

체스판무늬 검색 알고리즘과 가상하중을 이용한 위상 최적설계

Topology Optimum Design Using Chessboard Patterns Search Algorithm and Virtual Load

임 오 강*
Lim, O-Kaung

이 진 식**
Lee, Jin-Sik

김 지 수***
Kim, Ji-Su

요 지

본 연구에서는 구조물의 변위 제약조건을 고려한 위상 최적설계를 체스판무늬 검색 알고리즘과 가상하중을 이용하여 수행하였다. 본 연구에서는 변위 제약조건 민감도 계산을 위하여 가상 변위장을 도입하였으며, 밀도와 유효강성계수의 상관관계를 정의하기 위하여 가상재료를 도입하였다. 또한, 선형 유한요소를 이용한 위상 최적화 기법에서 일반적으로 나타나는 체스판무늬를 제거하기 위하여 밀도 재분배방법을 이용하였다. 그리고, 변위 제약조건을 고려한 경우와 그렇지 않은 경우의 수치예제를 비교 검토함으로써 본 연구의 타당성을 검증하였다.

핵심용어 : 위상 최적설계, 체스판무늬 검색 알고리즘, 가상하중, 체스판무늬

Abstract

In this paper, topology optimization of structure subject to displacement constraints is carried out. In order to deal with the structural topology optimization, chessboard patterns search algorithm and virtual load are used. To reduce the time requiring for the sensitivity analysis of the displacement constraints, another displacement field according to the virtual load is introduced. For simplicity, artificial material model is used for the relation between effective stiffness modulus and density. The density redistribution method is used to remove the chessboard patterns. Some examples are studied and compared with the examples that do not have displacement constraints. The results may show the reasonable topology and volume reduction of the structure.

Keywords : topology optimum design, chessboard patterns search algorithm, virtual load, chessboard patterns

1. 서 론

구조물의 최적설계는 최근 컴퓨터의 발전과 동

시에 편리하고 유용한 수치해석적 방법들로 인해서 폭넓은 연구가 진행되고 있다. 최적설계 기법은 설계변수의 종류에 따라 치수, 형상 및 위상

* 정회원·부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소, 교수
** 부산대학교 기계공학과, 박사과정
*** 한국 G M B, 사원

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

최적화로 구분된다. 치수 최적화와 형상 최적화는 고정된 기하학적 위상(topology)에 대해서 최적화를 수행함으로써, 구조물 내부에 불필요한 부분의 제거를 위한 구멍의 도입과 같은 위상의 변화가 힘들게 된다. 그렇지만, 위상 최적화 방법을 이용하면 최적화 과정에서 이러한 위상들의 변화를 가능하게 할 수 있다.

위상 최적화의 대표적인 방법으로는 균질화법¹⁾ (homogenization method)과 밀도함수법²⁾ (density function method)이 있다. 균질화법은 사각형으로 이상화된 구멍(void)과 등방성 재료로 구성된 미시구조(micro structure)를 도입함으로써 구멍을 표시하는 설계변수의 개수가 많고, 요소의 변위를 이용하여 등가 재료상수를 계산하기 때문에 알고리즘이 복잡하다. 반면에, 밀도함수법은 밀도와 등가 재료상수 사이의 관계를 임의로 가정한 가상재료를 도입함으로써 모델링이 간단하며, 설계변수의 개수도 균질화법에 비하여 상당히 줄일 수 있다. 그리고, 일반적인 위상 최적화기법에서는 계산의 효율성을 감안하여 선형 요소 내부의 밀도를 상수로 가정한다. 이럴 경우, 선형요소의 수치적 안정성 때문에 설계영역 내부에 체스판무늬(chessboard patterns)가 형성된다. 이와 같은 체스판무늬 형태의 구조물은 현실적으로 제작하기가 곤란하다.

따라서, 본 연구에서는 평면응력 상태로 가정된 구조물의 위상 최적화를 위하여 밀도함수법이 제공한 가상재료를 이용하고, 최적설계 알고리즘으로는 순차이차계획법인 PLBA 알고리즘³⁾을 이용한다. 또한, 체스판무늬의 제거를 위하여 밀도 재분배 방법⁴⁾을 수정 보완한다. 밀도 재분배 방법을 최적화의 매 반복회마다 사용하면 수렴율에 좋지 않은 영향을 미치기 때문에, 체스판무늬의 존재여부를 검색하는 기법을 밀도 재분배 방법에 수정 보완함으로써 체스판무늬 존재시에만 밀도 재분배 방법이 수행되도록 한다. 그리고, 본 연구의 초점인 하중이 직접 작용하지 않는 위치의 변위 제약조건 민감도 해석을 위하여 컴플라이언스(compliance) 및 가상하중을 이용한다.

2. 가상재료

연속체 구조물의 위상 최적화 기법에서는 설계영역의 모든 위치에서 재료의 유무를 표시하는 지시함수가 이용된다. 본 연구에서는 밀도함수법의 가상재료를 이용하여 설계변수인 유한요소의 밀도와 등가 탄성계수의 상관 관계식을 정의함으로써, 재료의 유무를 표시하는 함수로 다음과 같은 등가 탄성계수를 선정한다.

$$\frac{E}{E_0} = \rho^n \tag{1}$$

식(1)에서 E 은 등가 탄성계수를 표시하고, E_0 와 ρ 는 각각 구조물에 사용할 재료의 탄성계수와 설계변수인 유한요소의 밀도를 나타내며, n 은 밀도와 등가 탄성계수간의 비선형성을 지시해 주는 벌칙인자(penalty factor)이다.

식(1)에서 알 수 있듯이, 벌칙인자에 관계없이 밀도가 '1'이면 재료가 꼭 찬 요소를 의미하고, 밀도가 '0'이면 재료가 없는 즉, 구멍을 표시한다. 여기서, 벌칙인자 n 은 '0'과 '1'사이의 중간값을 갖는 밀도의 생성을 억제하기 위하여 도입된다. 벌칙인자와 등가 탄성계수와 재료의 탄성계수 비(ratio)와의 상관관계를 이론적으로 표현하면, Fig. 1과 같다. 보통 벌칙인자는 2~4를 많

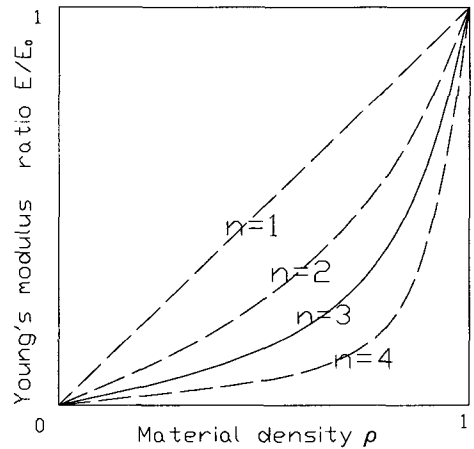


Fig. 1 Penalty factor and Young's modulus ratio

이 사용하지만, 벌칙인자가 2인 경우는 등가 탄성계수와 밀도와 비선형성이 너무 작아 중간값의 밀도가 너무 많이 나오는 경향이 있다.

그리고, 벌칙인자가 4이상인 경우에는 등가 탄성계수가 밀도에 따라 너무 급격히 변화하는 부분 때문에 위상 최적화 결과가 다소 매끄럽지 못한 경향을 보인다⁴⁾. 따라서, 본 연구에서는 벌칙인자를 3으로 선정하여 설계변수인 밀도가 상한과 하한에 가까운 값을 가지면서, 매끄러운 위상 최적설계 결과를 얻고자 한다.

본 연구에서는 식 (1)을 이용하여 평면응력 상태로 가정한 구조물의 응력과 변형률의 관계를 나타내는 행렬 D_e 를 다음과 같이 수정함으로써 구조물의 강성행렬이 설계변수에 대하여 명시적인 형태로 표현되게 한다.

$$[D_e] = \frac{\rho^* E_0}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

식 (2)에서 ν 는 구조물에 이용하는 재료의 프와송의 비를 나타낸다.

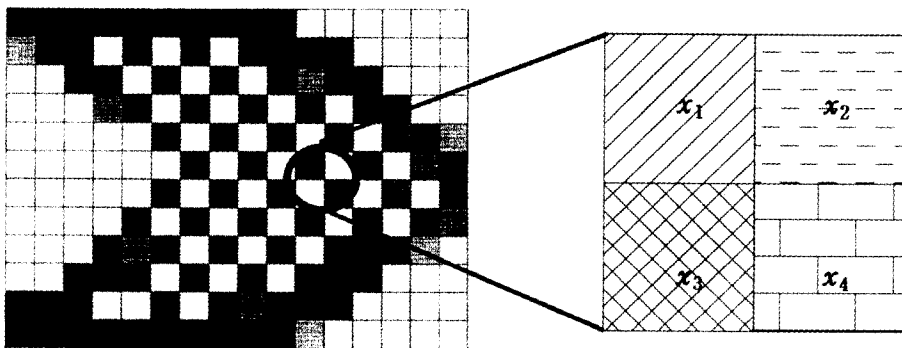
3. 체스판무늬 검색 알고리즘

변위 근거 유한요소해석을 사용하는 대부분의 위상 최적화기법은 선형요소의 수치적 안정성

부족으로 인하여 설계영역 내부에 현실적으로 제작이 불가능한 체스판무늬가 주기적 형태로 반복하여 Fig. 2(a)처럼 나타난다. 이러한 현상은, 설계변수인 요소내부의 밀도를 상수로 가정한 경우, 하중이 크게 걸리는 요소들에서는 밀도가 설계변수의 상한값인 '1'에 가까워지고, 하중이 거의 걸리지 않는 요소들에서는 밀도가 설계변수의 하한값인 '0'에 가까워진다. 그러나, 하중이 중간정도 걸리는 요소들에서는 재료를 효과적으로 이용하려는 체스판무늬 형태가 나타난다. 이는 체스판무늬가 나타난 인접한 요소들의 밀도의 평균값을 가진 구조물보다 강성이 더 높게 나타나기 때문이다⁵⁾.

이러한 현상을 방지하기 위한 방법으로는 Babuska-Brezzi 조건을 만족하는 고차요소를 사용하는 방법⁶⁾과 선형요소를 이용하는 화상처리방법⁷⁾(image processing method) 및 밀도 재분배 방법⁴⁾(density redistribution method) 등이 있다.

본 연구에서는 최적설계 알고리즘의 안정성을 위해서 매 반복회마다 체스판무늬 제거 알고리즘을 사용하는 것을 피하고, 매 반복시 설계변수를 검색하는 알고리즘을 개발하여 체스판무늬가 존재하는 경우에만 밀도 재분배 방법을 통해 체스판무늬를 제거한다. 체스판무늬 검색을 위해서는 Fig. 2(b)와 같이 임의로 서로 인접한 4개의 요소를 선택하여 패치(patch)를 구성한다. Fig. 2(b)에서 해칭이 서로 다른 것은 각 요소의 밀도



(a) Chessboard patterns

(b) Patch of four elements

Fig. 2 Chessboard patterns and patch of four elements

가 서로 다른 것으로 가정한 경우이며, x_1, x_2, x_3, x_4 는 각 요소의 밀도를 나타낸다.

Fig. 2(b)와 같은 임의의 패치는 Fig. 3과 같은 기저함수(basis function)와 설계변수 값에 의존하는 상수 값의 조합으로 밀도분포를 표현할 수 있다⁹⁾. Fig. 3에서 '1'은 재료가 꼭 찬 형태를 표현하고, '-1'은 재료가 전혀 없는 형태를 표현한다. 그리고, Fig. 3과 같은 기본형태를 이용하여 각 패치내부의 밀도분포를 표현하면 다음과 같다.

$$x = \sum_{k=1}^4 r_k \phi_k \tag{3}$$

식 (3)에서 r_k 는 각 요소의 밀도 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 에 의해서 계산되는 상수 값이며, ϕ_k 는 Fig. 3에서 표시된 기저함수이다.

식 (3)의 관계식을 이용하여 다음과 같은 선형 연립방정식을 구성하면 x_1, x_2, x_3, x_4 는 이미 알고 있는 값이므로, r_1, r_2, r_3, r_4 를 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 - r_3 + r_4 &= x_1 \\ r_1 - r_2 - r_3 - r_4 &= x_2 \\ r_1 + r_2 + r_3 - r_4 &= x_3 \\ r_1 - r_2 + r_3 + r_4 &= x_4 \end{aligned} \tag{4}$$

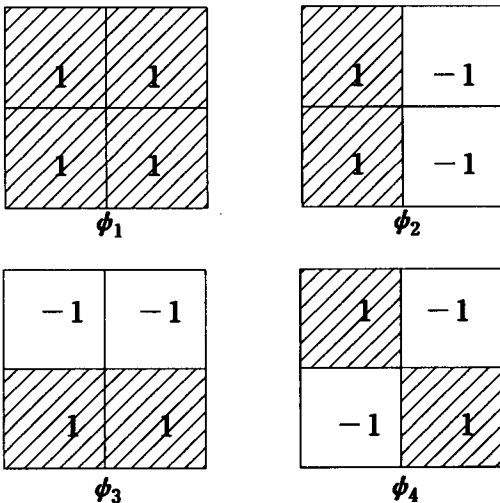


Fig. 3 Basis functions associated with patch

체스판무늬 검색을 위하여 관계식 $\int_{patch} \bar{x} d\Omega = \int_{patch} x d\Omega$ 을 이용하여 패치를 구성하는 각 요소의 밀도를 새롭게 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{4}(3x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{4}(x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4) \\ \bar{x}_3 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4) \\ \bar{x}_4 &= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4) \end{aligned} \tag{5}$$

이상과 같은 내용을 기초로 체스판무늬 검색 알고리즘을 구성하면 다음과 같다.

- 단계 1 : Fig. 2(b)와 같이 먼저 4개의 요소를 선택하여 하나의 집합을 구성한다.
- 단계 2 : x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 가장 큰 값을 $x_{max.}$, 가장 작은 값을 $x_{min.}$ 으로 설정한다.
- 단계 3 : 식 (5)를 이용하여 각 요소의 새로운 밀도 \bar{x}_i 를 계산한다.
- 단계 4 : $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ 중에서 가장 큰 값을 $\bar{x}_{max.}$, 가장 작은 값을 $\bar{x}_{min.}$ 으로 설정한다.
- 단계 5 : Fig. 3의 기저함수 중 ϕ_k 가 체스판무늬 형태이므로 다음 식을 만족하면 체스판무늬가 존재 한다고 판단한다.

$$\bar{x}_{max.} \leq x_{max.} \text{ and } \bar{x}_{min.} \geq x_{min.} \tag{6}$$

단계 6 : 아주 작은 밀도 성분들의 상대적인 밀도 차이로 인한 식 (6)의 만족을 방지하기 위하여 다음과 같은 식을 부가한다.

$$0.8 \leq x_{max.} \text{ and } 0.001 \geq x_{min.} \tag{7}$$

체스판무늬 검색 알고리즘으로 체스판무늬가 검색되면, 요소의 밀도를 절점 값으로 환산하고, 다시 절점 값을 요소의 밀도로 환산하는 밀도 재분배 방법을 통하여 체스판무늬를 제거한다.

4. 위상 최적화 문제

본 연구에서는 Fig. 4에서와 같이 평면 구조물에 가해지는 외력, 경계조건 및 구조물이 차지할 체적만 알려진 상태에서, 구조물의 특정위치 즉, 하중이 작용하는 위치이거나, 하중이 작용하지 않는 위치에서의 변위를 제약함수로 선택하고, 구조물 무게의 최소화를 목적함수로 하는 위상 최적화 문제를 해석한다. 따라서, 본 연구의 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } f(x) &= \sum_{i=1}^N x_i a_i \\ \text{Subject to :} \\ [K]\{u\} &= \{F\} \\ g &= u_j - u_o \leq 0, j=A \text{ or } B \\ 0 < x_{\min.} &\leq x_i \leq x_{\max.}, i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 x 는 본 연구의 설계변수인 각 요소의 밀도를 나타내며, a_i 는 각 요소의 면적, N 은 총 요소의 개수를 표시한다. 그리고, $[K]$ 와 $\{F\}$ 는 각각 강성행렬과 외력을 표시하고, u 와 u_o 는 각각 특정위치에서의 변위와 허용변위를 나타내고, $x_{\min.}$ 과 $x_{\max.}$ 은 수치해석을 위한 설계변수의 하한과 상한을 표시한다.

본 연구에서는 변위 제약조건을 구조물의 컴플라이언스로 변환하여 민감도 해석을 실시한다. 먼저, 하중이 작용하는 위치 A에 최대변위가 발생한 경우, 식 (8)의 변위 제약조건에 하중 F_A 가 포함된 외력벡터를 곱하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

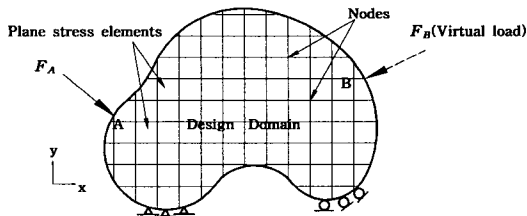


Fig. 4 The model for the topology design

$$g = \{F^A\}^T \{u^A\} - F_A \cdot u_o \leq 0 \quad (9)$$

식 (9)에서 $\{F^A\}$ 는 하중 F_A 가 포함된 외력벡터를 표시하고, $\{u^A\}$ 는 하중 F_A 로 인한 변위벡터를 나타낸다.

따라서, 식 (9)를 설계변수에 대하여 미분을 취하여 정리하면, 다음과 같은 민감도 해석결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\delta g}{\delta x_i} = -\{u^A\} \frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{u^A\}, i=1, \dots, N \quad (10)$$

식 (10)에서 x_i 는 설계변수를 표현한다.

다음으로, A지점에 하중이 작용할 때, 하중이 작용하지 않는 B지점에서 최대변위가 발생하여 B지점의 변위를 제약조건으로 한 경우, Fig. 4에서처럼 B지점에 먼저 가상하중 F_B 를 작용시킨다. 그리고, 실제변위벡터 $\{u^A\}$ 에 가상하중 F_B 가 포함된 외력벡터를 곱하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$g = \{F^B\}^T \{u^A\} - F_B \cdot u_o \leq 0 \quad (11)$$

식 (11)에서 $\{F^B\}$ 는 가상하중 F_B 가 포함된 외력벡터를 표시한다.

식 (11)의 설계변수에 대한 민감도 해석은 다음과 같다.

$$\frac{\delta g}{\delta x_i} = \{F^B\}^T \frac{\partial \{u^A\}}{\partial x_i} = \{u^B\}^T [K] \frac{\partial \{u^A\}}{\partial x_i}$$

$$\frac{\delta g}{\delta x_i} = -\{u^B\}^T \frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{u^A\}, i=1, \dots, N \quad (12)$$

식 (12)에서 $\{u^B\}$ 는 가상하중 F_B 로 발생한 변위벡터이다.

식 (12)와 같이 가상하중에 의한 새로운 변위벡터를 도입함으로써 하중이 작용하지 않는 지점에서의 변위 제약조건에 대한 민감도해석을 수행할 수 있다.

5. 수치예제

본 연구의 수치예제들은 공통으로 $E_0=200\text{Gpa}$, $\nu=0.29$ 인 재료를 사용하고, 설계변수인 밀도의 하한값으로는 '10⁻⁴', 상한값으로는 '1', 초기값으로는 구멍이 없는 상태를 표현하기 위하여 '1'을 사용한다.

5.1 하중이 작용하는 지점에서의 변위 제약조건

본 예제에서는 Fig. 5와 같이 짧은 외팔보의 끝단 중앙인 A지점에 하중이 작용할 때, A지점에서의 변위 제약조건을 0.035mm이하로 하면서 무게를 최소화하는 위상을 구한다. 본 예제에서는 Fig. 5의 길이 방향으로 32개의 요소로 분할하고, 높이방향으로 20개 요소로 분할한다. 따라서, 설계변수의 총 개수는 640개이다. 그리고, 하중 F_A 의 크기는 200kN이다.

Fig. 6은 A지점의 변위 제약조건을 고려한 경

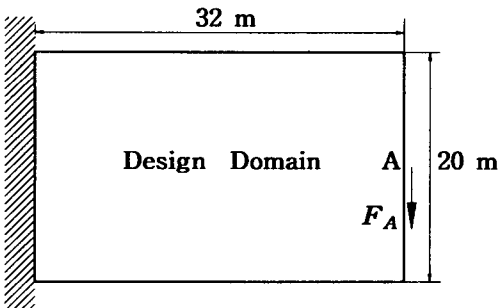


Fig. 5 Model of short cantilever

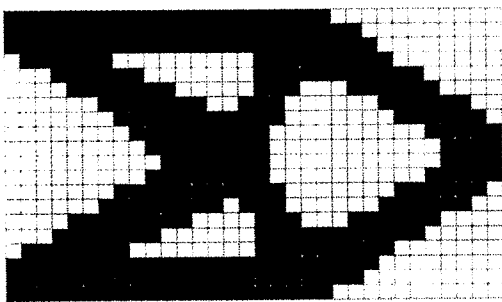


Fig. 6 Optimum topology with displacement constraint

우의 위상 최적설계이며, Fig. 7은 일반적인 위상 최적화 경우처럼 구조물의 컴플라이언스를 최소화하면서, 구조물의 사용 재료를 최대 37.5%로 제한한 경우의 위상 최적설계이다. Fig. 6은 Fig. 7의 기본 골격을 유지하면서 사용재료의 양이 53.12%로 높아졌다. 또한, A지점의 변위는 Fig. 7의 경우 0.051mm이고, 재료를 100% 모두 사용한 경우에서는 0.022mm였다.

5.2 하중이 작용하지 않는 지점에서의 변위 제약조건

본 예제에서는 Fig. 8과 같은 단순지지보에서 하중이 작용하는 A, C지점의 변위와 하중이 작용하지 않는 B지점의 변위를 제약조건으로 고려한 구조물 무게의 최소화를 만족하는 위상을 구한다. 하중이 작용하는 지점 A와 C의 변위 제약조건은 0.0335mm이하이며, 하중이 작용하지 않는 지점 B의 변위 제약조건은 0.0390mm이하이다. 본 예제에서는 단순지지보의 길이방향으로 40개의 요소로 분할하고, 높이방향으로 10개의 요소로 분할하여, 설계변수의 총 개수는 400개이다. 그리고, 하중 F_A 와 F_C 는 각각 200 kN이다.

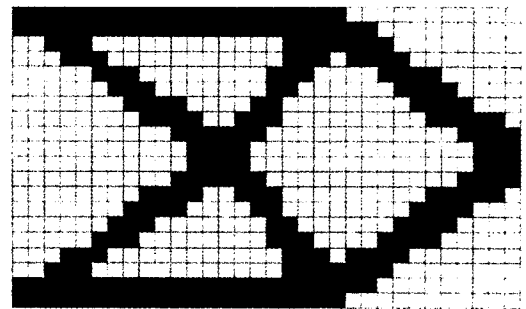


Fig. 7 Optimum topology with 37.5% volume constraint

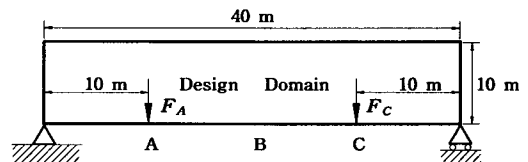


Fig. 8 Model of simple supported beam

참 고 문 헌



Fig. 9 Optimum topology with displacement constraints

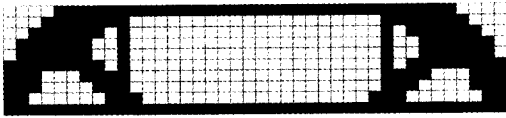


Fig. 10 Optimum topology with 45% volume constraint

Fig. 9는 변위 제약조건을 고려한 경우의 위상 최적설계이며, Fig. 10은 일반적인 위상 최적화 경우처럼 구조물의 컴플라이언스를 최소화하면서, 구조물의 사용 재료를 최대 45%로 제한한 경우의 위상 최적설계이다. Fig. 9는 Fig. 10의 기본 골격을 유지하면서 사용재료의 양이 51.53%로 높아졌다. 또한, B지점의 변위는 Fig. 10의 경우 0.0491mm이고, 재료를 100% 모두 사용한 경우에는 0.0292mm였다.

6. 결 론

본 연구에서는 하중을 받는 구조물이 하중이 작용하는 지점에서의 변위 제약조건이나 하중이 작용하지 않는 지점에서의 변위 제약조건을 가질 때 최적의 위상과 체적을 구하기 위하여 체스판 무늬 검색 알고리즘과 가상하중을 사용하여 계산하는 방법을 보였다. 그 결과로 나타난 위상들은 변위 제약조건을 잘 만족시키면서 구조물의 위상을 최소화하는 일반적인 위상 최적화 결과의 기본 골격을 유지한 형태를 지니고 있었다. 본 연구에서 제시한 방법을 통하여 여러 가지 변위 제약조건들을 함께 고려하면 구조물의 위상을 더욱 신뢰성있게 설계할 수 있을 것으로 판단된다.

1. M. P. Bendsoe and N. Kikuchi, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using A Homogenization Method", *Comp.Meth. Appl.Mech.Engng.*, Vol. 71, 1988, pp.197~224
2. R. J. Yang and C. H. Chuang, "Optimal Topology Design Using Linear Programming", *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 2, 1994, pp.265~275
3. O. K. Lim, "An RQP Algorithm with Active Set Strategy for Optimum Design", Ph.D. Thesis, The University of Iowa, 1985, pp. 192
4. S. K. Youn and S. H. Park, "A Study on The Shape Extraction Process in The Structural Topology Optimization Using Homogenized Material", *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 3, 1997, pp.527~538
5. 임오강, 이진식, "체스판무늬 형성 방지책을 이용한 위상 최적설계", 한국전산구조공학회, 제12권 제2호, (게재예정)
6. C. S. Jog, R. B. Haber and M. P. Bendsoe, *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1993, pp.219~238
7. Ole Sigmund, "Design of Material Structures Using Topology Optimization", Ph.D.Thesis, Technical University of Denmark, 1994, pp. 118
8. M. P. Bendose, *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, Springer, Berlin, 1995, pp.34~42

(접수일자 : 1999. 3. 18)