

# 단축하중을 받는 이방성체내 균열의 진전

## Crack Extension in Anisotropic Solids Subjected to Uniaxial Load

임 원 균\*  
Lim, Won-Kyun

최 승 룡\*\*  
Choi, Seung-Yong

안 현 수\*\*  
An, Hyun-Soo

### 요 지

이방성체의 평면내 직선균열에 대한 균열선단부근의 응력과 변위의 분포는 어떠한 균열체의 형상 및 하중 조건에 대해서도 응력확대계수라는 하나의 매개변수로서 나타낼 수 있다고 하는 것이 파괴역학에서 보편화되어 있다. 그러나 많은 경우에 있어서 급수전개식의 이어지는 항은 정량적으로 중요하다. 따라서 본 연구에서는 이러한 항을 유도하고 이것이 균열진전방향에 미치는 영향에 대하여 검토하였다. 이를 위하여 단축하중을 받는 직방성균열체의 해석을 수행하며 재료는 균질이방성체라고 가정하였다. 급수전개식에서 2차항의 영향을 고려하기 위하여 균열선단에서의 응력의 분포를 재해석하였으며, 2차항의 사용은 정확한 균열진전방향의 결정을 위해서 매우 중요함을 보였다. 초기균열진전각도의 결정을 위해서 수직응력비이론을 적용하였다.

핵심용어 : 균열진전방향, 이방성체, 단축하중, 균열선단, 2차항, 응력확대계수

### Abstract

It is generally accepted in fracture mechanics that the elastic stresses and displacements near a crack tip in anisotropic solids can be approximated with sufficient accuracy by a one-parameter representation. In many cases, however subsequent terms of the series expansion are quantitatively significant, and so the evaluation of such terms and their effect on the predicted crack growth direction are considered. For this purpose the problem of a cracked orthotropic plate subject to a uniaxial load was analysed. It was assumed that the material is ideal homogeneous anisotropic solid. By considering the effect of the second order term of the series expansion, the distribution of stresses and displacements at the crack tip was reanalyzed. The use of second term was shown to be essential for the accurate determination of crack growth direction. In order to determine values for the angle of initial crack extension the normal stress ratio criterion was employed.

*Keywords* : crack growth direction, anisotropic solids, uniaxial load, crack tip, second order term, stress intensity factor

## 1. 서 론

복합재료를 이용한 구조물의 사용이 증가함에

따라 이들 재료의 경제적, 기술적인 문제가 매우 중요하게 되었다. 이로부터 이방성재료의 파손 및 균열의 해석에 많은 관심이 집중되고 있다.

\* 정회원·명지대학교 기계공학과, 교수  
\*\* 명지대학교 기계공학과, 대학원

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이러한 이방성재료내 균열의 파손 및 해석에서는 등방성체 균열해석에서 사용된 선형탄성파괴역학의 개념이 도입되었고, Sih 등<sup>1)</sup>은 이들 재료내 균열선단에서의 응력 및 변위장에서는  $1/\sqrt{r}$ 의 특이성이 나타남을 보였다.

일반적으로 이방성재료에서의 응력과 재료강도의 함수들은 매우 복잡하여 균열이 전파하는 방향과 하중을 결정하는 일은 해석적으로 매우 복잡하다. 따라서 이방성재료의 응력장해석이 오래전에 이루어졌다는 사실에 불구하고 이방성체내의 균열진전에 대한 연구는 많지 않으며 현재 소수의 파괴기준 만이 제안되어졌을 뿐이다<sup>2)~4)</sup>.

더욱이 이들의 해석에서는 응력확대계수가 주요 상관정수로서 유효하게 사용되고 있으며 이들 정수만을 이용한 이방성재료내 균열전파의 해석이 대부분을 차지하고 있다. 이와 같은 해석에 대한 균열체의 크기 또는 형상 그리고 경계에서의 하중조건에 불구하고 이러한 해석이 유효하다는 것이 이방성체 균열문제의 해석에서 보편적인 것으로 받아들여지고 있다

이와 같은 복합재료를 설계하는데 있어서 이들 균열에 의하여 유발되는 균열주위의 분포응력을 정확히 아는 것이 중요하며, 더욱이 균열선단부근에서의 응력성분을 기초로 만들어진 균열진전 이론 역시 이의 영향을 받게 된다.

본 연구에서는 일찍이 논의되지 않았던 이방성체내 예리한 균열선단부근의 탄성응력의 특성을 이론적으로 재검토하여 균열선단주위의 응력성분의 제2차항인 비특이항을 유도함으로써 이방성재료내 균열의 진전방향을 보다 정확히 예측할 수 있는 새로운 방법을 제시하는데 있다. 이를 위하여 직방성 균열체의 원방에서 단축하중을 받는 무한평판내의 수평균열에 대하여 해석을 수행한다. 아울러 이방성재료의 특성치가 균열진전방향에 미치는 영향에 대해서도 검토하고자 한다.

## 2. 균질이방성재료의 기초 방정식

이방성재료를 거시적으로 보아 균질 이방성탄성체라고 생각할 때에 2차원 평면응력 상태의 경우 Hooke의 법칙은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기에서  $a_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 는 콤플라이언스계수이다.

2차원 이방성체의 적합방정식은 등방성체와 마찬가지로 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

따라서 식(1)를 식(2)에 대입함으로써 다음과 같은 이방성재료의 특성지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + a_{12} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right] \\ & - a_{16} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \right] + a_{22} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} \\ & - a_{26} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \right] - a_{66} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 상기식을 간단하게 하기 위하여 Airy의 응력함수  $U(x, y)$ 를 도입하고 평형방정식을 만족시키는 이의 응력성분들을 식(4)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2}, \quad \tau_{yy} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

이때 식(4)를 식(3)에 대입함으로써 다음과 같이 응력함수로 나타낸 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

평면탄성문제에서 식(5)의 일반식은 다음과 같은 복소변수의 항으로 나타낼 수 있다<sup>5)</sup>.

$$U(x, y) = 2\text{Re}[U_1(z_1) + U_2(z_2)] \quad (6)$$

여기에서  $\text{Re}[\ ]$ 는 괄호안 복소수 값의 실수부를 나타낸다. 그리고  $U_1(z_1)$ 과  $U_2(z_2)$ 는 복소변수  $z_1 = x + s_1y$ 과  $z_2 = x + s_2y$ 의 함수이며,  $s_1, s_2$ 는 다음의 특성방정식의 근이다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (7)$$

식(6)에서 응력함수  $U_j(z_j)$  ( $j=1, 2$ )의 첨자변환을 피하기 위하여 다음과 같은 새로운 해석함수  $\phi(z_1)$ 과  $\psi(z_2)$ 를 도입한다.

$$\phi(z_1) = \frac{dU_1(z_1)}{dz_1}, \quad \psi'(z_2) = \frac{d\psi(z_2)}{dz_2} \quad (8)$$

식(6)과 식(8)을 식(4)에 대입하면 다음과 같이  $\phi(z_1)$ 과  $\psi(z_2)$ 로 표시된 응력성분식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\text{Re}[s_1^2\phi'(z_1) + s_2^2\psi'(z_2)] \\ \sigma_{yy} &= 2\text{Re}[\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re}[s_1\phi'(z_1) + s_2\psi'(z_2)] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\phi'(z_1)$ 과  $\psi'(z_2)$ 는 해석함수  $\phi(z_1)$ 와  $\psi(z_2)$ 를 각각  $z_1$ 과  $z_2$ 에 대하여 미분한 것으로서 이는 다음과 같다.

$$\phi'(z_1) = \frac{d\phi(z_1)}{dz_1}, \quad \psi'(z_2) = \frac{d\psi(z_2)}{dz_2} \quad (10)$$

한편 탄성대칭인 직교이방성체의 경우에는  $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식(7)은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$a_{11}s^4 + (2a_{12} + a_{66})s^2 + a_{22} = 0 \quad (11)$$

이때 특성방정식인 식(11)의 근은 다음과 같이 된다.

$$s_1 = \sqrt{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}} = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}} = \alpha_2 + i\beta_2 \quad (12)$$

여기서  $\alpha_0 = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}$ ,  $\beta_0 = \frac{E_{11}}{2\mu_{12}} - \nu_{12}$ ,  $\alpha_0 > \beta_0$  이다.

### 3. 단축하중을 받는 이방성재료내 수평균열의 해석해

직교이방성체내 탄성대칭축에  $n$ 개의 불연속선 또는 균열이 평면대칭하중을 받는 경우의 해석함수는 Riemann-Hilbert 문제 즉, 복소함수이론에서의 경계치 문제의 해를 적용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>6)</sup>.

$$\begin{aligned} \left(\frac{s_2 - s_1}{s_2}\right)\phi'(z_1) &= \frac{p}{2(z_1^2 - a^2)^{1/2}}[z_1 - (z_1^2 - a^2)^{1/2}] \\ \left(\frac{s_1 - s_2}{s_1}\right)\psi'(z_2) &= \frac{p}{2(z_2^2 - a^2)^{1/2}}[z_2 - (z_2^2 - a^2)^{1/2}] \end{aligned} \quad (13)$$

상기식은 평면대칭하중을 받는 이방성체 균열문제에서 보편적으로 사용되는 해석함수로서 이방성재료내 균열선단으로부터 반경  $r$ 의 영(零)차수인 비특이항 산출에 영향을 미치는 중요한 인자들을 모두 무시하고 있다.

비특이항이 포함된 해석함수의 유도를 위하여 Fig. 1과 같이 타원공을 내포한 무한이방성평판을 생각하여 보자. 주응력의 주축  $N_1$ 과  $x$ 축 사이의 경사각  $\alpha$ 로 하중이 작용할 때 타원공선단에서의 해석함수는 Savin<sup>7)</sup>에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi^{(\alpha)}(z_1) &= \phi_0^{(\alpha)}(z_1) + B^{*(\alpha)} z_1 \\ \psi^{(\alpha)}(z_2) &= \phi_0^{(\alpha)}(z_2) + [B'^{*(\alpha)} + iC''^{(\alpha)}]z_2 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\phi_0^{(\alpha)}(z_1)$ ,  $\phi_0^{(\alpha)}(z_2)$ ,  $B'^{*(\alpha)}$ ,  $C''^{(\alpha)}$ 는 각각 다음과 같다.

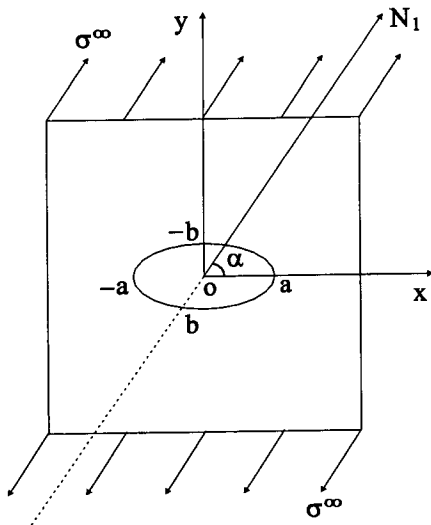


Fig. 1 Anisotropic plate with an elliptical hole under tension

$$\phi_0(z_1) = -\frac{i\sigma^\infty(a-is_1b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{i2as_2}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2b^2)}} \right\}$$

$$\phi_0(z_2) = \frac{i\sigma^\infty(a-is_2b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{i2as_1}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2b^2)}} \right\}$$

$$B^* = \frac{\sigma^\infty(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}$$

$$B^{**} = \frac{\sigma^\infty[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - 2\alpha_1\alpha_2]}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}$$

$$C^{**} = \frac{\sigma^\infty[\alpha_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2)]}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}$$

그러므로 Fig. 2와 같이 수평균열을 내포한 무한 평판에 y축으로의 수직하중을 받고 있는 균열문제의 해석함수식은 식 (15)에서 타원의 단축인 b를 0으로 취함으로써 유도할 수 있으며, 이들을 정리하면 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$\phi^{(a)}(z_1) = -\frac{i\sigma^\infty(a-is_1b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{b(s_2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2b^2)}} + \frac{ia(2s_2\sin^2\alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2b^2)}} \right\}$$

$$B^{*(a)} = \sigma^\infty \frac{\cos^2\alpha + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\sin^2\alpha + \alpha_2\sin 2\alpha}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}$$

$$B^{**(a)} = \sigma^\infty \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - 2\alpha_1\alpha_2]\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \alpha_2\sin 2\alpha}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}$$

$$C^{**(a)} = \sigma^\infty \left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\cos^2\alpha + [\alpha_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2)]\sin^2\alpha}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} + \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - (\alpha_2^2 - \beta_2^2)]\sin\alpha\cos\alpha}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\}$$

상기식에서  $\alpha_j, \beta_j$ 는 특성방정식의 실수부와 허수부로서 모두 상수값을 가진다 ( $j=1, 2$ ). 그럼에서 경사각  $\alpha = \pi/2$ 인 경우 즉, 원방에서 주응력  $\sigma^\infty$ 가 주축  $N_1$ 과 수직방향으로 주어지는 경우에 타원공 선단의 해석함수는 다음과 같이 된다.

$$\phi(z_1) = \phi_0(z_1) + B^*z_1$$

$$\phi(z_2) = \phi_0(z_2) + [B^{**} + iC^{**}]z_2 \quad (15)$$

여기에서  $\phi_0(z_1), \phi_0(z_2), B^*, B^{**}, C^{**}$ 는 각각 다음과 같다

$$\phi(z_1) = \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1-s_2)} [z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2}] + \Gamma_1 z_1$$

$$\phi(z_2) = -\frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} [z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2}] + \Gamma_2 z_2 \quad (16)$$

여기서  $\Gamma_1 = B^*, \Gamma_2 = (B^{**} + iC^{**})$ 이다.

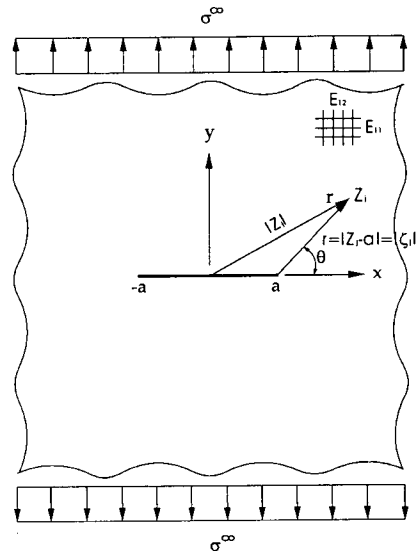


Fig. 2 Uniaxially loaded flat-crack geometry

단축하중을 받는 이방성재료내 수평균열에 대하여 앞서의 과정을 통하여 유도된 해석함수식에서 알 수 있듯이 이들 식에는 부가항인  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 의 성분을 내포하고 있다. 이들은 원방에서 작용하는 수직응력 및 재료의 특성치들과 연관되어 있는 값들이다.

#### 4. 비특이항을 포함한 균열선단에서의 응력성분

균열선단지역만을 집중적으로 나타내도록 하기 위하여 Fig. 2에서와 같은 균열선단에서 시작하는 새로운 좌표  $\zeta$ 를 도입한다.

$$z_j - a = \zeta_j = r(\cos\theta + s_j \sin\theta)$$

$$z_j = x + s_j y \tag{17}$$

따라서 식(16)의 해석함수와 이의 미분식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_1) &= \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} [(\zeta_1 + a) \\ &\quad - \sqrt{\zeta_1^2 + 2a\zeta_1}] + \Gamma_1(\zeta_1) + a \\ \phi(\zeta_2) &= \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} [(\zeta_2 + a) \\ &\quad - \sqrt{\zeta_2^2 + 2a\zeta_2}] + \Gamma_1(\zeta_2 + a) \\ \phi'(\zeta_1) &= \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} \left[ 1 - \frac{\zeta_1 + a}{\sqrt{\zeta_1^2 + 2a\zeta_1}} \right] + \Gamma_1 \\ \phi'(\zeta_2) &= \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)} \left[ 1 - \frac{\zeta_2 + a}{\sqrt{\zeta_2^2 + 2a\zeta_2}} \right] + \Gamma_2 \end{aligned} \tag{18}$$

먼저 균열선단부근에서의 응력성분을 얻기 위하여 식(18)에서  $\phi'(\zeta_1)$ ,  $\phi'(\zeta_2)$ 의 우측 괄호안 둘째항에 대한 급수전개가 필요하다. 따라서 이를 수행하고 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi'(\zeta_1) &= -\frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{\zeta_1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \left( \frac{\zeta_1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{32} \left( \frac{\zeta_1}{a} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right] \right\} + \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} + \Gamma_1 \\ \phi'(\zeta_2) &= \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{\zeta_2}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \left( \frac{\zeta_2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{32} \left( \frac{\zeta_2}{a} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right] \right\} - \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)} + \Gamma_2 \end{aligned} \tag{19}$$

상기식에서 균열선단의 특이항인  $\zeta_j^{-1/2}$ 과 복소변수와 무관한  $\zeta_j^2$ 인 비특이항만을 남겨두고 나머지 고차항들을 무시하면 해석함수의 미분식은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi'(\zeta_1) &\cong -\frac{\sigma^\infty s_2}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \left[ \left( \frac{\zeta_1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} + \Gamma_1 \\ \phi'(\zeta_2) &\cong \frac{\sigma^\infty s_1}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \left[ \left( \frac{\zeta_2}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)} + \Gamma_2 \end{aligned} \tag{20}$$

따라서 상기해석함수식들을 식(9)에 대입함으로써 다음과 같은 비특이항을 포함한 균열선단부근에서의 응력분포식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{s_2}{\sqrt{\cos\theta + s_2 \sin\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{s_1}{\sqrt{\cos\theta + s_1 \sin\theta}} \right) \right] + \sigma^\infty \operatorname{Re}[s_1 s_2] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{s_1}{\sqrt{\cos\theta + s_2 \sin\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{s_2}{\sqrt{\cos\theta + s_1 \sin\theta}} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + s_1 \sin\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + s_2 \sin\theta}} \right) \right] \end{aligned} \tag{21}$$

여기서  $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ 이다.

### 5. 초기균열진전각에 비특이항의 영향

이방성재료내 균열선단주위의 응력식에서 비특이항의 영향을 분석하기 위해서 균열의 형상과 작용하중이 서로 대칭인 Fig. 2와 같은 단축하중을 받는 수평균열에서의 응력의 분포와 초기균열진전각도를 예측하여 보았다. 이를 위하여 수직 응력비이론을 적용하였다. 이 기준은 등방성체의 최대원주응력비이론을 이방성체로의 적용을 위하여 수정된 것으로서 Buczek과 Herakovich<sup>2)</sup>에 의하여 제안되었으며 균열진전방향은 원주응력  $\sigma_{\theta\theta}$ 를 이방성체의 강도함수  $T_{\theta\theta}$ 로 무차원화한 수직 응력비  $R_0$ 가 최대가 되는 방향으로 균열의 진전이 일어난다고 가정한다. 즉, 이 기준은 균열선단으로부터 미소거리  $r_0$  ( $0 < r_0 \ll 1$ )에서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$R_0(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{T_{\theta\theta}}, \quad \left[ \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \right]_{r_0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial^2 R_0}{\partial \theta^2} \right]_{r_0} < 0 \quad (22)$$

윗식에서  $T_{\theta\theta}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T_{\theta\theta} = X_T \sin^2 \theta + Y_T \cos^2 \theta \quad (23)$$

여기에서  $X_T$ 와  $Y_T$ 는 이방성체의 축방향 및 횡방향 인장강도를 나타낸다.

한편 원주응력은 직각좌표계의 응력성분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (24)$$

따라서 상기식에 직각좌표계로 표시된 수평균열주위의 응력성분인 식 (21)을 대입하면 다음과 같은 비특이항이 포함된 원주응력식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} [s_1 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{3/2} - s_2 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{3/2}] + \sigma^\infty \operatorname{Re} [s_1 s_2] \sin^2 \theta \right] \quad (25)$$

따라서 식 (23)과 (25)를 식 (22)에 대입함으로써 초기균열진전각  $\theta_0$ 는 다음의 식에서 최대값을 만족하도록 하는 각도를 구하는 것이 된다.

$$\operatorname{Max} \frac{\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} [s_1 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{3/2} - s_2 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{3/2}] + \operatorname{Re} [s_1 s_2] \sin^2 \theta \right] \right]}{\sin^2 \theta + \frac{Y_T}{X_T} \cos^2 \theta} \quad (26)$$

이방성재료의 특성치에 따른 균열주위의 원주응력분포를 Fig. 3과 4에 나타내었다. 이때  $r_0/a = 0.01$ 로 하고,  $\beta_0 = 1.0$ 으로 일정하게 놓았다.

먼저 Fig. 3은 이방성재료축축의 탄성계수비  $\alpha_0$ 를 1부터 5까지 변화시켜 가며 해석한 결과로서 특이응력성분만을 고려하였다. 비록 균열의 형상과 작용하중이 서로 대칭이라 하더라도 이방성재료의 특성치에 따라서 원주응력의 최대값은 균열면과 평행이 아닌 임의의 각도에서 발생할 수 있음을 알 수 있다. 이는  $\alpha_0$ 가 증가함에 따라서 균열선과 더욱 벗어나게 되는데 점진적으로 균열선과 수직한 방향으로 진행한다. Fig. 4에는 비특이응력성분을 포함한 균열주위의 원주응력분포를 나타내었다. 특이응력성분만을 고려한 앞의

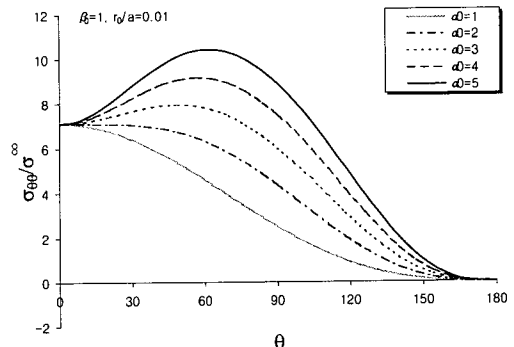


Fig. 3 Variation of  $\sigma_{\theta\theta}$  for one-term approximation

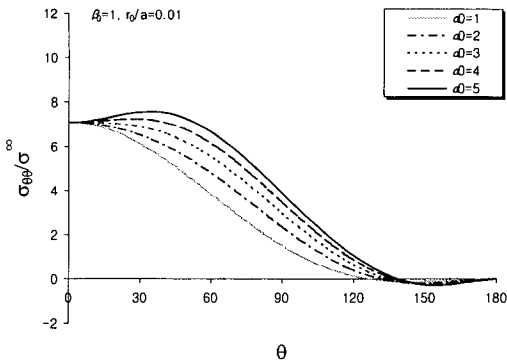


Fig. 4 Variation of  $\sigma_{00}$  for two-term approximation

그림과 비교하여 볼 때 전체적으로 분포곡선의 굴곡이 다소 완만해지는 등 원주응력의 분포에 있어서 비특이항의 영향이 뚜렷이 나타남을 알 수 있다. 동일한 탄성계수비로부터 얻어진 두 곡선들을 비교하여 볼 때 두 곡선의 변화는  $\alpha_0$ 의 값이 커질수록 점점 더 벌어져 있는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 재료의 이방성성질이 뚜렷할수록 원주응력에 미치는 비특이항의 영향은 더욱 커짐을 알 수 있다.

비특이응력성분의 영향을 보다 명확히 나타내기 위해서 재료주축의 탄성계수비와 인장강도비의 값에 따른 초기균열의 진전각도를 특이응력성분만을 고려한 결과와 함께 비교하여 보았다.

먼저 Fig. 5는  $\beta_0=1$ , 재료주축의 인장강도비

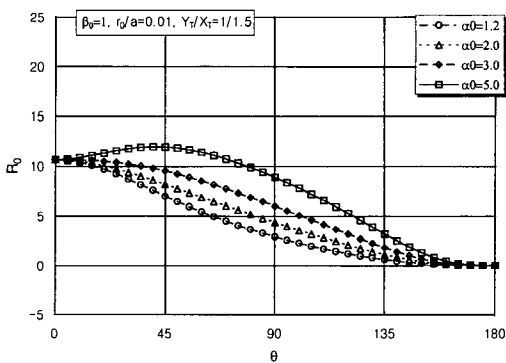


Fig. 5 Variation of  $R_0$  for one-term approximation ( $Y_T/X_T=1/1.5$ )

$Y_T/X_T=1/1.5$ 이고 재료주축의 탄성계수비  $\alpha_0$ 는 1부터 5까지 변화하는 재료특성치를 가지는 이방성체에서  $r_0/a=0.01$ 인 균열주위에서의 수직응력비  $R_0$ 를 나타낸다. 이는 특이응력성분만을 고려하여 해석한 것으로서  $\alpha_0$ 의 값에 따른  $R_0$ 의 최대값은 대부분 각도  $0^\circ$ 에서 발생하고 있으나  $\alpha_0$ 의 값이 커질수록 이의 최대값은 균열선과 평행이 아닌 임의의 각도에서 발생한다. 따라서 초기 균열진전각도 역시  $\alpha_0$ 가 커질수록 균열선과 경사진 각도에서 일어나게 된다. Fig. 6에서는 비특이응력성분까지를 포함하여 해석한 결과를 나타내었다. 전체적으로  $R_0$ 의 최대값은  $0^\circ$ 에서 나타남을 알 수 있다. 특이응력성분만을 고려한 앞의 해석결과와 비교하여 볼 때 수직응력비의 최대값은  $\alpha_0$ 의 값이 작으면 비특이항과 특이항 해석 모두 각도  $0^\circ$ 에서 나타나고 있으나  $\alpha_0$ 의 값이 커질수록 특이항 해석에서는 임의의 각도에서 나타나기 시작한다. 따라서 초기균열의 진전방향 역시 큰 차이를 나타내는데 예를 들어  $\alpha_0=4$ 의 값을 가지는 경우 특이항 해석으로부터 얻은 균열의 진전각도는 균열선과 약  $31.2^\circ$ 경사진 면에서 일어나며 비특이항 해석에서는  $0^\circ$ 에서 일어난다. 이와 같이 이방성재료에서의 균열의 진전각도는 비특이항의 존재에 큰 영향을 받고 있음을 알 수 있다. Fig. 7과 8은 재료주축의 인장강도비  $Y_T/X_T=1/2$ 인 경우로 각각 특이항과 비특이항까지를 고려한 해석결과이다. 대부분에서  $R_0$ 의 최대

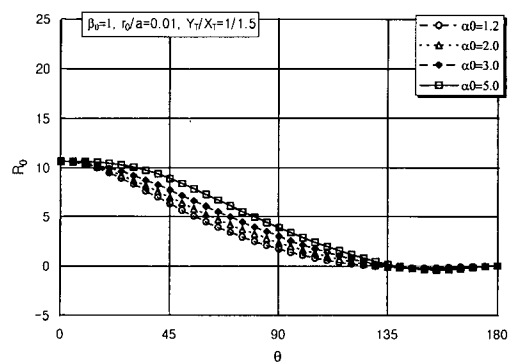


Fig. 6 Variation of  $R_0$  for two-term approximation ( $Y_T/X_T=1/1.5$ )

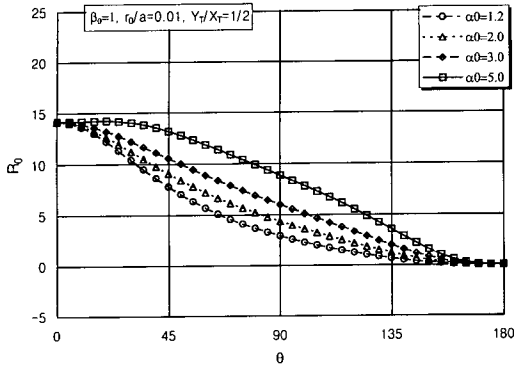


Fig. 7 Variation of  $R_0$  for one-term approximation ( $Y_T/X_T=1/2$ )

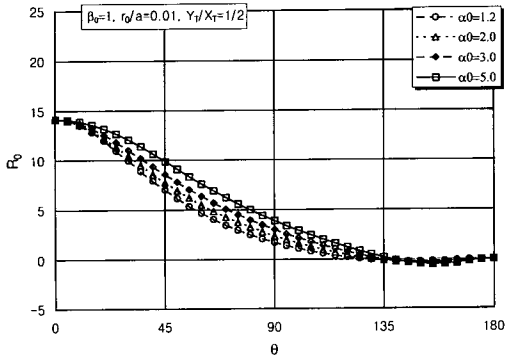


Fig. 8 Variation of  $R_0$  for two-term approximation ( $Y_T/X_T=1/2$ )

치가 발생하는 각도에는 변함이 없으나 특이응력 성분만을 고려한  $\alpha_0=5$ 의 값에서는 이의 최대치가 임의의 각도에서 나타나기 시작한다. 이방성체가 동일한 탄성계수비를 가지고 있다하더라도 재료주축인장강도의 차이가 커질수록 균열진전에 미치는 비특이항의 영향은 점차 작아짐을 알 수 있다. Table 1과 2에는 이방성재료의 특성치에 따른 초기균열진전각도의 변화에 있어서 특이항 및 비특이항 까지를 고려한 해석결과를 나타내었다.

이와 같이 직교이방성재료내 균열주위에서의 원주인장응력분포와 초기균열진전각도는 비특이항의 존재에 따라서 크게 변화함을 알 수 있

Table 1 Crack growth direction in anisotropic solids. ( $Y_T/X_T=1/1.5$ ,  $\beta_0=1$ )

$\alpha_0$	Propagation angle $\theta_0$	
	one-term	two-term
1.2	0°	0°
2.0	0°	0°
3.0	0°	0°
4.0	31.2°	0°
5.0	40.9°	0°

Table 2 Crack growth direction in anisotropic solids. ( $Y_T/X_T=1/2$ ,  $\beta_0=1$ )

$\alpha_0$	Propagation angle $\theta_0$	
	one-term	two-term
1.2	0°	0°
2.0	0°	0°
3.0	0°	0°
4.0	0°	0°
5.0	18.6°	0°

다. 따라서 이방성재료내 균열선단주위의 응력식에서 비특이항의 무시는 균열문제의 해석에서 큰 오류를 유발할 수 있다.

## 6. 결 론

일반적으로 평면대칭하중을 받는 이방성재료내 직선균열 문제의 해석에서 응력확대계수라는 하나의 특이매개변수만을 이용한 해석이 대부분으로 현재 이의 사용은 보편화 되어 있다. 본 연구에서는 직방성재료내 초기균열진전의 해석에 있어서 균열선단주위의 응력의 급수전개식에서 2차항인 비특이항의 영향을 분석하였다. 이를 위하여 단축하중을 받는 무한평판내의 수평균열에 대하여 해석을 수행하였다. 비특이항이 포함된 해석함수를 유도하여 비특이항이 내포된 균열선단주위의 원주응력분포를 산출하였으며 수직응력비이론을 이용한 균열진전각도의 예측에 있어서 보다 정확한 진전각도의 결정을 위해서는 비특이항의 사용이 매우 중요함을 확인하였다. 이러한 비특이항의 영향은 등방성재료에서보다도



이방성재료내 균열문제의 해석에서 더욱 크게 나타남을 알 수 있었다.

### 감사의 글

본 논문은 1998년도 명지대학교 교내연구비 지원에 의하여 이루어졌습니다. 도움을 주신 학교당국 및 관계자여러분들께 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

1. Sih, G. C., Cracks in Materials Possessing Homogeneous Anisotropy, in *Cracks in Composite Materials* (Edited by G. C. Sih) Martinus Nijhoff, Hague, 1981
2. Buczek, M. B. and Herakovich, C. T., "A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials", *J. Compos. Mater.*, Vol.19, 1985, pp.544~553
3. Ayari, M. L. and Ye, Z., "Maximum Stress Theory for Mixed Mode Crack Propagation in Anisotropic Solids", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.52, 1995, pp.389~400
4. Kadi, H. EL. and Ellyin, F., "Crack Extension in Unidirectional Composite Laminate", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.51, 1995, pp.27~36
5. Lekhniskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day, Sanfrancisco, 1963
6. Sih, G. C. and Liebowitz, H., Mathematical Theories of Brittle Fracture, in *Fracture Mechanics* Vol.II(H. Liebowitz ed.), Academic Press, NewYork, 1968, pp.108~130
7. Savin, G. N., *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, Oxford, 1961  
(접수일자 : 1999. 1. 27)