM} S_{kj}}, \\ (i=1, 2, \dots, NM) \quad (j=1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $e_{ij}$ 는  $i$ 모드와  $j$ 부재의 오차를 나타내며 그 값은  $j$ 부재의 위치가 실제 손상위치  $Q$ 와 일치하는 위치오차 정도를 지시한다. 윗식은 오차가 "0"일때  $j$ 부재에서 손상이 예측되었음을 의미한다. 즉, 미지의 손상위치  $Q$ 에서  $e_{iQ} = 0$ 으로 성립할 것이며, 이는 위치  $Q$ 에 손상도  $\alpha_Q \neq 0 (-1 \leq \alpha_Q < 0)$ 이 발생한 것이다. 식(17)의 오차지수를 통해  $j$ 부재의 손상을 예측하기 위해  $j$ 부재의 손상지수  $\beta_j$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{NM} [e_{ij}]^2}, \quad 0 < \beta_j < \infty \\ (j=1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, 추정된 손상지수  $\beta_j$ 가 국부 최대인 임의의 위치  $j$ 가 손상위치로 예측된다.

### 2.2 균열크기에측모델

본 연구에서 유도된 균열크기에측모델(crack sizing model)은 Euler-Bernoulli 보 모델로 그 범위를 국한하였다. 균열발생에 의한 보 변형에너지의 손실과 진동특성치의 변화와의 관계를 동역학적 파괴역학이론에 기초하여 정식화하여 균열크기에측모델을 유도하였다. 먼저, 그림 2와 같은 Euler-Bernoulli보의  $i$ 진동모드의 변형에너지  $W_i$ 는 다음과 같다.

$$W_i = \int_0^L \frac{1}{2} EI \{\phi_i''(x)\}^2 dx \quad (19)$$

여기서,  $EI$ 는 휨강성( $E$ 는 Young계수이며  $I$ 는 단면이차모멘트)이고  $L$ 은 비손상 보 구조의 길이(지간)이며  $\phi_i(x)$ 는  $i$ 모드의 형상함수이다. 다음으로, 식(19)에 선형탄성파괴역학에 근거한 에너지해방률(energy release rate)을 대입하고, 평면변형을 조건과 개형균열모드(opening crack mode) 조건을 부여하면,  $i$ 모드의 변형에너지 손실률은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Delta W_i}{\partial a} = t \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 \quad (20)$$

여기서,  $t$ 는 보의 두께,  $a$ 는 균열깊이,  $\nu$ 는 푸아송비,  $K_I$ 는 균열크기  $a$ 와 보의 치수에 의존하는 개형균열모드의 응력확대계수이다.

그림 2와 같은 보의 균열선단에 대한 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_I = F(a/H) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (21)$$

여기서,  $F(a/H)$ 는 무차원 균열깊이비  $a/H$ 에 의존하는 기하학적 형상계수이다<sup>7), 8)</sup>.

$$F(a/H) = 1.12201.40(a/H) + 7.33(a/H)^2 - 13.08(a/H)^3 + 14.0(a/H)^4 \quad (22)$$

단, 균열의 깊이가 작은 경우를 가정하면  $F(a/H) \approx 1.12$ 를 근사적으로 사용한다. (하지만,  $a/H$ 의 값이 증가할 수록  $F$ 의 비선형적 추정오차는 증가할 것이다<sup>1), 5)</sup>.)

식(21)을 식(20)에 대입하고 식(20)를 균열윤곽선(crack contour)에 걸쳐 적분하면 다음 식과 같다.

$$\Delta W_i = \left( \frac{\pi t (1-\nu^2)}{2E} F^2 \sigma_k^2 k a^2 \right)_i \quad (23)$$

여기서,  $i$ 모드에 대하여,  $a_k (= a(x_k))$ 는 보의 종축상의  $k$ 번째 위치인  $x_k$ 에서의 균열깊이를 나타내며  $\sigma_k (= \sigma(x_k))$ 는 위치  $x_k$ 에서의 최대휨응력레벨을 대표한다.

그림 2와 같은 Euler-Bernoulli보의 경우, 최대휨응력레벨은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\sigma(x_k) = \frac{1}{2} E H \phi_i''(x_k) \quad (24)$$

한편, 식(19)-식(24)를 식(6)에 대입하고 간략화 하면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta \omega_i^2}{\omega_i^2} = \frac{\pi t (1-\nu^2)}{4} \frac{H^2}{I} F^2 \bar{S}_{ik} a_k^2 \quad (25)$$

여기서,  $\bar{S}_{ik}$ 는  $i$ 모드에서  $k$ 번째 위치의 모드진강도를 나타낸 것으로 Euler-Bernoulli보 모델의 경우에 다음과 같이 간략화 된다.

$$\bar{S}_{ik} = \int_k \{\phi_i''\}^2 dx / \int_0^L \{\phi_i''\}^2 dx \quad (26)$$

보 단면이 직사각형 단면임을 가정하여 위 식들을 단순한 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta \omega_i^2}{\omega_i^2} = \eta \bar{S}_{ik} \left( \frac{a_k}{H} \right)^2 \quad (27)$$

여기서,  $(a_k/H)_i$ 는  $i$ 모드 경우에  $k$ 번째 위치에서 예측된 무차원 균열크기에측치(crack sizer)이다.

또한,  $\eta$ 는 보 치수와 균열형식 및 푸아송비에 의존하는 상수이다(단, 평면응력의 경우에는 식 (25)에서 푸아송비의 항이 제외된다).

$$\eta = 3\pi(1-\nu^2)(H/L)F^2 \tag{28}$$

식 (27)로 부터 균열크기예측치를 추정하기 위해서는 먼저 진동모드계측실험으로부터 고유치의 변화를 측정하고, 다음으로 모드민감도를 유한요소모델의 진동모드해석으로부터 결정하여야 한다. 균열 발생 전과 그후에 각각 진동특성치가 계측되었다면, 임의의  $i$ 모드에서 예측되는  $k$ 번째 위치의 균열 크기예측치  $(a_k/H)_i$ 는 다음과 같다.

$$\left(\frac{a_k}{H}\right)_i^2 = \frac{\Delta\omega_i^2}{\omega_i^2} \frac{1}{\eta} \frac{1}{S_{in}} \tag{29}$$

식 (29)로 부터 추정되는 해인 균열크기예측치의 정확도는 유한요소모델의 모드민감도의 정확도와 손상발생 전후에 측정된  $i$ 모드의 고유진동수 변화율의 민감도에 의존한다.

### 3. 균열발견모델의 실험적 검증

#### 3.1 실험구조물과 진동모드실험결과

실험 대상구조물은 균일단면의 강부재인 양단-자유보로서 지간 길이 0.72-m, 단면높이 0.032-m, 폭 0.016-m였다(그림 2 참고). 실험구조에 대한 진동실험은 Silva와 Gomes<sup>13)</sup>에 의해 수행되었다. 보에 대한 균열의 도입은, 그림 2에 보인 것과 같이, 보의  $x$ 축상의 임의의 위치에서  $y$ 방향으로 단면의 두께를 가는 줄톱을 사용하여 절단하고 감소시켜서 실험하였다.

이들의 연구에서, 그림 2와 같은 실험용 보의 4개 위치( $x/L=0.125, 0.25, 0.375, 0.5$ )가 균열위치로 선정되고 각 위치마다 4단계의 균열크기( $a/H=0.125, 0.25, 0.375, 0.5$ )가 각각 도입되어 전체 16개의 균열시나리오(16개의 단일 균열)가 실험되었다. 진동모드실험의 결과로서, 16개 균열시나리오 각각의 경우에 대하여 균열발생 전후의 4개의 휨모드의 고유진동수가 계측되었다(모드형상은 그림 3 참조). 총 16개 균열시나리오의 균열전후에 계측된 고유진동수들이 표 1에 요약되었다.

표 1 양단-자유 보의 균열시나리오 및 계측된 고유진동수(Hz)<sup>13)</sup>

Crack Case	Inflicted Crack		Mode 1		Mode 2		Mode 3		Mode 4	
	Loc (x/L)	Size (a/H)	Initial	Cracked	Initial	Cracked	Initial	Cracked	Initial	Cracked
1	0.125	0.125	315.9	316.0	860.2	859.4	1654.5	1649.0	2668.0	2653.0
2	0.125	0.25	316.3	316.1	862.6	857.8	1659.0	1632.5	2674.0	2608.0
3	0.125	0.375	317.6	316.6	864.6	851.4	1663.0	1593.5	2682.0	2520.0
4	0.125	0.5	314.7	313.0	856.8	826.6	1647.0	1515.0	2657.0	2378.0
5	0.25	0.125	316.8	315.9	861.8	855.2	1657.5	1647.5	2673.0	2665.0
6	0.25	0.25	317.7	314.1	864.4	840.6	1662.0	1626.5	2676.0	2666.0
7	0.25	0.375	317.8	308.8	864.8	805.2	1662.5	1580.5	2675.0	2660.0
8	0.25	0.5	323.8	305.4	877.8	870.4	1689.5	1534.0	2721.0	2685.0
9	0.375	0.125	313.5	311.7	855.0	853.8	1646.0	1646.5	2657.0	2652.0
10	0.375	0.25	315.4	307.1	858.6	842.4	1653.0	1651.5	2665.0	2604.0
11	0.375	0.375	316.6	296.2	862.4	825.0	1659.5	1655.5	2675.0	2532.0
12	0.375	0.5	328.8	279.0	873.4	805.2	1679.5	1672.0	2707.0	2439.0
13	0.5	0.125	316.7	313.0	862.8	863.2	1658.0	1645.5	2675.0	2676.0
14	0.5	0.25	315.6	303.0	859.4	859.8	1652.0	1606.5	2667.0	2665.0
15	0.5	0.375	317.8	291.5	865.8	866.0	1664.5	574.0	2687.0	2683.0
16	0.5	0.5	320.6	265.1	873.0	873.2	1678.0	1498.0	2701.0	2701.0

### 3.2 균열위치 및 균열크기 예측

균열발견모델을 적용하기 위한 수학적 모델로서 Euler-Bernoulli보 모델이 선택되었으며 유한요소해석 소프트웨어인 ABAQUS<sup>(4)</sup>를 사용하여 이 모델의 진동모드해석을 수행하였다. 이 보 모델은 72개의 균일한 요소 길이 1-cm의 선 요소(line element)로 구성되었다. 여기서 각 요소는 예측 가능한 균열위치로서 보 길이의 0.1퍼센트(즉,  $1/72 \times 100 = 1\%$ ) 간격이며, 1-cm폭의 요소를 사용하기 위해 보 모델의 73절점에서 모드형상함수가 분석되었다(실제 측정된 모드형상의 경우에는 수치보간법을 통해 이 같은 조건을 충족시킬 수 있다). 전체 4개의 휨 모드의 모드특성치를 구하였으며 임의의 절점  $k$ 의 모드형상함수  $\phi(x_k)$ 로부터 수치미분을 통하여 그 절점의 곡률  $\phi''(x_k)$ 을 구하였다. 그림 3은 모드해석으로부터 구한 비균열보의 4개의 모드형상이며, 표 2는 수치모드해석으로부터 구한 고유진동수와 예측

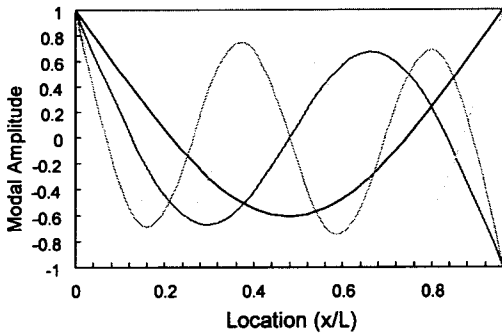


그림 3 양단-자유보의 진동모드형상-초기 4개 모드

표 2 비균열보의 고유진동수(Hz) 비교 : 측정치 VS 수치모드해석결과

Mode No.	Average Frequency of 16 Uncracked Beams	Frequency from Modal Analysis	Percentage Error (%)
1	317.85	318.07	0.07
2	864.01	863.02	0.11
3	1661.59	1657.96	0.22
4	2678.75	2676.75	0.11

된 비균열 보의 고유진동수를 비교한 결과이다.

다음으로, 균열위치예측모델로부터 균열위치가 아래의 과정을 통해 예측되었다.

(1) 진동모드해석으로부터 구한 진동특성치(표 2와 그림 3 참고)를 사용하여 부재  $J=1, \dots, 72$ 와 모드  $i=1, \dots, 4$ 에 대해서 모드민감도(식 (10)과 식 (26))가 계산되었다.

(2) 균열발생 전후에 측정된 고유진동수(표 1참고)로부터 모드  $i=1, \dots, 4$ 에 대한 고유치 변화율이 계산되었다.

(3) 모드  $i=1, \dots, 4$ 에 대한 오차지수  $e_{1j}, e_{2j}, e_{3j}, e_{4j}(j=1, 2, \dots, 72)$ 가 식 (17)로부터 계산되었다. 그림 4는 Crack Case 2( $x/L=0.125$ )의 오차지수들을 도시한 것으로, 모든 오차지수가 "0"이 되는 위치는 부재 8-10( $x/L=0.11-0.14$ )과 부재 63-65( $x/L=0.87-0.89$ )인 위치를 보이고 있다.

(4) 이 오차지수들을 식 (18)에 적용하여  $j$ 부재의 손상지수  $\beta_j$ 를 계산하고, 정규손상지수( $NE$ 부재에 대한  $\beta_j$ 의 분포를 정규분포로 가정)로 정규화하였으며, 정규손상지수중 99% 신뢰도를 통과하는 부재위치를 손상위치로 예측하였다. 그림 5는 Crack Case 2의 정규손상지수를 도시한 것이다.

(5) 전체 16개 균열시나리오에 대한 균열위치의 예측결과가 표 3에 요약되었다. 모든 균열시나리오에서 균열은 보 중앙을 중심으로 대칭인 두개의 위치에서 예측되었다(그림 5 참고). 이는

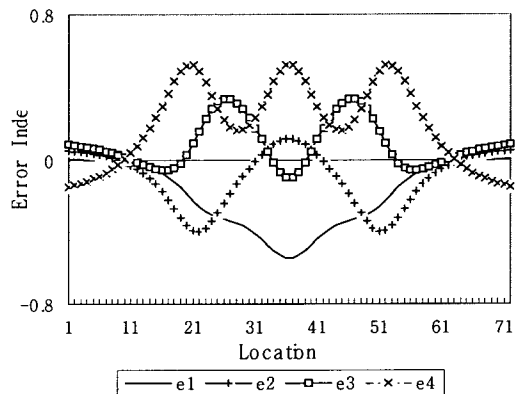


그림 4 진동모드별 오차지수에 의한 균열위치예측 (Crack Case 2경우)



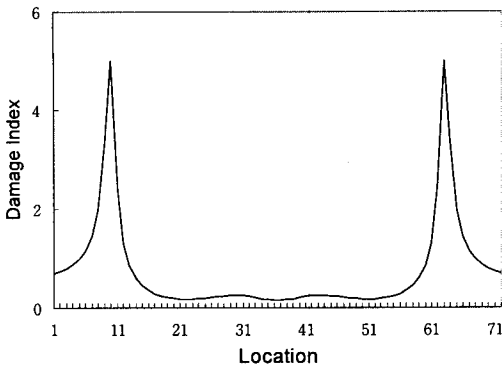


그림 5 정규손상지수에 의한 균열위치예측(Crack Case 2경우)

표 3 균열위치와 균열크기 예측결과 및 예측결과의 정확도 산정결과

Crack Case	Inflcted Crack(s)		Predicted Crack(s)		Prediction Accuracy	
	Location (x/L)	Size (a/H)	Location (x/L)	Size (a/H)	Loc. Error (%)	Sizing Error (%)
1	0.125	0.125	0.110	0.126	1.5	1.1
2	0.125	0.25	0.121	0.234	0.4	6.0
3	0.125	0.375	0.140	0.335	1.5	10.4
4	0.125	0.5	0.146	0.440	2.1	11.8
5	0.25	0.125	0.243	0.131	0.7	5.1
6	0.25	0.25	0.257	0.244	0.7	2.2
7	0.25	0.375	0.264	0.395	1.4	5.5
8	0.25	0.5	0.256	0.434	0.6	13.1
9	0.375	0.125	0.326	0.093	4.8	25.4
10	0.375	0.25	0.376	0.226	0.1	9.3
11	0.375	0.375	0.378	0.345	0.3	7.9
12	0.375	0.5	0.390	0.439	1.5	12.1
13	0.5	0.125	0.511	0.132	1.1	6.0
14	0.5	0.25	0.514	0.232	1.4	6.8
15	0.5	0.375	0.486	0.328	1.4	12.4
16	0.5	0.5	0.511	0.488	1.1	2.3

사용된 4개 진동모드민감도가 모두 보 중앙을 중심으로 대칭성을 보이기 때문이다. 표 3에는 대칭인 2개 위치들중 1개 위치들을 기재하였다.

마지막으로, 균열크기 예측모델로부터 균열크기가 아래의 과정을 통해 예측되었다.

(1) 구조부재의 기하학적 형상비와 재료특성에

관한 파라메타인 식 (28)을 계산하였다. 이때, 균열형상계수  $F$ 는 미소균열의 경우로 가정하여 1.12로 입력되었다.

(2) 앞서 계산된 모드민감도와 고유치변화를 및 예측된 손상위치를 입력하여 식 (29)로부터 Crack Sizer가 계산되었다.

(3) 모드  $i=1, \dots, 4$ 에 대한 Crack Sizer를 계산하고 이를 평균하여 균열깊이  $a/H$ 로 예측하였다. 총 16개 균열시나리오의 각각의 경우, 균열예측위치에서 산정된 균열크기 예측치가 표 3에 요약되었다.

### 3.3 균열예측결과의 정확도

균열발견체계의 정확도가 위치오차  $le$ 와 크기오차  $se$ 를 계산하여 산정되었다. 먼저, 위치오차  $le$ 는 다음과 같다.

$$le = (\Delta x/L)100 \tag{30}$$

여기서,  $\Delta x$ 는 실제 균열위치와 예측된 균열위치간의 거리이며  $L$ 은 보의 길이이다. 균열위치예측 정확도의 계산결과가 표 3에 정리되었으며 다음과 같이 분석되었다.

1) 위치오차는 0.1%~4.9% (길이720mm중 0.72mm~35.28mm의 오차)의 범위에서 발생하였으며 평균 위치오차는 1.3% (9.36mm)이었다.

2) 위치오차의 표준편차는 1.01% (7.27mm)이었으며, 위치예측오차값이 평균+표준편차의 범위를 벗어나는 균열경우는 Case 16(위치오차 4.9%)이었다.

3) Case 16 이외의 경우, 위치예측오차는 0.1%~2.1%(길이720mm중 0.71mm~15.1mm 범위)이었다.

다음으로, 균열크기오차  $se$ 는 다음과 같다.

$$se = |(a/H)_r - (a/H)_p| / (a/H)_r \tag{31}$$

여기서,  $(a/H)_r$ 는 실제 균열깊이이며  $(a/H)_p$ 는 예측된 균열깊이를 의미한다. 균열크기예측 정확도의 계산결과가 표 3에 정리되었다. 그림 6은

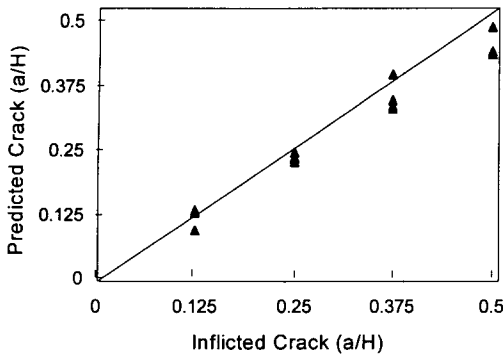


그림 6 예측된 균열크기와 실제 균열크기의 비교

전체 16개 균열시나리오의 경우에 대하여 도입된 균열크기에 관한 균열예측크기를 서로 비교한 것이다. 표 3과 그림 6으로부터 다음과 같이 분석되었다.

- 1) 크기로차는 1.1%~24.4% (예를들면, 크기로차 1%는 10mm 균열에서 0.1mm 오차)의 범위로 계산되었으며 크기로차의 평균치는 8.6%이었다.
- 2) 크기로차예측오차의 표준편차는 5.7%이었고, 크기로차예측오차가 평균+표준편차의 범위를 벗어나는 균열경우는 Case 16이었다.
- 3) 균열경우 Case 16이외의 경우, 크기로차예측오차는 1.1%~13.1%범위를 보였다.

#### 4. 요약 및 결론

본 논문에서는 고유진동수를 사용하여 균열의 위치와 크기를 발견하는 비파괴 균열발견모델을 제시하고 Euler-Bernoulli보를 대상으로 이 모델의 적합성과 적용성을 검증하였다. 연구목표 달성을 위해 다음의 두 단계가 수행되었다. 첫째, 구조물의 진동모드민감도와 고유진동수의 변화를 사용하는 균열위치예측모델과 균열크기로차예측모델로 이루어진 균열발견체계가 유도되었다. 균열위치예측모델은 모드민감도와 고유진동수 사이의 선형적인 관계로 부터 간접적으로 해를 구하는 방법으로 유도되었다. 또한 균열크기로차예측모델은 Euler-Bernoulli 보 모델로 그 범위를 국한하였으며, 균열발생에 의한 변형에너지의 손실을

진동특성치의 변화와 비교하는 동역학적 파괴역학적인 방법으로 부터 유도되었다. 다음으로, 양단 자유보를 대상으로 균열위치와 균열크기를 예측하므로써 균열발견모델의 적합성과 적용성을 실험적으로 검토하였는데, Silva와 Gomes<sup>13)</sup>에 의해 기존에 발표된 16개의 균열보에 대한 진동모드실험 결과가 사용되었다.

균열발견모델로 부터 16개 균열보의 각각의 경우에 대하여 균열위치 및 균열크기가 예측되었으며 다음과 같이 분석되었다. 첫째, 소수의 균열경우를 제외하고는 균열위치예측 결과의 예측오차범위가 0.1%~2.1%(보 길이720mm중 0.71mm~15.1mm)로서 높은 정확도를 보였다. 모든 균열시나리오에서 균열은 보 중앙을 중심으로 대칭인 두개의 위치에서 예측되었다. 이는 균열위치예측을 위해 계측된 고유진동수와 수치해석된 모드형상이 사용되었기 때문인데, 사용된 4개 진동모드민감도가 모두 보 중앙을 중심으로 대칭성을 보이기 때문이다. 둘째, 소수의 균열시나리오를 제외하고는 균열크기로차예측 결과의 예측오차가 1.1%~13.1%(크기로차 1%는 10mm 균열에서 0.1mm 오차)로서 높은 정확도를 보였다. 하지만, 균열깊이가 증가할 수록 균열깊이 추정오차가 커지는 현상은 무차원 균열깊이에 의존하는 형상계수의 비선형적인 관계를 고려하지 못하였기 때문인 것으로 사료된다.

미래의 연구과제로서, 본 연구의 결과를 실험실 규모의 교량 모형과 실물 구조물에 적용하여 균열위치 및 균열크기를 추정하는 실험적 검증연구가 필요하다고 사료된다.

#### 감사의 글

본 논문은 98년도 한국과학재단 핵심연구비(과제번호 981-1201-003-1) 지원에 의한 연구의 일부로서 한국과학재단의 지원에 감사드립니다.

#### 참고 문헌

1. Gudmunson, P., "Eigenfrequency Changes of Structures Due to Cracks, Notches or

- Other Geometrical Changes", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 30, No. 5, 1982, pp.339~353
2. Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J. and Stone, B.J., "A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures", *J. Mech. Engr. Science*, Vol. 20, 1978, pp.93~100
  3. Chen, J., and Garba, J.A., "On-Orbit Damage Assessment for Large Space Structures", *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 9, 1988, pp.1119~1126
  4. Stubbs, N., "A General Theory of Non-Destructive Damage Detection in Structures", *Proc. of 2nd Int. Symposium on Structural Control*, ed. H.H.E. Leipholz, 1987, pp.694~713
  5. Sundermeyer, J. N., and Weaver, R. L., "On Crack Identification and Characterization in a Beam by Nonlinear Vibration Analysis", *TAM Report No. 74*, UILU-ENG-93-604, Univ. of Illinois, 1993
  6. Ostachowicz, W.M. and Krawczuk, M., "Vibration Analysis of a Cracked Beam", *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 2, 1990, pp.245~250
  7. Ricos, P. F., Aspragathos, N., and Dimarogonas, A. D., "Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 3, 1990, pp.381~388
  8. Gounaris, G., and Dimarogonas, A. D., "A Finite Element of A Cracked Prismatic Beam for Structural Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 3, 1988, pp.309~313
  9. Mazurek, D. F., and DeWolf, J. T., "Experimental Study of Bridge Monitoring Technique", *J. of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 116, No. 9, 1990, pp.2532~2549
  10. Kim, J. T., and Stubbs, N., "Model-Uncertainty Impact and Damage-Detection Accuracy in Plate Girder", *J. of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 121, No. 10, 1995, pp.1409~1417
  11. Aktan, A. E., Lee, K. L., Chuntavan, C., and Aksel, T., "Model Testing for Structural Identification and Condition Assessment of Constructed Facilities", *Proc. of 12th Int. Modal Analysis Conference*, Vol. 1, 1994, pp.462~468
  12. Stubbs, N., and Kim, J. T., and Topole, K. G., "The Effect of Model Uncertainty on the Accuracy of Global Nondestructive Damage Detection in Structures", *Proc. of Computational Stochastic Mechanics*, eds. P. D. Spanos and C.A. Brebbia, Elsevier Applied Science, 1991, pp.157~168
  13. Silva, J. M., and Gomes, A. J. M., "Experimental Dynamic Analysis of Cracked Free-free Beams", *Experimental Mechanics*, Vol. 20, No. 3, 1990, pp.20~25
  14. ABAQUS Version 5.7 User Manual, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1998  
(접수일자 : 1999. 1. 25)