

면내 회전을 갖는 SPLINE 유한대판 요소에 의한 쉘의 해석

Analysis of Shell Using the Spline Finite Strip with Drilling DOF

최 창 근*
Choi, Chang-Koon

홍 현 석**
Hong, Hyun-Seok

요 지

본 연구에서는 새로운 spline 유한대판 요소를 제안하였다. 제안된 정식화는 등매개 개념에 의해 기하학적 형상과 변위장을 가정함에 있어 길이방향은 3차의 B-spline곡선으로, 횡방향에 대해서는 Lagrange 다항식에 의해 표현된다. 이 논문은 평판과 쉘해석에 있어서의 등매개 spline 유한대판 요소의 개선에 목적을 두고 있다. 이 새로운 요소는 스트립의 내부 절점에서 6개의 자유도를 갖는 합-응력 감절점 쉘 요소로부터 유도하였다. 스트립의 기하학적 형상은 강제 회전에 대한 정의에 위배되지 않고도 두께 방향을 따라 Jacobian이 일정하다는 가정을 따랐으며 고체역학에서 정의되는 면내 회전을 penalty 함수에 의한 구속조건으로 간주하여 면내 회전에 관계된 자유도를 생성하였다. 제안된 요소에 대하여 쉘의 전형적인 문제에 대한 수치예제를 보였으며 이 스트립 요소의 성능을 평가하였다.

핵심용어 : 등매개 spline 유한대판법, 합-응력 감절점 쉘, 면내 회전 자유도

Abstract

The new spline finite strip element for plates and shells is presented. Because the present formulation adopts the isoparametric concept, both the geometry and the displacement field are represented by the uniform cubic B-spline curves along the length while the Lagrange polynomials used transversely. This paper attempts to improve the isoparametric spline finite strip element to be used for the plates and shells. This new strip element is derived from the stress-resultant shell with 6 DOF at each interior node. The geometry of the strip is defined in a manner which would allow the Jacobian to be assumed constant through the thickness without violating the rigid body rotation criterion, and the drilling degree of freedom are incorporated by constraining the true continuum mechanics definition of rotation by penalty function method. Numerical examples with the present method on several benchmark problems are presented that illustrate the performance of the proposed strip elements.

Keywords : isoparametric spline finite strip element, stress-resultant degenerated shell, drilling degree of freedom

* 정희원 · 한국과학기술원 토목공학과, 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

유한대판법 (finite strip method)은 구조물이 한 방향으로 재료성질과 기하학적 성질이 일정한 경우, 그 방향에 대하여는 요소를 세분화하지 않고 하나의 요소(strip)만을 사용하여 해석하는 방법으로 주로 한쪽 방향(이하에서는 종 방향으로 표현)이 상대적으로 긴 절판구조 및 박스 거더 교량 해석 등에 널리 사용되었다. 초기의 고전적인 방법에서는 변위함수를 가정함에 있어 종방향으로는 경계조건을 미리 만족시키는 함수의 급수(주로 보 진동함수)를 사용하고 다른 방향(횡방향)으로는 유한요소에서와 같이 다항식을 사용하였다^{1),2)}. 이러한 초기의 유한대판법은 급수함수의 직교성에 의하여 단지 다항식과 관계된 항만으로 강성행렬을 구성할 수가 있기 때문에 반-해석적인 방법으로 불린다. 이 방법의 가장 큰 장점은 횡방향의 각 절점과 관계된 종방향의 변위가 급수함수에 의해 연속적으로 표현이 가능하다는데 있다. 그러나 이 방법은 스트립(strip)의 양단에서만 경계조건이 주어져야 하고 또한 이 경계조건을 미리 만족시키는 함수를 가정하여야 하기 때문에 '단순' 혹은 '고정'과 같은 특수한 경우로 제한되는 결정적인 단점을 가지고 있었다. 따라서 기본적인 장점에도 불구하고 일반적인 구조물을 해석하는 방법으로는 발전하지 못하였다.

1980년대 중반에 소개된 Spline 유한대판법은 스트립의 종방향 변위장을 보 진동함수 대신에 연속적인 spline 함수의 보간을 이용하여 가정함으로써 유한요소법과 같이 각 절점에서 경계조건을 부여할 수 있게 되었으며 임의의 형상을 갖는 구조물의 해석도 가능하게 되었다³⁾. 또한 이 방법은 고전적인 유한대판법과 마찬가지로 종방향의 절선을 따라서 연속적인 변위의 표현이 가능하다. 해의 정확도에 있어서는 반-해석적인 방법이 조화급수의 수가 많아짐에 따라 정확도가 증가되는데 비하여, 이 방법에서는 B3-spline과 관계된 내부 절점이 존재하게 되며 따라서 보간되어 지는 내부 절점의 수가 많아짐에 따라 해의 정확도가 향상된다.

초기의 Spline 유한대판법에 의한 쉘의 해석은 주로 평면 쉘과 고전적인 쉘 이론에 의한 해석이

대부분이었고 단지 spline 유한대판법의 적용 가능성을 보여주고 있을 뿐이고 실제 실용적인 문제 해결을 위한 노력은 크게 이루어 지지 않았다. 근래에 와서 이러한 spline 유한대판법이 등매개변수 방법에 의해 변위장 뿐만 아니라 구조물의 기하학적 형상도 spline 함수에 의해 근사화 함으로써 Mindlin 평판과 감절점 쉘의 해석에 적용할 수 있게 되었다^{4),5)}.

일반적으로 사용되는 감절점 쉘 (Degenerated Shell) 요소는 각 절점에서 3개의 직선변위에 대한 자유도와 절점에 수직인 2개의 회전에 관계된 자유도만을 갖는다. 이때, 회전은 중립면에서의 기울기로 정의하지 않고 직선 변위와 같은 형상함수를 사용하여 정의 함으로써 전단변형의 영향을 고려할 수 있다. 즉, 전단 변형률은 이 변위 미분치와 회전변위의 함으로써 정의된다^{6),7)}. 그러나 실제로 얇은 평판 또는 쉘의 경우에는 전단 변형의 영향이 거의 발생하지 않아야 함에도 불구하고 Mindlin 평판과 감절점 쉘 요소는 전단 변형률의 영향이 완전히 제거되지 않으므로 인해 전단 강성행렬이 과대하게 평가되는 소위 전단 변형구속 (Shear Locking)이 발생하게 된다. 또한 얇은 쉘의 경우는 곡률의 영향에 의하여 면내 변형률과 휨 변형률간의 연성 (coupling)이 발생하게 되며 이로 인해 두 변형률 간의 차수가 달리 평가되기 때문에 발생하는 막 변형구속 (Membrane Locking) 현상도 발생하게 된다^{8),9)}.

일반적인 등방성 재료인 경우에는 면내 변형률과 전단 변형률 사이에 서로 연성이 존재하지 않기 때문에 전단 변형률에 관계된 강성행렬을 독립적으로 구성할 수가 있다. 따라서 평판에서와 같이 전단과 관계된 강성행렬의 적분차수를 줄이거나 새로운 변형률장을 가정하는 방법, 비적합 모드를 추가하는 방법 등에 의해서 효과적으로 전단 변형구속 현상을 제거할 수 있다^{10)~13)}. 그러나 감절점 쉘의 경우는 면내 변형률이 막 변형률과 휨 변형률의 함으로 이루어지기 때문에 막 변형률과 휨 변형률간의 연성이 존재하게 되며 이로 인하여 막 변형률만을 독립적으로 고려할 수 없다. 만약 얇은 쉘의 경우에 각 적분점에서 ζ 에 대한 θ (방향 여현)의 변화를 무시하고 Jacobian이 두께 방향으로 일정하다는 가정을 도

입한다면 쉘의 두께를 따라 통상적인 적분(Explicit Integration)을 미리 수행하여 면내 변형률을 막 변형률 부분과 휨 변형률 부분으로 분리할 수 있다^{10, 14)}. 그러나, Jacobian은 실제로 ζ 의 선형 변화를 포함하고 있으며 이것은 곡률효과를 포함하고 있으므로 Jacobian이 두께 방향으로 일정하다고 가정하면 자체 변형률(self-straining)이 발생하고 비틀린 보와 같은 예제의 경우에는 심각한 오차를 발생시킨다. 따라서 이러한 단점을 극복하기 위하여 쉘 요소의 강성행렬에 막-휨의 연성(Membrane-Bending Coupling)을 도입하여 곡률 효과(curvature effect)를 고려하는 방법들이 제안되었다^{15)~18)}.

한편, 보강된 쉘과 같은 일반적인 범용 해석을 위한 요소를 만들기 위해서 문제가 되는 것 중의 하나는 회전 자유도(Drilling DOF)를 포함하는 것이다. 최근에 이와 관련된 많은 평면 응력 요소들이 성공적으로 개발되었다^{19)~25)} Allman¹⁹⁾은 3-절점 삼각형 요소의 구석 절점의 회전을 2차 함수를 사용하여 그 변의 회전과 연관시켰으며 이 삼각형 요소 4개를 결합하여 4절점 요소를 개발하였다. 이 요소에서는 중앙 절점은 제거되고 여분의 제로 에너지 모드가 발생되지 않았다. 이러한 Allman의 정식화는 Jetteur, Cook, MacNeal 등의 연구자들에 의해 채택되었다. Jetteur²¹⁾은 4절점 Kirchhoff 쉘 요소에서 적합조건을 만족시키기 위하여 요소의 끝단을 따라 평균 변위를 사용하였고 Cook²²⁾과 MacNeal²³⁾ 등은 구석 회전을 가지는 4절점 평면 요소를 개발하기 위하여 내부적으로는 8절점인 요소를 사용하였다. 근래에는 실제 고체 역학으로 정의되는 면내 회전을 Penalty 함수에 의한 제한조건으로 간주하여 면내 회전을 갖는 9절점의 쉘 요소가 개발하였고 실제로 이와 같은 정식화는 많은 연구자들에 의해 채택되어 왔다^{26), 27)}. 이러한 Penalty 함수 정식화는 penalty 제한조건이 무한대인 경우에는 복합 변분 정리(Mixed variational principle)와 등가의 방법임이 증명되었다²⁸⁾.

본 연구에서는 자체 변형률(self-straining)이 요소의 기하학적 정의의 함수이기 때문에 일반적으로 널리 사용되는 감절점 쉘요소의 정식화를 사용하지 않고 자체 변형률(self-straining)을 발생시키

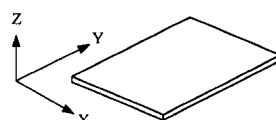
지 않은 정식화를 사용하였다. 또한 일반적인 유한 요소법과 마찬가지로 spline 유한대판법을 절판구조에 적용하기 위해서는 각 절점에서 쉘 이론에 의한 기본적인 5개의 자유도 외에 면내 방향의 자유도가 필요하고 이 자유도에 관계된 강성을 적절히 부여되어야 한다. 따라서 고체 역학에서 정의되는 면내 회전을 penalty 함수에 의한 구속 조건으로 간주하여 면내 회전을 갖도록 하였다.

2. Spline 유한대판법의 특징

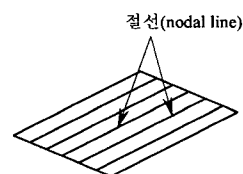
2.1 개요

고전적인 유한대판법은 구조물의 한쪽 방향은 하나의 긴 띠를 갖는 스트립(strip)으로 모델링하고 다른 쪽은 이러한 여러 개의 스트립으로 분할하여 구조물을 해석하는 방법으로 스트립의 절선(nodal line)은 양단에서의 경계조건을 미리 만족시키는 함수를 사용하고 다른 방향은 다항식을 사용하여 구조물의 변위를 근사화 시키게 된다(그림 1(b)). 이러한 유한대판법은 스트립 방향의 변위가 절선을 따라서 연속적인 변위로 표현된다.

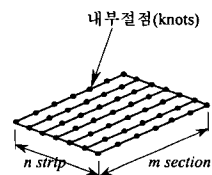
이때, 절선 변위에 대한 보간함수로 B3-spline



(a) 평판 구조물



(b) 고전적 유한 대판 분할



(c) spline 유한 대판(스트립) 분할

그림 1 유한대판법에 의한 분할

함수를 사용하는 것을 spline 유한대판법(Spline Finite Strip Method)이라 부른다. 즉, spline 유한대판법은 절선의 연속적인 변위장을 가정하는데 있어서, 스트립의 절선을 따라서 고차(3차)의 B-spline을 연속적으로 보간한 함수가 사용되며 이때, B-spline함수와 대응되는 매개변수로서 내부절점(knots)이 존재하게 된다. Spline 유한대판법에서 사용되는 이러한 내부절점을 일반적으로 knots point라 정의하며 이것은 유한요소법에서 쓰이는 절점과는 약간은 다른 의미로 사용된다. 즉, spline 유한대판법도 유한요소법과 같이 knots point의 자유도에 대하여 강성행렬이 구성되지만 최종적인 변위는 spline 함수에 의하여 절선의 연속적인 변위를 구하는데 사용되기 때문에 knots point의 변위는 실제 변위가 아니다.

한편, 이러한 B3-spline 함수가 절선의 변위뿐만 아니라 구조물의 기하학적인 형상을 정의하는 경우에도 사용될 수 있으며 이와 같은 방법은 등매개 spline 유한대판법이라 한다⁴⁾. 이때, 스트립 내부의 기하학적 형상은 절선의 형상을 정의하는 곡선집합의 위치벡터(좌표)와 B3-spline함수의 보간에 의해 정의된다(그림 4).

이러한 spline 유한대판법은 고전적인 유한대판법과 마찬가지로 한쪽의 길이가 다른 쪽 길이에 비해 긴 교량구조물에 적합하다. 그것은 길이 방향으로 고차의 형상함수를 사용하기 때문에 길이 방향에 대하여 상대적으로 적은 내부절점을 가지고도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있기 때문이다. 또한 스트립의 내부절점수는 해석대상에 따라 유동적으로 변화하기 때문에 단지 내부절점을 증가시킴에 따라 새로운 모델에 의한 해석이 가능하다. 하지만 스트립의 내부절점수가 많아짐에 따라 하나의 스트립의 강성행렬의 크기가 커지기 때문에 강성행렬을 구성하는데 사용되는 해석시간은 유한요소법에 비해 증가한다.

2.2 변위함수의 Spline보간

3차의 spline은 각 구간에서 3차의 다항식이고 곡선 위의 임의의 점에서 그 곡선의 1차, 2차 미분치가 연속인 곡선을 말한다. 만약 m 개의 3차 곡선들로 이루어진 spline은 $m+1$ 개의 절점으로

이루어지고 $m+3$ 개의 조건이 주어져야만 생성될 수 있다²⁹⁾. 이 3차의 spline이 4개의 구간을 갖고 spline의 양단에서 0의 값을 갖는다면 이러한 곡선을 B3-spline이라 하며 만일 각 구간이 등간격이라면 그림 2와 같은 균등한 등간격의 B3-spline ϕ 를 구할 수 있고 식(1)과 같이 쓸 수 있다. Spline 유한대판법은 그림 1에서 나타낸 것과 같이 스트립의 절선상에 이러한 B3-spline이 보간되어지는 내부절점(knots)이 존재하게 되며 이 내부절점의 변위값은 절선의 연속적인 변위를 표현하는 매개변수로서의 역할을 하게 된다.

$$\phi(s) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0 \\ (s-y_{i-2})^3 \\ h^3+3h^2(s-y_{i-1})+3h(s-y_{i-1})^2-3(s-y_{i-1})^3 \\ h^3+3h^2(y_{i+1}-s)+3h(y_{i+1}-s)^2-3(y_{i+1}-s)^3 \\ (y_{i+2}-s)^3 \\ 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} s &\leq y_{i-2} \\ y_{i-2} &\leq s \leq y_{i-1} \\ y_{i-1} &\leq s \leq y_i \\ y_i &\leq s \leq y_{i+1} \\ y_{i+1} &\leq s \leq y_{i+2} \\ y_{i+2} &\leq s \end{aligned}$$

그림 3(b)는 스트립 절선의 절점 간격이 등간격(h)이고 m 개의 구간을 갖는 하나의 스트립 요소를 보여준다. 이때, 절선의 연속적인 변위는 다음과 같이 절선상의 내부절점(knots)의 변위들로 근사화 시킬 수 있다.

$$\delta = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_{ij}(\xi, \eta) \delta_{ij} \quad (2)$$

여기서, δ_{ij} 는 스트립의 j 번째 절선의 i 번째 내부절점에서의 변위 매개변수이다. 또한, \mathbf{N}_{ij} 는 스트립의 변위에 대한 형상함수로서 구조물의 절선

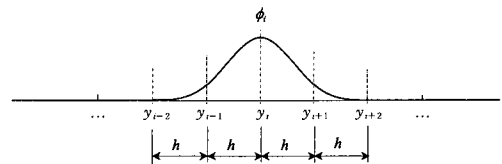
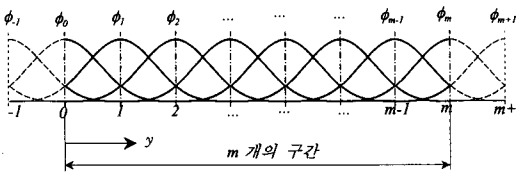
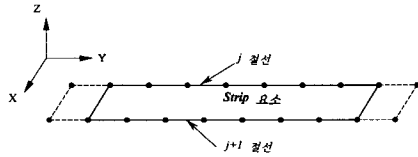


그림 2 등간격의 B3-spline 함수



(a) B3-spline basis



(b) m개의 구간을 갖는 spline 스트립 요소

그림 3 스트립에서 B3-spline의 연속적인 표현

방향에 대한 B3-spline 함수와 다항식의 곱으로 표현할 수 있다.

$$N_{ij}(\xi, \eta) = L_j^i(\xi)\phi_i(\eta)[I] \quad (3)$$

여기서, L_j^i 는 j 번째 절선의 Lagrange 다항식이고 ϕ_i 는 i 번째 절점의 B3-spline이다.

이때, 스트립의 변위는 $-1 \leq \xi \leq 1$ 와 $0 \leq \eta \leq m$ 의 ξ 와 η 에 의해 표현되고, 각 절선의 변위는 그림 3에서와 같이 각 절선에서 $m+3$ 개의 절점으로 보간된다.

2.3 기하학적 형상의 정의

그림 4와 같이 임의의 완만한 곡선이 m 개의 곡선 조각(segment)으로 구성될 때, 이러한 곡선은 $m+3$ 개의 벡터와 $m+3$ 개의 spline의 조합으로 생성할 수 있다. 이때, 만일 사용되는 spline 중 등간격을 갖는 B3-spline을 사용하면 이 곡선을 B3-spline 곡선이라 하며 곡선의 방정식은 다음과 같다.

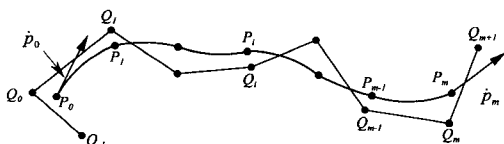


그림 4 등간격의 3차 spline 곡선

$$P(y) = \sum_{i=0}^{m+1} \phi_i(y)Q_i \quad (4)$$

여기서, 각각의 $\phi_i(y)$ 는 앞에서 정의한 바와 같이, 4개의 연속적인 구간에서만 0이 아닌 값을 갖는 등간격의 B3-spline 함수(그림 2)이다. $Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_m, Q_{m+1}$ 은 곡선을 정의하는 벡터로서 다각형 정점의 위치 벡터이며 또한, P_0, \dots, P_m 등은 곡선 절점(knot point)의 위치 벡터들이다. 이때, $m+3$ 개의 벡터 $Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_m, Q_{m+1}$ 들을 구하기 위해서는 $m+1$ 개의 절점의 위치 벡터 P_0, \dots, P_m 과 추가로 2개의 끝 단의 접선벡터 \dot{P}_0 과 \dot{P}_m 가 주어지야만 하며 이 벡터들이 결정되면 각 점(knots)에서의 Q_i 벡터와 그 점에서의 B3-spline ϕ_i 를 서로 조합하여 곡선 $P(y)$ 를 구현할 수 있다²⁹⁾.

만약에 x - y 평면의 임의의 형상을 갖는 평판이 n 개의 스트립(즉, $n+1$ 개의 절선)으로 분할되고 각 스트립은 m 개의 구간(section)으로 구성된다고 하자(그림 1(c)). 이때, 스트립 내부의 임의의 점의 위치벡터 x 는 다음과 같이 근사화 된다.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=1}^n N_{ij}(\xi, \eta)Q_{ij} \quad (5)$$

여기서, $x = (x, y)$ 이고, Q_{ij} 는 절점의 실제 좌표가 아니고 스트립의 j 번째 절선(nodal line)의 i 번째 절점을 정의하는 다각형 정점의 위치벡터이다. 또한, N_{ij} 는 Q_{ij} 와 관계된 형상함수로 절선 방향의 B3-spline 함수와 횡방향의 Lagrange 다항식의 곱으로 식(3)과 같다.

2.4 평판 스트립의 강성행렬과 하중벡터

길이방향으로 m 개의 등간격을 갖는 2개의 절선으로 구성된 등간격 평판 스트립의 강성 행렬은 일반적으로 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$K = \iint B^T D B |J| d\xi d\eta \quad (6)$$

여기서, B 는 평판의 변형률 행렬이고 D 는 평판의 재료 탄성행렬이다. 또한, J 는 Jacobian 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

또한,

$$\mathbf{x} = (x_{-1}, x_0, \dots, x_m, x_{m+1})_i$$

$$(x_{-1}, x_0, \dots, x_m, x_{m+1})_{j+1}$$

$$\mathbf{y} = (y_{-1}, y_0, \dots, y_{m+1})_i$$

$$(y_{-1}, y_0, \dots, y_m, y_{m+1})_{j+1} \quad (8)$$

한편, 변위 매개변수 δ_{ij} 와 관계된 하중 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{N}_i^T \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dA \quad (9)$$

여기서, q 는 분포하중 강도이고 적분은 스트립 면적에 대하여 수행된다.

평판 스트립의 강성행렬과 하중벡터의 계산에 사용되는 spline 함수의 수치적분은 가우스 적분을 사용한다. B3-spline 함수는 3차 곡선이므로 절선(스트립 길이 방향)의 각 구간에 대하여 4개의 적분점을 취하고 스트립 폭에 대해서는 선형 Lagrange 함수를 사용하므로 2개의 적분점을 갖는다. 그러나 얇은 평판의 경우 전단강성을 과대평가하므로 널리 알려진 선택적 감차적분 방법을 채택하였다.

그림 5에서는 하나의 B3-spline의 적분위치를 표 시하였고 그림 6은 스트립 요소 내의 정상적분의 위치를 나타내었다. 표 1은 평판의 경우 휨과 전단에 대한 강성행렬과 하중 계산시의 적분 방법을 표시하였다.

2.5 경계조건에 의한 강성행렬과 하중의 변환

Spline 유한대판법에 의한 정식화에서는 강성행렬과 하중벡터가 절선상의 내부절점에서의 변위 매개변수에 대하여 구성되므로 경계조건을 갖는 부분에서는 강성행렬과 하중을 실제 변위에 대응되도록 변환시켜야 한다. 만약에 임의의 절선의 절점 1과 절점 m 에서 경계조건이 주어지면

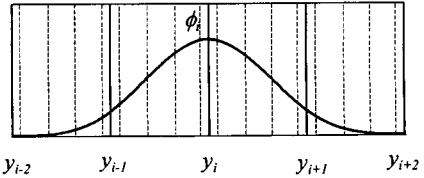


그림 5 B3-spline의 Gauss적분점

다음과 같은 변환행렬에 의해 매개변수를 실제 변위로 변환하여야 한다. 이때, \hat{w}_1, \hat{w}_m 는 실제 변위를 나타낸다.

$$\hat{w}_i = \mathbf{T}_i w_i \quad (10)$$

여기서,

$$\hat{w}_i = \begin{Bmatrix} w_0 \\ \hat{w}_1 \\ \vdots \\ \hat{w}_m \\ w_{m+1} \end{Bmatrix} \quad w_i = \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

절점 1과 절점 m 이 절선의 끝단이라면 전체 매개변수와 대응하는 변환행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{T}_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

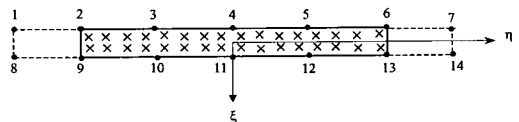


그림 6 스트립의 정상적분점(2×4)

표 1 평판의 경우 수치 적분 차수

항 목	횡방향×종방향
휨 강성행렬	2×4
전단 강성행렬	1×3
하 중	2×4

이때, 수정된 강성행렬과 하중벡터는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{K} \mathbf{T}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{F} \quad (14)$$

3. 새로운 감절점 쉘 Spline 스트립의 정식화

3.1 감절점 쉘의 기하학적 형상

감절점 쉘 요소는 3차원의 연속체를 두께 방향의 응력이 0이라는 가정에 의해 그림 7, 그림 8과 같이 쉘 중립면에서의 위치벡터와 각 절점의 방향(fiber) 벡터들에 의해 쉘의 기하학적 형상이 정의될 수 있고 수식으로 표현하면 다음과 같다⁶⁾.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_{i, mid} \end{Bmatrix} + \frac{\zeta h_i}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\xi, \eta) \mathbf{V}_i \quad (15)$$

여기서, ζ 는 면의 방향의 곡선 좌표 이고 \mathbf{V}_i 는 i 번 절점에서 fiber 방향의 단위 벡터를 나타낸다. 여기서 \mathbf{V}_i 는 절점 i 의 쉘 상부와 하부에서의 절점 좌표로부터 정의될 수 있다.

이러한 감절점 쉘 요소의 강성행렬을 계산하기 위하여 쉘의 두께 방향에 대하여 미리 적분(explicit Integration)을 수행하는 경우, 얇은 쉘에 있어서 강체 회전운동에 대한 요구 조건식을 위배하는 심각한 단점을 유발시킨다. 이것은 \mathbf{V}_i 가 각각의 중립면의 절점에서 상·하부의 절점 좌표의 함수로 정의

되지만, 이러한 기하학적 정의는 "일정한 Jacobian을 갖는다"라는 가정에 의해 \mathbf{V}_i 가 더 이상 실제 fiber 방향이 아니게 된다. 이러한 기하학적인 정의의 불일치는 자체 변형률(self-straining)을 유발시킨다. 만약에 중립면에서의 Jacobian이 3번째 차원으로부터 독립적이 되기 위해서는 요소의 기하학적 형상 또한 중립면의 함수로서만 정의되어야 한다. 따라서 본 연구에서는 근사적인 방법으로서 식 (16)과 같이 fiber방향과 무관하게 쉘 중립면의 좌표만으로 쉘의 기하학적인 형상을 정의한다. 이 경우 기본적으로 쉘의 두께는 중립면에 수직인 방향으로 정의하며 결과적으로 두께 방향을 따라서 일정한 Jacobian을 갖게 된다.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_{i, mid} \end{Bmatrix} + t \mathbf{V}_i \quad (16)$$

여기서 \mathbf{V}_i 는 각 적분점에서 쉘 중립면에 수직인 단위 벡터이다. 또한, t 는 $-h/2 < h/2$ 범위의 선형 좌표이고 h 는 적분점에서의 두께가 된다. 이러한 정의에 의한 요소는 비록 근사적인 값이기는 하지만 자체 변형률(self-straining)이 없이 통상적인 적분(explicit Integration)이 가능하게 되며 곡률의 영향이 크지 않을 때는 그 오차는 무시할만하다.

3.2 국부좌표축

쉘 중립면은 두개의 무차원 곡선 좌표 ξ, η 에 의해 표현되고 ζ 축은 쉘 중립면에 수직이 된다. 이 곡선 좌표계는 서로 직교하지 않으며 요소내의 중앙에서 원점을 가진다. 이때, 요소 중앙에서 (r, s) 가 (ξ, η) 에 대해서 대칭을 갖도록 국부 직각좌표계 (r, s, t) 가 구성되면 (ξ, η) 와 (r, s) 의 평면은 같은 평면상에서 정의되므로 면의 방향의 ζ 와 t 는 일치하게 된다(그림 9).

이때, $\mathbf{V}_\xi, \mathbf{V}_\eta$ 는 각각 ξ, η 축에 접선인 단위 covariant 기본 벡터로 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\mathbf{V}_\xi = \frac{\bar{\mathbf{V}}_\xi}{|\mathbf{x}_{,\xi}|}, \quad \mathbf{V}_\eta = \frac{\bar{\mathbf{V}}_\eta}{|\mathbf{x}_{,\eta}|} \quad (17)$$

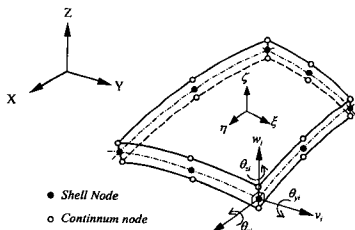
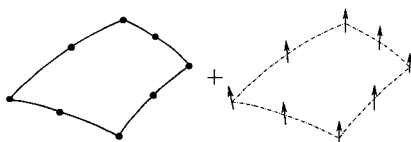


그림 7 감절점 쉘(Degenerated Shell)요소



(a) 쉘 중립면 (b) Fiber 벡터

그림 8 쉘 중립면과 Fiber 벡터

여기서,

$$\bar{\mathbf{V}}_\xi = \mathbf{x}_{,\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}}_\eta = \mathbf{x}_{,\eta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (18)$$

방향벡터 \mathbf{V}_t 는 쉘의 중립면에 수직인 벡터이고 \mathbf{V}_r 과 \mathbf{V}_s 는 중립면의 접선 벡터이다. 따라서 \mathbf{V}_t 는 ξ 와 η 방향의 벡터곱으로 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{V}_t = \frac{\mathbf{V}_\xi \times \mathbf{V}_\eta}{|\mathbf{V}_\xi \times \mathbf{V}_\eta|} \quad (19)$$

그림 9와 같이 국부 좌표 (r, s) 에 평행한 직각 단위 벡터 $\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_s$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{V}_s = \frac{(\mathbf{V}_t \times \mathbf{V}_\xi) + \mathbf{V}_\eta}{|(\mathbf{V}_t \times \mathbf{V}_\xi) + \mathbf{V}_\eta|} \quad (20)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_s \times \mathbf{V}_t \quad (21)$$

3.3 변위장

본 연구의 spline 쉘 스트립에 사용된 합-응력 쉘 요소는 직선변위와 회전변위가 각각 독립적으로 근사화 되고 모든 변위장은 그림 10에 나타난 전체 좌표계에 대한 값으로 정의된다. 식 (22)는 스트립 내의 점 \mathbf{P} 의 변위 δ 가 곡선을 정의하는 벡터 \mathbf{Q}_{ij} 와 관계된 전체 좌표계에 대한 변위 매개변수 \mathbf{a}_{ij} 의 향으로 표현되는 것을 보여주고 있다.

$$\delta = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \mathbf{N}_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{a}_{ij} \quad (22)$$

여기서, $\mathbf{a}_{ij} = (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)_{ij}$ 로서 전체 좌표계에 대한 변위의 매개변수이고 p 는 2를 사용한다.

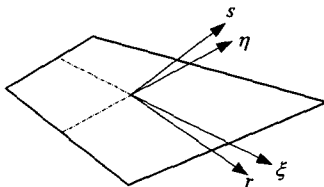


그림 9 국부좌표계와 자연좌표계

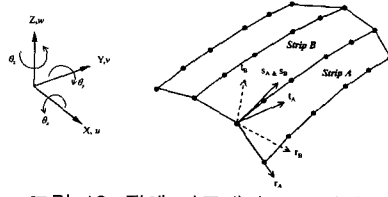


그림 10 전체 좌표계와 스트립의 국부 좌표계

3.4 변위-변형률 관계

쉘 이론에서 국부 좌표계의 t 방향의 수직 응력이 0이기 때문에 변형률을 국부 좌표계로 정의한다. 이때, t 는 $\xi\eta$ 평면에 수직이다. 국부 좌표계에서 쉘의 일반화된 막 변형률과 휨 변형률, 전단 변형률은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\epsilon}_m = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_s \\ \epsilon_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{r,r} \\ u_{s,s} \\ u_{r,s} + u_{s,r} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_m \mathbf{a} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_\theta = \begin{pmatrix} \kappa_r \\ \kappa_s \\ \kappa_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{s,r} \\ -\theta_{r,s} \\ \theta_{s,s} - \theta_{r,r} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\theta \mathbf{a} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{pmatrix} \epsilon_{rt} \\ \epsilon_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{r,s} + \theta_s \\ u_{s,r} - \theta_r \end{pmatrix} = \mathbf{B}_s \mathbf{a} \quad (25)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_m = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ij,r} \mathbf{V}_r^T & 0 \\ \mathbf{N}_{ij,s} \mathbf{V}_s^T & 0 \\ \mathbf{N}_{ij,s} \mathbf{V}_r^T + \mathbf{N}_{ij,r} \mathbf{V}_s^T & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_\theta = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{N}_{ij,r} \mathbf{V}_s^T \\ 0 & -\mathbf{N}_{ij,s} \mathbf{V}_r^T \\ 0 & \mathbf{N}_{ij,s} \mathbf{V}_s^T - \mathbf{N}_{ij,r} \mathbf{V}_r^T \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{B}_s = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{ij,r} \mathbf{V}_t^T & \mathbf{N}_{ij} \mathbf{V}_s^T \\ \mathbf{N}_{ij,s} \mathbf{V}_t^T & \mathbf{N}_{ij} \mathbf{V}_r^T \end{bmatrix} \quad (28)$$

3.5 응력-변형률 관계

변형률과 관계되는 국부 좌표계에 대한 합 응력(내력)은 그림 11의 부호규약에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_m = \begin{pmatrix} N_r \\ N_s \\ N_{rs} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_m \boldsymbol{\epsilon}_m \quad (29)$$

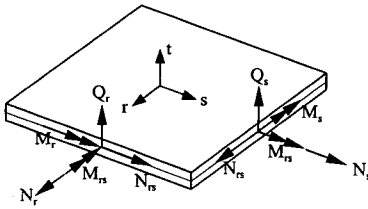


그림 11 합-응력 쉘의 내력

$$\mathbf{R}_b = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_s \\ M_{rs} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (30)$$

$$\mathbf{R}_s = \begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_s \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (31)$$

여기서 \mathbf{D}_m , \mathbf{D}_b , \mathbf{D}_s 은 각각 면내 변형률, 휨 변형률, 전단 변형률과 관계된 등방성 재료의 탄성 행렬이다⁷⁾.

3.6 전체 포텐셜 에너지와 재료강성행렬

합-응력 (resultant-stress) 쉘 요소의 전체 포텐셜 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_A (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ & + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s) dA - W \end{aligned} \quad (32)$$

여기서, W 는 작용 하중에 의한 포텐셜 에너지이다.

포텐셜 에너지의 정리에 의하여 각각의 강성행렬이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \\ = & \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m dA + \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA \\ & + \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA \end{aligned} \quad (33)$$

여기서,

$$dA = dr ds = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (34)$$

본 정식화에서는 두께방향에 대하여 미리 적분을 수행하기 때문에 Jacobian 행렬은 쉘 중립면

에서만 계산한다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,\xi} & \mathbf{s}_{,\xi} \\ \mathbf{r}_{,\eta} & \mathbf{s}_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_\xi \cdot \mathbf{V}_r & \overline{\mathbf{V}}_\xi \cdot \mathbf{V}_s \\ \overline{\mathbf{V}}_\eta \cdot \mathbf{V}_r & \overline{\mathbf{V}}_\eta \cdot \mathbf{V}_s \end{bmatrix} \quad (35)$$

이때, 전단 변형률에 관계된 강성행렬은 감차적분을 수행하지만 막 변형률과 휨 변형률 사이에는 연성이 존재하지 않으므로 막 변형률과 휨 변형률에 관계된 강성행렬은 정상적분을 수행한다.

3.7 면내 회전자유도와 Penalty 함수

중립면의 면내 회전에 관계된 면내 회전 자유도 (Drilling DOF)는 고체 역학에서 정의된 면내 회전을 penalty 함수에 의한 제한조건에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\varepsilon_\theta = \theta_t - 1/2(u_{s,r} - u_{r,s}) = 0 \quad (36)$$

여기서 θ_t 는 국부 좌표계의 면내 회전이다.

이러한 면내회전에 의한 변형률 에너지는 다음과 같다.

$$\Pi_\theta = \Phi Gh \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_\theta^T \varepsilon_\theta dA \quad (37)$$

따라서 회전에 관계된 강성행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_\theta = \Phi Gh \int \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{B}_\theta dA \quad (38)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_\theta = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \left[\frac{1}{2} (\mathbf{N}_{i,s} \mathbf{V}_r^T - \mathbf{N}_{i,r} \mathbf{V}_s^T) \mathbf{N}_{ij} \mathbf{V}_t^T \right] \quad (39)$$

이때, Φ 는 penalty 상수로서 이 값에 따라 해의 민감도가 크지 않아야 한다. 본 정식화에 따라서 여러 예제에 대해 수치 테스트를 수행하여 본 결과 참고문헌 (23)에 나와 있는 것과 같이, Φ 은 '1'의 값을 사용한 경우 만족할 만한 수렴성을 보이고 있음을 확인할 수 있었다²³⁾. 또한, 식 (39)와 같이 면내 회전과 관계되는 변형률의 경우 수직변위와 회전에 대한 차수가 다르기 때문에 변형구속 (Locking)이 발생할 수 있으므로

면내 회전에 관계된 강성행렬에 대하여 감차적분을 수행한다^{26), 27)}.

4. 해석 예제

수치적인 예제 해석을 통하여 본 연구에서 개발된 요소의 성능을 평가하기로 한다. 본 연구에서 개발된 절점당 6자유도를 갖는 쉘 스트립 요소는 RSDS-6로 명칭하였다. 비교를 위하여 절점당 5자유도의 스트립 요소 RSDS-5(URI)와 RSDS-5(SRI)를 해석에 사용하였으며 요소에 대한 설명은 표 2와 같다.

4.1 Cook의 평면응력 문제

Cook은 평면요소의 면내방향 거동을 평가하기 위하여 그림 12와 같은 사다리꼴의 평면 응력을 제안하였다. 이 문제는 요소의 형상이 찌그러짐에 대해 민감하지 않음을 검토하기 위한 문제로 캔틸레버 단부에 등분포의 단위하중을 작용시켜

표 2 해석에 사용된 스트립 요소

Strip 요소	절점당 DOF	특징(적분방법)
RSDS-6	6	전단과 면내 회전에 대하여 감차적분 수행
RSDS-5(URI)	5	전단과 막 변형률에 대하여 감차적분 수행
RSDS-5(SRI)	5	전단에 대해서만 감차적분 수행

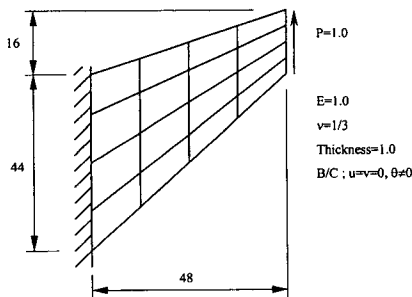


그림 12 Cook의 평면 문제

표 3 캔틸레버 단부 중앙의 수직 처짐(Cook의 문제)

Mesh	Allman ³⁰⁾	Simo ³¹⁾	Present
2×2	20.27	21.12	22.24
4×4	22.78	23.02	22.51
8×8	23.56	23.68	23.52

단부 중앙에서의 수직 처짐으로 해의 수렴성을 검토한다. 이 예제에 대한 참고값으로는 Began과 Fellipa²⁰⁾의 해석 값인 23.91을 사용한다. 본 논문에서 제시된 스트립 요소의 경우 B3-spline과 같은 고차의 형상함수를 사용하기 때문에 면내 회전에 대한 변위장을 새롭게 가정하지 않았음에도 불구하고 비교적 높은 수렴성을 보임을 알 수 있다. 단, 평면 응력 문제에서는 면내 회전에 관계된 강성행렬에 대하여 정상적분을 수행한다.

4.2 원통형 지붕셀

이 예제는 격벽으로 지지되고 자중을 받는, 가장 널리 알려진 전형적인 쉘 테스트 중의 하나이다. 이 문제는 Scordelis의 Lo가 가장 먼저 이론적인 방법을 사용하여 해석하였기 때문에 Scordelis-Lo 쉘로도 알려져 있다. 이 문제에서 가장 자주 비교되는 해석 값은 그림 13에 나타난 A점에서의 수직 처짐으로 근래에 와서는 초기의 Scordelis와 Lo의 해를 사용하지 않고 주로 MacNeal과 Harder³²⁾의 해석값인 0.3024를 참고값(reference value)으로 사용한다. 이 예제의 경우 스트립의 분할 방향을 다르게 하여 수렴도를 검토하였다. 이때, Spline 유한대판법의 해석에 사용된 분할 방법과 해석 결과는 표 4와 그림 14에 나타내었으며 제안된 요소의 경우 매우 우수한 결과를 보이고 있다.

4.3 집중하중을 받는 원통형 쉘

고전적인 쉘 이론에 의한 유한요소 모델을 사용한 많은 초기의 연구자들에 의해 원통형 쉘(Cylindrical Shell)에 대한 해석이 수행되었으며

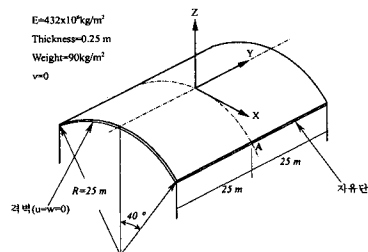


그림 13 Scordelis-Lo의 지붕셀

표 4 지붕 셸(Scordelis-Lo roof shell)의 A점 수직 처짐

Strip 분할	RSDS-5		제안된 방법 (RSDS-6)	
	URI	SRI		
종방향 분할	4×4	0.3635	0.3226	0.3329
	8×8	0.3177	0.3072	0.3073
	16×16	0.3072	0.3045	0.3027
횡방향 분할	4×8	0.3218	0.2661	0.2614
	8×8	0.3192	0.2981	0.2963
	16×16	0.3144	0.3069	0.3045

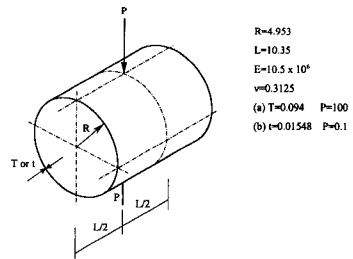
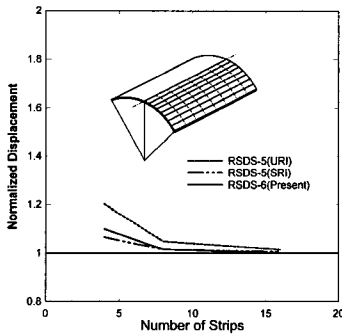
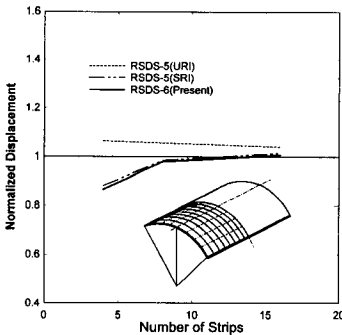


그림 15 양단이 자유단인 원통형 셸



(a) 종방향의strip분할에 따른 수직처짐



(b) 횡방향의strip분할에 따른 수직 처짐

그림 14 지붕셸의 A점 수직처짐의 수렴도

변형구속의 영향을 검토하기 위해 두꺼운 셸의 경우와 얇은 셸의 경우로 나누어 해석되었다. 이 예제는 셸의 중앙의 상하부에서 집중하중을 받는, 양단이 자유단인 원통형 셸을 1/4의 모델링을 이용하여 해석한다. 이러한 셸은 양단이 격벽으로 지지된 경우보다 해의 수렴성이 비교적 잘 나타난다. 이 문제의 경우는 막 변형구속의 영향이 거의 없고 전단 변형구속이 셸의 거동을 지배하는 것으로 알

표 5 스트립의 종방향 분할에 의한 원통형 셸의 수직 처짐 비교

Strip 분할	RSDS-5		제안된 방법 (RSDS-6)	
	URI	SRI		
t = 0.094	4×4	0.1055	0.1049	0.1050
	8×8	0.1110	0.1108	0.1113
	16×16	0.1131	0.1131	0.1131
t = 0.01548	4×4	0.02303	0.02299	0.02299
	8×8	0.02403	0.02397	0.02398
	16×16	0.02444	0.02442	0.02444

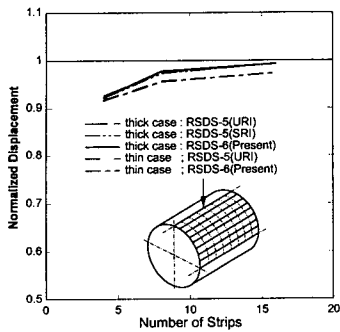
표 6 스트립의 횡방향 분할에 의한 원통형 셸의 수직 처짐 비교

Strip 분할	RSDS-5		제안된 방법 (RSDS-6)	
	URI	SRI		
t = 0.094	4×4	0.1028	0.0954	0.0954
	8×8	0.1108	0.1105	0.1105
	16×16	0.1132	0.1130	0.1130
t = 0.01548	4×4	0.00693	0.00558	0.00558
	8×8	0.02244	0.02229	0.02229
	16×16	0.02444	0.02438	0.02438

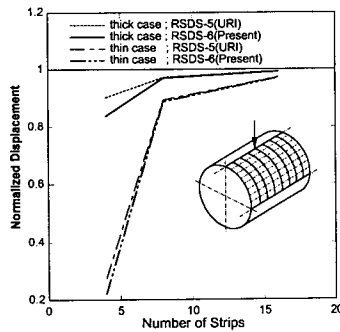
려져 있다. 해석에 사용된 스트립 요소는 각각 종방향과 횡방향으로 나누어 수렴성을 검토하였으며 이 경우 하중 작용점의 수직 처짐에 대한 해는 0.1139과 0.02511를 각각 두꺼운 셸과 얇은 셸의 참고 값(reference value)으로 사용한다⁵⁾.

4.4 반구체 셸

그림 17은 같은 간격으로 4개의 방사방향 하중이 90°씩 반대방향으로 셸 표면에 수직하게 작용하는, 18°의 흠을 갖는 반구체 셸(Pinched Hemispherical Shell)로서 이중 대칭이므로 셸의 1/4만 해석할 수 있다. 이 예제에 대한 이론적인



(a) strip의 종방향 분할에 의한 수직 처짐



(b) strip의 횡방향 분할에 의한 수직 처짐

그림 16 원통형 쉘의 수직 처짐(하중 작용점)의 수렴도

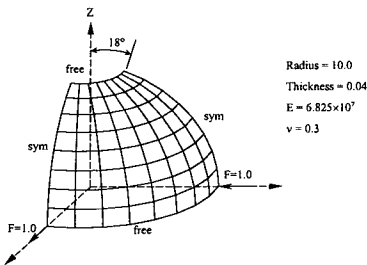


그림 17 반구체 쉘

표 7 반구체 쉘의 변위

Mesh	FEM			Spline FSM	
	Taylor ³³⁾	Simo ³¹⁾	Choi ³⁴⁾	RSDS-5 (URI)	제안된 요소 (RSDS-6)
4×4	0.08652	0.09337	0.08793	0.06879	0.08901
8×8	0.09415	0.09281	0.09297	0.07308	0.09220
16×16	0.09350	0.09291	0.09315	0.07436	0.09328

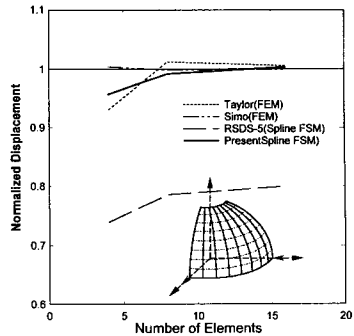


그림 18 반구체 쉘의 하중 작용점 변위 수렴도

해는 존재하지 않지만 MacNeal과 Harder³²⁾는 하중을 받는 방사방향의 변위로 0.094로 제시하였고 Simo 등³¹⁾은 0.093에 가깝다고 제안하였다. 이 예제는 막 변형구속(membrane locking)이 전단 변형구속에 비해 상당히 큰 것으로 알려져 있으므로 막 변형구속이 발생하지 않는 요소에서만 해를 얻을 수 있다. 실제로 절점당 5자유도를 갖는 합응력(Resultant-stress) 감절점 스트립 요소에서는 면내 변형률에 관계된 강성행렬을 선택적으로 감차 적분하여도 막 변형구속을 완전히 제거할 수 없었으나 본 논문에서 제시된 6자유도를 갖는 스트립 요소에서는 변형구속이 발생하지 않고 제안된 값과 매우 가까운 결과를 보이고 있다.

(본 연구에서 제안된 spline 대판요소의 경우 체논의 크기보다 필요한 매듭점(knots)의 수가 한 스트립 당 4개가 더 많으므로 전체 자유도의 수도 비교된 유한요소의 경우보다는 증가한다.)

4.5 비틀린 캔틸레버 보

그림 19의 비틀린 캔틸레버보는 MacNeal과 Harder³²⁾가 제안한 문제로 요소의 찌그러짐(warping)의 영향을 고려할 수 있는가를 알기 위한 문제이다. 2×12의 체논의 경우 각 요소는 7.5°씩 비틀어져 있게 된다. 이때 이 보의 자유단에 각각 면내방향과 면외방향의 단위하중이 작용한다. Belytschko 등¹⁸⁾은 쉘의 두께 방향에 대한 Jacobian의 변화가 중요하다는 것을 강조하기 위해 이 예제를 사용하였다. 즉, 두께 방향에 대해서 일정한 Jacobian을 갖는다는 가정을 한 일반적인 감절점 쉘 요소의 경우는 수렴하지 않는다는 것을 보였다.

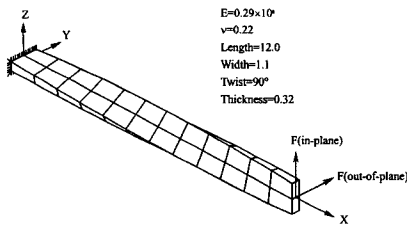


그림 19 비틀린 캔틸레버 보

이 예제에서 하중 작용방향의 처짐에 대한 이론값은 면내 하중의 경우에는 0.005424이고 면외 하중의 경우에는 0.001754이다. 표 8에서 보는 바와 같이 제안된 요소에 의한 해석 결과는 매우 정확한 해를 얻을 수 있는 반면, 5자유도 요소의 경우에는 오차가 매우 심한 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 새로운 spline 유한대판 요소를 제안하였다. 제안된 정식화는 등매개 개념에 의하여 기하학적 형상과 변위장이 3차의 B-spline 함수와 Lagrange 다항식의 곱으로 이루어지는 보간함수에 의하여 근사화 된다. 이 스트립 요소는 절점에서의 변위 매개변수에 대하여 강성행렬이 구성되므로 경계조건에 의해 강성행렬이 변환되는 과정이 필요하고 절점에서의 매개변수를 구한 후에 B-spline 함수의 보간에 의하여 최종 변위를 계산하게 된다. 이 스트립 요소는 내부 절점에서 6개의 자유도를 갖는 합-응력 감절점 셀 요소로부터 유도하였다. 이때, 스트립의 기하학적 형상은 강체 회전에 대한 정의에 위배되지 않

고도 두께 방향을 따라 Jacobian이 일정하다는 가정을 따랐으며 고체역학에서 정의되는 면내 회전을 penalty 함수에 의한 구속조건으로 간주하여 면내 회전에 관계된 자유도를 생성하였다.

표준적인 쉘 해석 예제를 통하여 개발된 스트립 요소의 성능을 검증하였으며 모든 예제를 통해서 매우 우수한 결과를 보였다. 특히, 지붕 쉘과 원통형 쉘의 경우에는 스트립을 종방향과 횡방향으로 각각 분할하여 해석하였으며 두 경우 모두 절점의 증가에 따른 수렴성을 확인할 수 있었다. 반구체 쉘의 문제는 심한 막 변형구속이 발생하는 문제임에도 불구하고 어떠한 변형구속도 발생하지 않고 제안된 값과 거의 같은 결과를 얻었다. 비틀린 보의 문제에서는 요소의 찌그러짐에 민감하지 않고 정확한 해석이 가능하였다. 뿐만 아니라 본 연구에서 제시된 스트립 요소는 내부절점당 6자유도를 갖기 때문에 해석 예제로 사용된 곡면의 쉘 예제 뿐만 아니라 절판 구조물의 해석에 있어서도 효과적으로 사용될 수 있다.

본 논문에 소개된 스트립 요소는 면내 회전과 전단변형률에 관계된 강성행렬에 감차적분을 사용하기 때문에 '여분의 제로 에너지 모드'가 존재하는 단점을 포함하고 있다. 따라서 향후 연구에서는 이러한 '여분의 제로에너지 모드'를 제거하기 위한 방법에 대한 연구가 필요하다. 또한 본 정식화에 의한 방법은 쉘의 동적해석과 기하학적 비선형 해석으로도 쉽게 확장할 수 있으며 그에 관한 연구가 수행될 수 있다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부의 96연구개발사업의 연구비 지원과 참여기업인 LG건설의 연구비 지원에 의해 이루어졌음을 밝히며 이 지원에 깊이 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Cheung, Y. K. *The Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon, New York. 1976

표 8 비틀린 보의 변위

하 중	Mesh	FEM			Spline FSM	
		SAP2000	Taylor ³⁹⁾	Choi 등 ³⁰⁾	RSDS-5 (SRI)	제안된 요소 (RSDS-6)
면내	1×6	0.005408	0.005402	0.005391	0.007693	0.005474
	2×12	0.005413	0.005410	0.005407	0.007648	0.005438
	4×24	0.005405	0.005403	0.005413	0.007624	0.005421
면외	1×6	0.001783	0.001763	0.001762	0.002399	0.001760
	2×12	0.001770	0.001763	0.001758	0.002391	0.001757
	4×24	0.001754	0.001751	0.001754	0.002383	0.001754

2. Meyer, C. and Scordelis, A. C. "Analysis of Curved Folded Plate Structures", *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 97, No. ST10, 1971, pp.2459~2471
3. Cheung, Y. K. "Static Analysis of Right Box Girder Bridges by Spline Finite Strip Method", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, 75, June, 1983, pp.311~323
4. Au, F.T.K and Cheung, Y. K. "Isoparametric Spline Finite Strip for Plane Structures", *Computers and Structures*, Vol. 48, No. 1, 1993, pp.23~32
5. Cheung, Y. K. and Au, F. T. K. "Isoparametric Spline Finite Strip for Degenerated Shells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 21, 1995, pp. 65-92
6. Ahmad, S., Iron, B. M. and Zienkiwicz, O. C. "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp.419~451
7. 최창근, 유한요소법, 집문당, 1992
8. Parish, H. "A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 20, 1979, pp.323~350
9. Stolarski, H. and Belytschko, T. "Shear and membrane locking in curved C0 elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 41, 1983, pp.279~296
10. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M. "Reduced Integration technique in general analysis plates and shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 1971, pp.275~90
11. Choi, C. K. and Schnobrich, W. C. "Use of nonconforming modes in finite elements analysis of shells", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.101, 1975, pp.447~465
12. Choi, C. K. and Yoo, S. W. "Geometrically nonlinear behavior of an improved degenerated shell element", *Computers & Structures*, Vol. 40, No. 3, 1991, pp.785~794
13. Choi, C. K. and Paik, J. G. "An Efficient four node degenerated shell element based on the assumed covariant strain", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 2, No. 1, 1994, pp.17~34
14. Liu, W. K., Law, E. S., Lam, D. and Belyschko, T. "Resultant-stress Degenerated-shell Element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 55, 1986, pp. 259~300
15. Iron, B. M. "Semi-roof shell element", in *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Ashwell, D. G. and Gallagher, R. H., Editor, John Wiley and Sons, 1976, pp. 197~222
16. Stanley, G. M. *Continuum-based shell analysis*, Ph.D. Thesis, Stanford University, 1985
17. Milford, R. V. and Schnobrich, W. C. "Degenerated isoparametric finite elements using the explicit integration", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp.133~154
18. Belytschko, T., Wong, B. L. and Stolarski, H. "Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp.385~414
19. Allam, D. J. "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis", *Computers and Structures*, Vol. 19, No. 1, 1984, pp.1~8
20. Bergan, P. G. and Felippa, C. A. "A triangular membrane element with rotational degree of freedom", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, 1985, pp.25~59

21. Jetteur, P. and Frey, F. "A four node Marguerre element for nonlinear shell analysis", *Engineering Computations*, Vol. 3, 1986, pp. 276~282
22. Cook, R. D. "On the Allman triangle and a related quadrilateral element", *Computers and Structures*, Vol. 22, 1986, pp.1065~1067
23. MacNeal, R. H. and Harder, R. L. "A refined four-node membrane element with rotational degree of freedom", *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 1, 1988, pp.75~84
24. Ibrahimbegovic, A., Taylor, R. L. and Wilson, E. L. "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degree of freedom", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, 1990, pp.445~457
25. Choi, C. K. and Lee, W. H. "Versatile variable-node flat shell elements", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.122, No. EM5, 1996, pp.432~441
26. Nukulchai, W. K. "A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp.179~200
27. Kebari, H and Cassell, A. C. "Non-conforming Modes Stabilization of a Nine-node Stress-resultant Degenerated Shell Element with Drilling Freedom", *Computers & Structures*, Vol. 40, No.3, 1991, pp.569~580
28. Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R. "Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques : A Unification of Concepts", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 15, 1978, pp. 63~81
29. Faux, I. D. and Pratt, M. J. *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood, 1981
30. Allam, D. J. "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 717~730
31. Simo, J. C., Fox, D. D. and Rifai, M. S. "On a stress resultant geometrically exact shell model Part II : The linear theory ; computational aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 53,1989, pp. 53~92
32. MacNeal, R. H. and Harder, R. L. "A proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, 1985, pp.3~20
33. Taylor, R. L. "Finite element analysis of linear shell problem" in Whiteman, J. R. (ed.), *Proc. of the Mathematics in Finite Elements and Application*, Academic Press, NewYork, 1987, pp.191~203
34. Choi, C. K., Lee, P. S. and Park, Y. M. "High performance 4-node flat shell element: NMS-4F element", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 8, No. 2, 1999, pp.209~234
(접수일자 : 1999. 2. 12)