

Fokker-Planck 방정식의 Path-Integral Solution을 이용한 구분적선형시스템의 비선형동적거동분석

Stochastic Nonlinear Dynamics of a Piecewise-Linear System via the Path-Integral Solution of the Fokker-Planck Equation

마 호 성*
Ma, Ho-Seong

요 지

본 연구에서는 추계론적 동적시스템의 응답거동을 예측할 수 있는 반해석적 절차를 개발하였으며, 이를 이용하여 구분적선형시스템의 동적거동특성을 확률적 영역에서 분석하였다. 반 해석적 절차는 시스템의 추계론적 미분방정식에 상응하는 Fokker-Planck 방정식을 path-integral solution을 이용하여 풀어서 구할 수 있다. 결합확률밀도함수의 시간에 따른 전개과정을 통하여 시스템의 동적 응답거동 특성의 예측과 분석을 하고 시스템의 거동에 미치는 외부노이즈의 영향 또한 조사하였다. 반 해석적 방법은 위상면 상에서 결합확률밀도 함수를 통하여 응답거동의 예측은 물론 거동특성에 대하여 적절한 정보를 제공하는 것을 밝혔다. 혼돈거동의 특성은 외부노이즈가 존재하는 상황에서도 시스템의 응답 안에 잔재하는 것을 밝혔다.

핵심용어 : 비선형, 혼돈, path-integral solution, Fokker-Planck 방정식, 추계론적 미분방정식, Markov process, 결합확률밀도함수, 구분적선형시스템

Abstract

Nonlinear system responses are predicted in the probability domain by using the semi-analytical procedure developed in this study. The semi-analytical procedure is obtained by solving the Fokker-Planck equation corresponding to the stochastic differential equation of the piecewise-linear system by adopting the path-integral solution. The evolutionary joint probability density functions are generated by using the method, and the characteristics of nonlinear dynamic response behaviors of the system are examined. Noise effects on the responses are also examined. It is found that the semi-analytical method developed in this study provides the accurate information of the responses via the joint probability functions. It is also found that the chaotic signatures reside in the presence of the external noise with relatively high intensity.

Keywords : nonlinear, chaos, path-integral solution, Fokker-Planck equation, stochastic differential equation, Markov process, joint probability density function, piecewise-linear system

1. 서 론

운동진폭의 제한 (amplitude constraints)이 있

는 기계적 또는 구조적 시스템은 통상적으로 비선형성 (nonlinearity)을 보이며, 이러한 비선형시스템의 복잡한 동적거동에 대한 정확한 예측은

* 정회원·연세대학교 토목공학과, 박사후연수연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

매우 어려운 과제이다. 조화거동 외에 넓은 범위의 주기를 갖는 비선형시스템의 거동은 여러 분야에서 연구가 되어 왔으며, 그 중에서 혼돈거동 (chaotic motions)은 가장 큰 관심을 끌며, 많은 과학 및 공학분야에서 발견되었다^{12), 16), 20)}. 혼돈 거동은 랜덤 (random)하고 예측할 수 없는 특성을 갖는 반면, 완전한 결정론적 시스템으로부터 그 현상이 발생한다는 사실과 함께 커다란 흥미를 끌고 있으며, 해양구조물 등의 거동에서 발견되었다^{3), 6), 21)}.

일반적으로 비선형시스템의 해석적 정확해 (analytical exact solution)는 얻을 수 없으며, 따라서 비선형시스템이 보이는 (랜덤한) 거동의 정확한 위치를 예측하는 것은 불가능하다. 그러나 시스템의 추계론적 미분방정식의 해법을 통하여 응답거동의 확률적 특성은 평가할 수 있다²⁾. 확률분포를 관찰함으로써 노이즈가 비선형 진동계의 일반거동 및 혼돈거동에 미치는 영향에 대한 연구가 있었으며, 결정론적 궤도가 혼돈거동을 보이는 경우 확률적 측정은 중요한 위상적 변화를 나타냄이 밝혀졌다⁷⁾. 시스템의 동적거동은 위상면 (phase plane)에서 응답거동의 확률밀도 함수를 관찰함으로써 그 특성을 파악할 수 있으며⁴⁾, 이는 Fokker-Planck 방정식을 path-integral 해법을 이용하여 풀으므로써 얻을 수 있다. 외부 백색노이즈를 더한 조화하중을 받거나 narrow band 여기력 (excitation)을 받는 비선형 Langevin 방정식에 대하여는 상응하는 확률밀도함수에 대한 편미분방정식인 Fokker-Planck 방정식을 얻을 수 있다^{1), 11), 15)}.

선형 및 비선형 가우스 확률과정 (Gaussian processes)에 대한 Fokker-Planck 방정식을 해석하는 path-integral 해법은 여러 연구에서 개발되었다^{4), 5), 22), 23)}. Haken⁵⁾은 Master 방정식에 대한 path-integral 해법을 개발하였으며 일반화된 Onsager-Machlup 함수를 구하였다. Wissel²³⁾은 비선형 가우스 확률과정에 대한 path-integral 해법을 개발하였다. Wehner와 Wolfer²²⁾은 path-integral 해법에 기초하여 Fokker-Planck 방정식을 푸는 수치해석적 절차를 제공하였다.

구분적선형시스템은 운동진폭의 제한을 갖는 시스템의 모델 등, 많은 실질적 문제에 적용될 수 있는 이점으로 인하여 여러 분야에서 관심거리가 되어 왔다^{9), 10), 13), 14), 18)}. 직접수치해석을 이용한 거동분석을 통하여 결정론적 구분적선형시스템은 혼돈거동 등을 포함한 다양한 거동을 보이며 또한 매개변수에 매우 민감한 것으로 밝혀졌다²⁴⁾. 또한 랜덤동요된 여기력에 대한 거동의 특성을 통하여 노이즈의 영향도 밝혀졌다²⁵⁾.

본 연구에서는 조화하중에 백색노이즈를 첨가한 추계론적 여기력을 받는 구분적선형시스템의 비선형거동에 대하여 확률영역 상에서 분석하려 한다. 그러기 위하여, 추계론적 구분적선형시스템의 Fokker-Planck 방정식을 구하고, path-integral 해법을 구하여, 시스템 응답의 가능한 거동에 대하여 예측할 수 있는 반해석적 (semi-analytical) 방법론을 개발하였다. 결정론적 시스템의 분석으로부터 확인된 구분적선형시스템이 갖는 다양한 응답거동의 특성과 노이즈의 영향을 확률밀도함수의 전개를 통하여 살펴보고 시스템 거동의 특성을 살펴보았다. 해석방법의 검증을 위하여 직접수치해석방법과의 비교결과를 제시하였다.

2. 시스템의 운동방정식

본 연구에서 고려한 구분적선형시스템의 정규화된 무차원 지배운동방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다¹²⁴⁾.

$$\ddot{x} + 2\frac{\xi}{\beta}\dot{x} + R(x) = F_0 \cos(t + \phi) + \gamma\eta \quad (1)$$

여기서 ξ =감쇠비, β =여기력과 내부선형시스템의 진동수비이며, 무차원 복원력 $R(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^2}(x-1) + \frac{1}{\beta^2} = ak_1(x-1) + k_1, & x > 1 \\ \frac{1}{\beta^2}x = k_1x, & -1 < x < 1 \\ \frac{\alpha}{\beta^2}(x-1) - \frac{1}{\beta^2} = ak_1(x-1) - k_1, & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

여기서 α =내부시스템의 강성도에 대한 외부시스템의 강성도비(k_o/k_i)이다. 식(1)에서 γ 는 결정론적 및 추계론적 시스템을 결정하는 노이즈계수로써 결정론적 시스템인 경우 $\gamma=0$, 추계론적 시스템인 경우는 $\gamma=1$ 이 된다. 또한, 식(1)에서 $\eta(t)$ 는 평균이 0이고 델타상관된(delta-correlated) 백색노이즈로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= 0 \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= q\delta(t-t') \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, q 는 노이즈강도변수(noise intensity factor)이다.

직접수치해석에서는 가우스 백색노이즈인 $\eta(t)$ 는 결정론적 진폭 A_k , 랜덤한 진동수 V_k 와 랜덤한 위상차 Φ_k 을 갖는 조화함수(harmonics)의 합으로써 아래와 같이 나타낼 수 있다⁸⁾.

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(V_k t + \Phi_k) \quad (4)$$

식(4)으로 표현되는 백색노이즈의 스펙트럼밀도는 다음과 같이 정의된다.

$$S_o = \begin{cases} \frac{D^2}{V_{\max} - V_{\min}} & \text{for } V \in \{V_{\min}, V_{\max}\} \\ 0 & \text{for } V \notin \{V_{\min}, V_{\max}\} \end{cases} \quad (5)$$

여기서 $D^2 = E[\eta^2(t)] = \eta(t)$ 의 variance이다. 위상차 Φ_k 는 구간 $[0, 2\pi]$ 안에 균등하게 분포하는 독립된 랜덤변수이다. 진폭 A_k 는 결정론적으로 Rice method을 이용하여 구할 수 있다¹⁹⁾.

$$A_k = \sqrt{2S_o \Delta V} \quad (6)$$

식(6)에서 진동수간격 ΔV 는 아래와 같이 정한다.

$$\Delta V = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{N} \quad (7)$$

진동수는 Shinozuka 방법에서 나타낸 것과 같이 랜덤하며 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$V_k = (k-0.5)\Delta V + \delta V_k + V_{\min} \quad (8)$$

여기서, δV_k 는 구간 $[-\Delta V/2, \Delta V/2]$ 안에서 균등하게 분포하는 독립랜덤변수이다. 직접수치해석에서는 양의 스펙트럼밀도만을 택하며 유한의 진동수집합(V_{\min}, V_{\max})을 이용하여 band-limited 백색노이즈를 구하였다. 여기서 주의할 점은 이론적으로 가우스 백색노이즈의 분산은 식(9)과 같이 표현되나, band-limited 백색노이즈의 분산은 식(5)로부터 식(10)과 같이 구해진다는 것이다.

$$\sigma^2 = E[\eta^2(t)] = R_{\eta}(0) = \int_0^{\infty} S_{\eta}(\omega) d\omega = q\delta(\tau)|_{\tau=0} \quad (9)$$

$$\sigma^2 = E[\eta^2(t)] = S_o(V_{\max} - V_{\min}) \quad (10)$$

3. 반해석적 시스템거동 예측기법 (semi-analytical procedure)

앞에서 언급한 바와 같이 비선형인 구분적선형 시스템의 거동에 대한 정확해는 구할 수 없으며, 또한 추계론적 하중을 받는 시스템의 랜덤거동을 정확히 예측하기는 불가능하다. 그러나, 구분적선형시스템의 추계론적 미분방정식을 풀으로써 얻을 수 있는 응답거동의 확률밀도함수로부터 시스템거동의 분포특성을 평가할 수 있다. 본 절에서는 추계론적 구분적선형시스템의 거동을 확률밀도함수를 이용하여 분석하는 반해석적 방법론의 개발과정 및 기본이론에 대하여 간략히 설명한다.

3.1 Markov Process

다음의 조건을 만족하는 확률과정(stochastic process)을 Markov process라고 부른다.

$$\begin{aligned} P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) \\ = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

조건확률밀도함수(conditional probability density function : PDF)는 바로 전 시간의 $x_{n-1}(t_{n-1})$

의 값에만 종속하고 그 이전의 값들인 $x_{n-2}(t_{n-2}), x_{n-3}(t_{n-3}), \dots, x_1(t_1)$ 에는 종속하지 않는다¹⁷⁾. 이러한 Markov process로 나타나는 시스템거동에 대한 확률밀도함수의 전개과정은 대응하는 Fokker-Planck 방정식을 풀어서 얻을 수 있다.

N 개의 변수를 갖는 일반적인 추계론적 미분방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_i = h_i(\mathbf{X}, t) + g_{ij}(\mathbf{X}, t)\Gamma_j(t) \quad (12)$$

여기서, \mathbf{X} 는 시간이 t 일 때, 확률과정의 상태 (state)를 나타내는 N 차원의 벡터이다. h 는 결정론적 하중벡터이고, g_{ij} 는 $N \times N$ 매트릭스의 요소이다. 식 (12)에서는 아인슈타인의 summation convention을 사용하고 있다. $\Gamma_j(t)$ 은 평균이 0이고 δ 함수에 비례하는 상관함수를 갖는, 즉, delta-correlated된 가우스 랜덤변수이며, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle \Gamma_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t') \quad (13)$$

여기서, δ_{ij} =Kronecker delta coefficient이다. Langevin force인 $\Gamma(t)$ 와 함께, 식 (13)의 확률과정은 Markov process가 된다¹⁷⁾.

식 (1)으로부터, 구분적선형시스템의 추계론적 미분방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\frac{\xi}{\beta}x_2 - R(x_1) + F_0\cos(t + \phi) + \eta(t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $\eta(t)$ 는 앞에서 정의한 것과 같이 delta-correlated된 가우스 백색노이즈이며, $\eta(t)$ 는 δ -correlated Langevin 하중이므로, 식 (14)으로 표현되는 구분적선형시스템의 확률과정은 이제 Markov process가 된다¹⁷⁾.

3.2 Fokker-Planck 방정식

확률밀도함수 $f(\mathbf{X}, t)$ 를 지배하는 Fokker-

Planck 방정식은 다음과 같은 일반적인 형태로 쓸 수 있다¹⁵⁾.

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = L_{FP}(\mathbf{X}, t)f(\mathbf{X}, t) \quad (15)$$

식 (15)에서, $L_{FP}(\mathbf{X}, t)$ 는 Fokker-Planck 연산자 (operator)로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L_{FP}(\mathbf{X}, t) &= -\frac{\partial}{\partial x_i}K_i(\mathbf{X}, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Q_{ij}(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에서, $K_i(\mathbf{X}, t)$ 와 $Q_{ij}(\mathbf{X}, t)$ 는 각각 drift 변수와 diffusion 매트릭스이다¹⁷⁾. 과도 확률밀도 함수 (transition PDF)인 $P(x, t | x', t')$ 은 특수한 초기조건인 $f(x, t') = \delta(x-x')$ 를 갖는 확률분포로써 식 (16)을 만족한다. 따라서 과도확률 밀도함수에 대한 Fokker-Planck 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{X}, t | \mathbf{X}', t')}{\partial t} &= L_{FP}(\mathbf{X}, t) \\ &\quad P(\mathbf{X}, t | \mathbf{X}', t') \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 Path-Integral Solution

식 (17)으로 표현되는 Fokker-Planck 방정식의 정식해 (formal solution)는 다음과 같이 범함수적분 (functional integration)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{x_0}^x D\mu(\dot{x}) \\ &\quad \exp\left[-\int_{t_0}^t L(x(t'), \dot{x}(t'))dt'\right] f(x_0, t_0) \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)에서, $D\mu(x)$ 는 적분약수 (integration measure), L 은 Onsager-Machlup 범함수이다. Path-integral해법의 이산형은 다음과 같이 표현된다²²⁾.

$$f(x, t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0 \\ n\tau = t - t_0}} \prod_{i=0}^{n-1} \int \dots \int (\mu dx_i) \exp\left[-\tau \sum_{j=0}^{n-1} L(x_{j+1}, x_j, \tau)\right] f(x_0, t_0) \quad (19)$$

미소시간증분인 τ 에 대하여, 확률밀도함수의 시간전개 (time evolution)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(X', t + \tau) = \int P_\tau(X', t + \tau | X_0, t_0) f(X_0, t_0) d^N x \quad (20)$$

여기서, $P_\tau(X'/X_0)$ 은 작은 시간간격 τ 에 대한 조건확률로써 short time propagator라고 불린다. 식 (20)에서, 부피요소 (volume element)는 다음과 같이 표시된다.

$$d^N x = dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (21)$$

식 (20)에서, 한 번의 적분기호만을 보였으나, 실질적으로는 N 개의 변수에 대하여 N 번의 적분을 실행하는 것을 뜻한다. 식 (20)은 다름아닌 Chapman-Kolmogorov equation이다. $n \rightarrow \infty$ 으로 정함으로써, 시간이 $\tau = t_0 + n\tau$ 일 때의 확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$f(X_n, t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \int dx_i P_\tau(X_{i+1}, X_i) \right\} f(x_0, t_0) \quad (22)$$

적합한 short time propagator $P_\tau(X_{i+1}|X_i)$ 를 얻기 위하여는 식 (22)을 Fokker-Planck방정식의 path-integral해인 식 (19)와 일치시켜야 한다.

미소시간증분에 대하여, Fokker-Planck방정식 (15)의 정식해는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$f(X', t + \tau) = [1 + \tau L_{FP} + 0(\tau^2)] f(X, t) \quad (23)$$

식 (23)을 n 번 반복함으로써 극한치인 $n \rightarrow \infty$ $\tau \rightarrow 0$ 에 대하여 다음과 같이 수렴한다²³⁾ (Wissel 1979).

$$f(X, t) \approx \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} [1 + \tau L_{FP}]^n f(X, t_0) \approx \exp[L_{FP}(t - t_0)] f(X, t_0) \quad (24)$$

short time propagator는 초기치인 $P_0(X/X_0)$ 를 이용하여 식 (23)으로부터 구할 수 있다.

$$P_\tau(X', t + \tau | X, t) = [1 + \tau L_{FP} + 0(\tau^2)] P_0 \quad (25)$$

$\tau = 0$ 에 대하여, 과도확률밀도 P 는 초기치 $P_0 = \delta(X' - X)$ 을 갖으며, 식 (25)은 다음과 같게 된다.

$$P_\tau(X', t + \tau | X, t) = [1 + \tau L_{FP} + 0(\tau^2)] \delta(X' - X) \quad (26)$$

여기서, X' 와 X 은 각각 전상태 (previous state) 및 후상태 (post state)를 나타낸다. N 개의 변수에 대한 함수는 다음과 같이 표시된다.

$$\delta(X) = \delta(X_1) \delta(X_2) \dots \delta(X_N) \quad (27)$$

Fokker-Planck연산자 L_{FP} 를 이용하여, 식 (25)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_\tau(X', t + \tau | X, t) = \delta(X' - X) - \frac{\partial}{\partial x_i} K_i(X) \delta(X' - X) \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Q_{ij}(X) \delta(X' - X) \tau \quad (28)$$

X' 과 X 를 새로운 변수 U 와 V 로 아래와 같이 변수치환을 한다.

$$U = X' - X \quad V = V(X', X) \quad (29)$$

역푸리에 변환 (inverse Fourier transformation) 등의 여러 단계를 거쳐서 식 (28)은 다시 아래와 같이 변환된다²³⁾.

$$P_i(X'|X) = (2\pi\tau)^{-\frac{N}{2}} \|Q\|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\tau \frac{Q_{ii}^{-1}}{2} \left(Q_{ik}^{(i)} + K_i - \frac{x_i' - x_i}{\tau} \right) \left(Q_{ij}^{(i)} + K_j + \frac{x_j' - x_j}{\tau} \right) + \tau K_i^{(i)} + \frac{1}{2} \tau Q_{ij}^{(ij)} \right\} \quad (30)$$

여기서 $\|Q\|$ 은 diffusion matrix $[Q_{ij}]$ 의 determinant이다.

식 (30)에서, Q_{ij} 와 K_i 은 아직 U, V 의 함수이므로 원래의 변수인 X' 와 X 로 바꾸어야 한다. 따라서, X' 과 X 로 표현되는 short time propagator는 결과적으로 아래와 같이 유도된다.

$$P_i(X'|X) = (2\pi\tau)^{-\frac{N}{2}} \|Q\|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\tau \frac{Q_{ii}^{-1}}{2} \left(-aQ_{ik}^{(i)}(R) + K_i(R) - \frac{x_i' - x_i}{\tau} \right) \left(-aQ_{ij}^{(i)}(R) + K_j(R) + \frac{x_j' - x_j}{\tau} \right) - a\tau K_i^{(i)}(R) + \frac{a^2}{2} \tau Q_{ij}^{(ij)}(R) \right\} \quad (31)$$

식 (31)에서,

$$R = aX' + bX \quad (32)$$

여기서, $a + b = 1, (0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1)$.

본 연구에서는 path-integral해를 얻기 위하여, 반복적인 수치해석방법을 도입하였다²²⁾. 시간이 t 로부터 $t + \tau$ 로 증가하는 한 번의 시간단계에 대하여 식 (22)은 다음과 같이 표현된다.

$$f(X', t + \tau) = \int P(X', t + \tau | X, t) f(X, t) d^N x \quad (33)$$

그리고, 확률밀도함수는 히스토그램으로 나타낼 수 있다고 가정하면,

$$f(X, t) = \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_N=1}^M \pi(x_1 - x_{i_1}) \pi(x_2 - x_{i_2}) \cdots \pi(x_N - x_{i_N}) f(X_i, t) \quad (34)$$

여기서, $f(X_i) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 은 정해진 구간에서의 평균 확률로 정하며, M 은 이산된 간격의 최대수이다. 식 (34)에서 $\pi(x - x_k)$ 은 다음과 같이 규정된다.

$$\pi(x - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_i - \frac{1}{2}\Delta x_{i-1} \leq x \leq x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

where $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

X 의 각 변수를 M_1, M_2, \dots, M_N 개의 조각으로 나눈 후, i 번째의 변수의 j 번째의 조각을 $x_{i(j)}$ 라고 정한다. 여기서, $i = 1, 2, \dots, N$ 이고, $j = 1, 2, \dots, M_i$ 이다. 이제, 식 (35)은 식 (34)의 이산화된 히스토그램을 이용하여 합으로 표현할 수 있다.

$$f(X^k, t + \tau) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{M_N} T_M(X^k, X^l) f(X^l, t) \quad (36)$$

여기서, 위첨자 k, l 은 각각 전상태와 후상태를 나타내며, 변수 X^k 와 X^l 는 아래와 같다.

$$X^k = \{x_1^k(t + \tau), x_2^k(t + \tau), \dots, x_N^k(t + \tau)\} \\ X^l = \{x_1^l(t), x_2^l(t), \dots, x_N^l(t)\} \quad (37)$$

이를 이용하면, N 개의 변수로 이루어진 확률과정에 대한 propagator 텐서 (tensor) $T_M(\tau)$ 는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$T_N(x) = \frac{2^N}{(\Delta x_{1(i_1-1)}^k + \Delta x_{1(i_1)}^k)(\Delta x_{2(i_2-1)}^k + \Delta x_{2(i_2)}^k) \cdots (\Delta x_{N(i_N-1)}^k + \Delta x_{N(i_N)}^k)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \int_{x_{1(i_1)}^k}^{x_{1(i_1)}^k + \frac{\Delta x_{1(i_1)}^k}{2}} dx_1^k & \int_{x_{2(i_2)}^k}^{x_{2(i_2)}^k + \frac{\Delta x_{2(i_2)}^k}{2}} dx_2^k & \cdots & \int_{x_{N(i_N)}^k}^{x_{N(i_N)}^k + \frac{\Delta x_{N(i_N)}^k}{2}} dx_N^k \\ \int_{x_{1(i_1)}^k}^{x_{1(i_1)}^k + \frac{\Delta x_{1(i_1)}^k}{2}} dx_1^k & \int_{x_{2(i_2)}^k}^{x_{2(i_2)}^k + \frac{\Delta x_{2(i_2)}^k}{2}} dx_2^k & \cdots & \int_{x_{N(i_N)}^k}^{x_{N(i_N)}^k + \frac{\Delta x_{N(i_N)}^k}{2}} dx_N^k \\ \int_{x_{1(i_1)}^k}^{x_{1(i_1)}^k + \frac{\Delta x_{1(i_1)}^k}{2}} dx_1^k & \int_{x_{2(i_2)}^k}^{x_{2(i_2)}^k + \frac{\Delta x_{2(i_2)}^k}{2}} dx_2^k & \cdots & \int_{x_{N(i_N)}^k}^{x_{N(i_N)}^k + \frac{\Delta x_{N(i_N)}^k}{2}} dx_N^k \end{array} \right)$$

$$P(X', t + \tau | X, t) \tag{38}$$

수치에러는 분포함수와 전파함수(propagation function)의 정규화성(normalizability)를 이용하여 극소화시킬 수 있다²²⁾.

3. 4 구분적선형시스템의 Fokker-Planck 방정식과 Short time Propagator

구분적선형시스템의 추계론적 미분방정식인 식(22)에 대한 Fokker-Planck방정식은 drift와 diffusion변수를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(X, t) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 f(X, t)) - \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & [(-2\xi x_2 - R(x_1) + F_0 \cos(\Omega t + \Phi)) f(X, t)] \\ & + \frac{q}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(X, t) \end{aligned} \tag{39}$$

여기서 q 는 노이즈강도이며, $R(x_1)$ 은 구분적선형시스템이 갖는 복원력을 뜻한다. 식(39)에 대응하는 short time propagator $P_t(X'|X)$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_t(x_1', x_2'; t + \tau | x_1, x_2; t) &= (2\pi\tau)^{-1} q^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} q^{-1} \left[-2\xi x_2 - R(x_1) \right. \right. \\ & \left. \left. + F_0 \cos(\Omega t + \Phi) - \frac{x_2' - x_2}{\tau} \right]^2\right\} \delta(x_2 - \frac{x_1' - x_1}{\tau}) \end{aligned} \tag{40}$$

식(40)에서 $\{x_1', x_2'\}$ 와 $\{x_1, x_2\}$ 은 각각 시스템의 short time propagation의 후상태와 전상태를 나타낸다.

4. 결과분석

구분적선형시스템은 조화, 열조화(subharmonic), 초조화(superharmonic) 그리고 혼돈거동을 포함한 다양한 응답거동을 보이는 것으로 밝혀졌다²⁴⁾. 결정론적 시스템에서 발견된 다양한 거동은 반해석적 방법을 이용하여 얻은 결합확률 밀도함수로부터 위상면 상의 확률영역에서 그 특성을 분석할 수 있다. Fokker-Planck방정식의 초기조건은 실제적으로 면적이 0이고 X 에서만 확률값을 갖는 델타함수로 표현되는 결정론적인 값으로 가정한다. 본 연구에서는 모든 경우에서 이 초기조건을 사용한다.

path-integral해법을 이용한 반해석적 방법에 의한 결과와 직접수치적분결과를 비교하여 반해석적 방법의 검증은 하여 보았다. 반해석적 방법과 수치해석의 결과는 조화하중에 더해준 백색노이즈의 정의에서 오는 차이로 인해 직접적으로 비교할 수는 없다. 직접수치해석에서의 백색노이즈의 분산은 유한값을 갖는 반면, Fokker-Planck방정식에서는 무한의 값을 갖는다. 이러한 점을 고려하면서 위상면 상에서의 밀도함수와 앙상블(ensemble)로부터 두 결과를 비교하였다 (Fig. 1). 앙상블의 샘플크기는 포인케어(Poincare)면에서 $N=1000$ 으로 이루어져 있으며, 두 결과 모두 가해진 여기력의 주기를 기준으로 50번째 사이클에서 구하였다. 그림에서 보듯이, 각 PDF는 대응하는 앙상블과 일치하는 분포를 보임으로써 path-integral해법은 시스템의 응답거동을 확률영역에서 잘 보여줄을 알 수 있다. 다음에 반해석적 방법을 이용한 결과에 대하여 정리하였다.

본 연구에서는 주기거동 및 혼돈거동의 특성을 모두 분석하였으며 주기거동으로는 주기배가곡선(bifurcation route) 상에서 혼돈거동의 발생점(onset of chaos)에서 멀리 떨어진 P-2열조화거동과 또한 혼돈거동의 발생점과 가까이에 위치한 P-2열조화거동을 선택하여 살펴보았다.

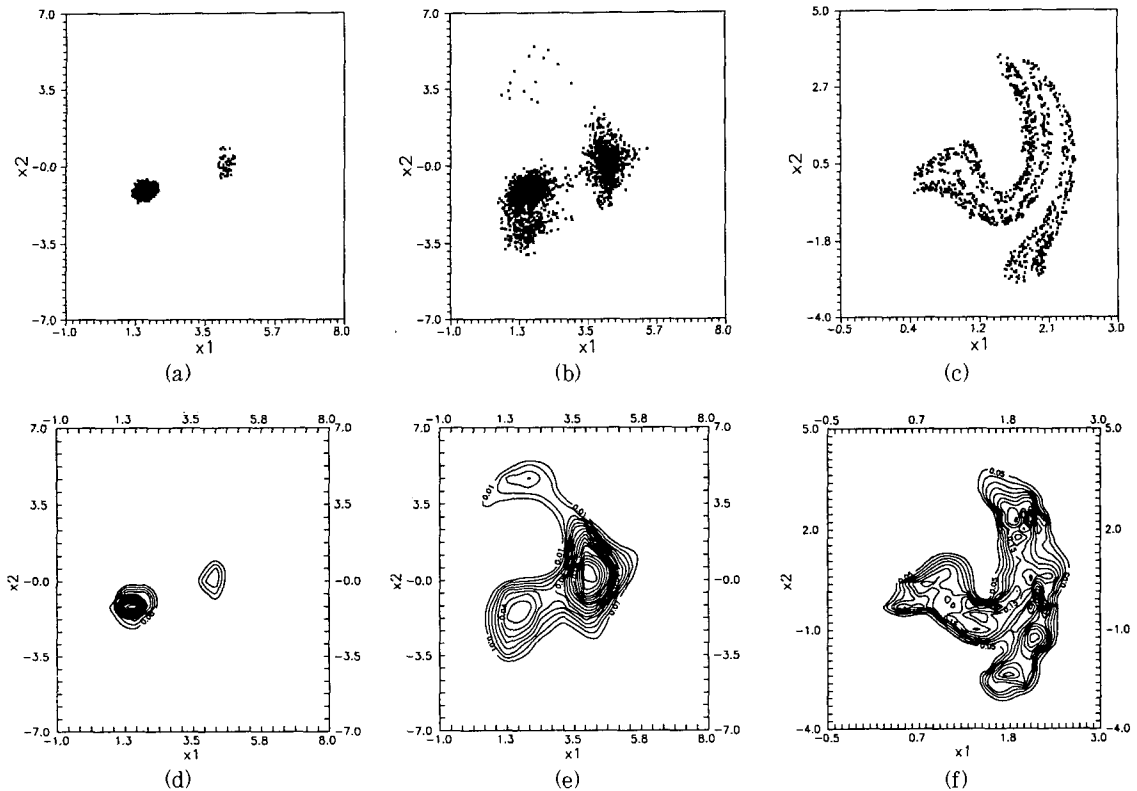


Fig. 1 Comparison of ensembles of numerical solutions(No. of realizations=1000) and steady-state PDF's of path integral solutions: (a), (d) two coexisting responses ($\xi=0.03, \alpha=10, \beta=1.9, F_0=4, D=0.08, q=0.0002$); (b), (e) multiple coexisting responses ($\xi=0.03, \alpha=10, \beta=1.9, F_0=4, D=0.2, q=0.002$); (c), (f) chaotic response ($\xi=0.03, \alpha=10, \beta=1, F_0=4.5, D=0.045, q=0.0003$).

우선, 주기거동에 대한 특성을 분석하기 위하여, 혼돈거동의 발생점에 가까운 P-2열조화거동을 검사하였으며, 위상면에서의 초기치와 결정론적 P-2열조화거동의 끌개(attractors)의 위치를 Fig. 2a에 나타내었다. 초기응답은 위상면의 적은 부분에 집중적으로 모여있으나, 첫 번째와 두 번째 사이클에서부터 이미 주기끌개(periodic attractor)쪽으로 이끌리고 있음을 PDF로부터 알 수 있다(Fig. 2b, c). 9, 10번째 사이클에서의 PDF는 각 사이클마다 응답양상불이 두개의 끌개를 오감을 보여줌으로써 P-2주기거동의 힘을 나타내고 있다. 이후, 응답이 집중되어 있는 확률분포의 경계로부터 적은 부분의 응답이 두개의 주기 끌개 사이로 모이는 현상을 관찰할 수 있다(Fig. 2d, e). 이러한 양상불의 돌출현상은

응답거동 중, 그 일부가 주기거동의 영역에서 탈출하는 것으로 또 다른 공존거동(coexisting response)의 존재를 시사하는 것이다. 마지막으로, 매 2사이클마다 같은 확률분포를 반복하면서 PDF는 정상상태(steady-state)에 도달하게 된다(Fig. 2h, i). P-2주기거동에 대한 PDF의 전개과정으로부터 발견된 제 3의 끌개는 P-1주기거동을 나타내며, 이러한 현상은 대부분의 양상불은 P-2 열조화거동을 유지하는 반면, 일부응답은 P-1 조화거동으로 변환한다는 것을 알 수 있다.

P-2응답은 노이즈강도가 $D=0.13$ 으로 증가할 때 까지 지탱하다가 노이즈강도가 더 높아질 경우($D=0.195$), P-2응답은 파괴되며, P-1응답이 나타나는 것은 이미 밝혀졌다²⁵⁾. PDF의 전개과정으로부터 P-2응답은 노이즈강도가 상대적으로

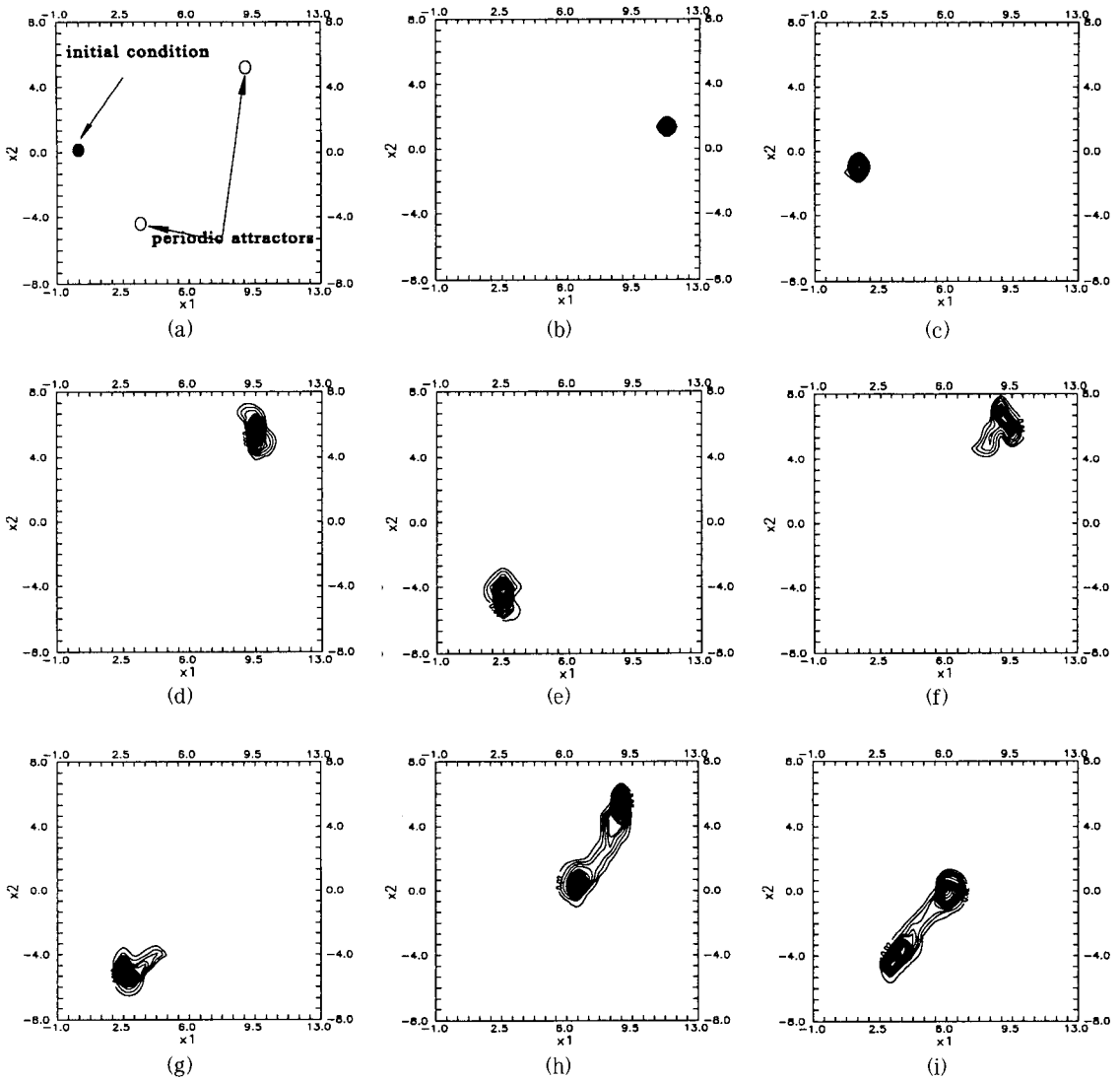


Fig. 2 Evolution of the joint probability density function $f(x_1, x_2; t)$ of a P-2 periodic response away from the bifurcation point in 2-D contour maps ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=2$, $F_0=6.5$, $q=0.0003$): (a) initial condition (\cdot) and periodic attractors (\circ); (b) 1st cycle, (c) 2nd cycle, (d) 9th cycle, (e) 10th cycle, (f) 11th cycle, (g) 12th cycle, (h) 49th cycle, (i) 50th cycle.

적은 경우에는 ($q=0.0003$), 위상면의 중앙에 위치한 P-1조화거동과 함께 그 응답을 계속해서 유지함을 밝혔다. 이 결과는 path-integral solution을 이용한 반해석적 방법은 성공적으로 직접수치해석에서 얻을 수 있는 정보를 제공함을 알 수 있다.

노이즈의 영향을 보다 자세히 분석하기 위하여

다양한 노이즈강도를 적용한 시스템의 응답거동에 대한 정상상태 (steady-state)의 PDF를 3차원 윤곽도를 통하여 관찰하였다 (Fig. 3). 대응하는 결정론적 시스템의 거동이 P-2열조화운동이므로 이를 보기 위하여 2사이클의 결과를 연속적으로 나타내었다. 노이즈강도가 매우 적은 경우

($q=0.00003$), PDF는 대부분의 응답이 P-2 응답을 보이며 단지 일부 응답만이 P-1 응답을 보임을 나타내고 있다(Fig. 3a, d). 노이즈강도가 증가한 경우($q=0.0003$), P-2와 P-1 응답의 발생 확률은 거의 동일함을 알 수 있으며(Fig. 3b, e), 노이즈강도가 매우 큰 경우($q=0.003$), P-2 주기 응답은 완전히 파괴되고 시스템의 응답 거동은 위상면에 랜덤하게 분포함과 함께 많은 부분의 응답이 P-1 응답을 보임을 알 수 있다(Fig. 3c, f). 이 결과로부터, P-1 응답은 노이즈강도가 강한 경우 상대적인 P-2 응답보다 강함을 알 수 있으며, 노이즈의 영향이 큰 경우, 결정론적 시스템에서 나타나는 주기 거동은 그 특성을 상실함을 알 수 있다.

랜덤동요된 시스템으로부터 얻은 하나의 응답 샘플의 관찰을 통하여 혼돈 거동의 발생점에 인접한 P-2 열조화 응답은 빠르게 사라지며 낮은 노이즈강도에서도 바로 혼돈 거동으로 변환되는 것은 이미 밝혀 졌다²⁵⁾. 혼돈 거동의 발생점에 인접한 P-2 열조화의 이러한 거동 특성을 응답 앙상블의 PDF의 전개로부터 조사해보았다(Fig. 4). Fig. 4a는 초기조건과 상응하는 결정론적 시스템의 P

-2 응답의 끝개의 위치를 나타내고 있다. 랜덤노이즈에 의해 동요된 주기 응답은 위치를 이동하여 1번 째와 2번 째 사이클에서 이미 초기치로부터 멀어지고 있다(Fig. 4b,c). 앞에서 관찰한 열조화 응답과는 달리 응답 전과는 시작부터 주기 응답은 실질적으로 파괴됨을 알 수 있다. 응답 앙상블을 이루는 개개의 응답 점들은 하나의 위치에 모여서 2개의 주기 끝개 사이를 오가기 보다는 확률 밀도 함수로 볼 때, 2번 째 사이클에서 넓게 퍼져 가는 현상을 보이고 있다. 3번 째 사이클에서, 대부분의 응답은 주기 끝개 주위에 모여 있으나 응답의 일부가 끝개로부터 떨어져 감을 보이고 있다(Fig. 4d). 5번 째 사이클에 이르러서 PDF는 거의 정상 상태에 이르게 되고 응답 앙상블의 분포는 혼돈 거동의 그것과 유사함을 알 수 있다(Fig. 4e). 정상 상태에 이른 PDF는 확률 영역 위에서 완전한 혼돈 거동의 끝개를 보임으로써 P-2 응답이 혼돈 거동으로 변환되어 혼돈 거동의 발생 위치에서 상대적으로 멀리 떨어진 P-2 응답과는 달리 주기 운동의 특성을 완전히 상실한 것을 나타내고 있다(Fig. 4f).

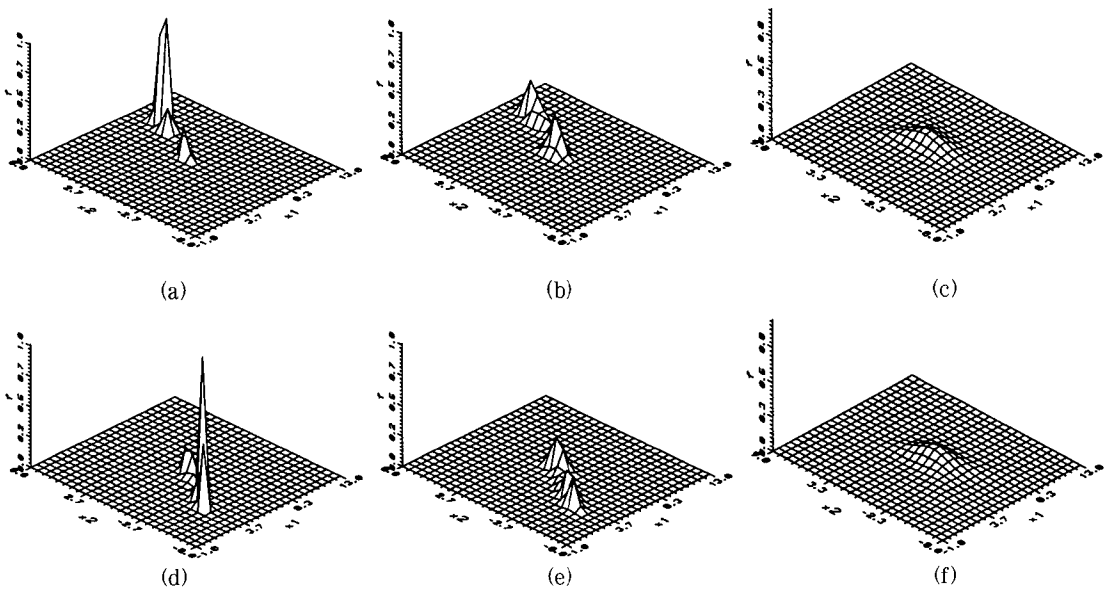


Fig. 3 Steady state probability density functions $f(x_1, x_2; t)$ of P-2 periodic responses away from the bifurcation point in 3-D contour maps with different noise intensities ($\xi=0.03, \alpha=10, \beta=2, F_0=6.5$): (a), (d) $q=0.00003$; (b), (e) $q=0.0003$; (c), (f) $q=0.003$; (a),(b),(c) 49th cycle; (d),(e),(f) 50th cycle.

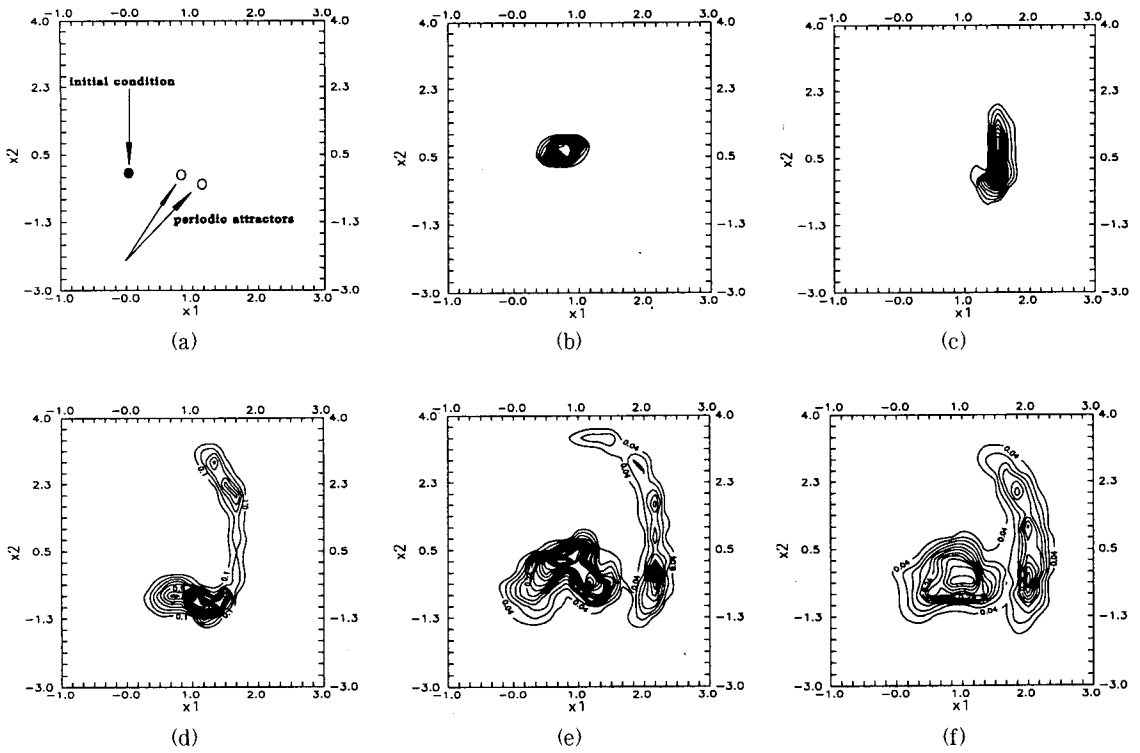


Fig. 4 Evolution of the joint probability density function $f(x_1, x_2; t)$ of a perturbed P-2 periodic response near the bifurcation point in 2-D contour maps ($\xi=0.03, \alpha=10, \beta=1, F_c=3, q=0.0002$): (a) initial condition (\cdot) and periodic attractors (o); (b) 1st cycle, (c) 2nd cycle, (d) 3rd cycle, (e) 5th cycle, (f) 50th cycle.

시스템의 응답거동으로 이루어진 앙상블에 대한 PDF의 관찰로부터 직접수치해석결과의 결과와 같은 경향을 얻었으며, 이는 반 해석적 방법론이 올바른 결과를 제시함을 다시 한번 검증하는 것과 같다. 또한 반해석적 방법인 PIS(Path-integral solution)은 확률적으로 응답의 전개과정을 보다 세세하게 보여줄 수 있다.

결정론적 분석으로부터 구분적선형시스템은 다양한 주기 및 반주기응답거동은 물론 풍부한 혼돈거동을 보임이 밝혀졌다²⁴⁾. 이번에는 PIS 절차를 이용하여 랜덤동요된 혼돈거동을 역시 확률영역에서 관찰하였다. 우선 PDF의 전개과정을 살펴으로써 응답앙상블의 발전과정을 살펴보았다(Fig. 5). 시스템은 상응하는 결정론적 시스템과 똑같은 매개변수로 이루어졌다(Fig. 1c 참조). 열

조화거동과는 달리 혼돈거동의 앙상블은 위상면에서 빠르게 상응하는 결정론적 시스템의 혼돈거동과 같은 분포를 형성함을 쉽게 볼 수 있다. 2번째 사이클에서 PDF는 앙상블은 이미 넓게 분포하며 위상면에서 혼돈거동의 끝계가 이루는 분포의 일부분을 채워감을 보여주고 있다(Fig. 5b). 3번째 사이클에서 앙상블의 분포는 그 외형상 혼돈거동의 형상을 이루고 있음을 알 수 있으며, 4번째 사이클에서는 앙상블의 분포를 보이는 PDF가 상응하는 혼돈거동의 끝계의 형태를 완전히 보여주고 있다(Fig. 5c, d). 이후 PDF는 안정되면서 확실한 혼돈거동의 프랙탈 구조(fractal structure)를 잘 보여주고 있으며, 반복된 확률분포를 보임으로써 포인케어샘플점(Poincare sampled points)으로 이루어진 응답의 확률과정이 정상과정(stationary

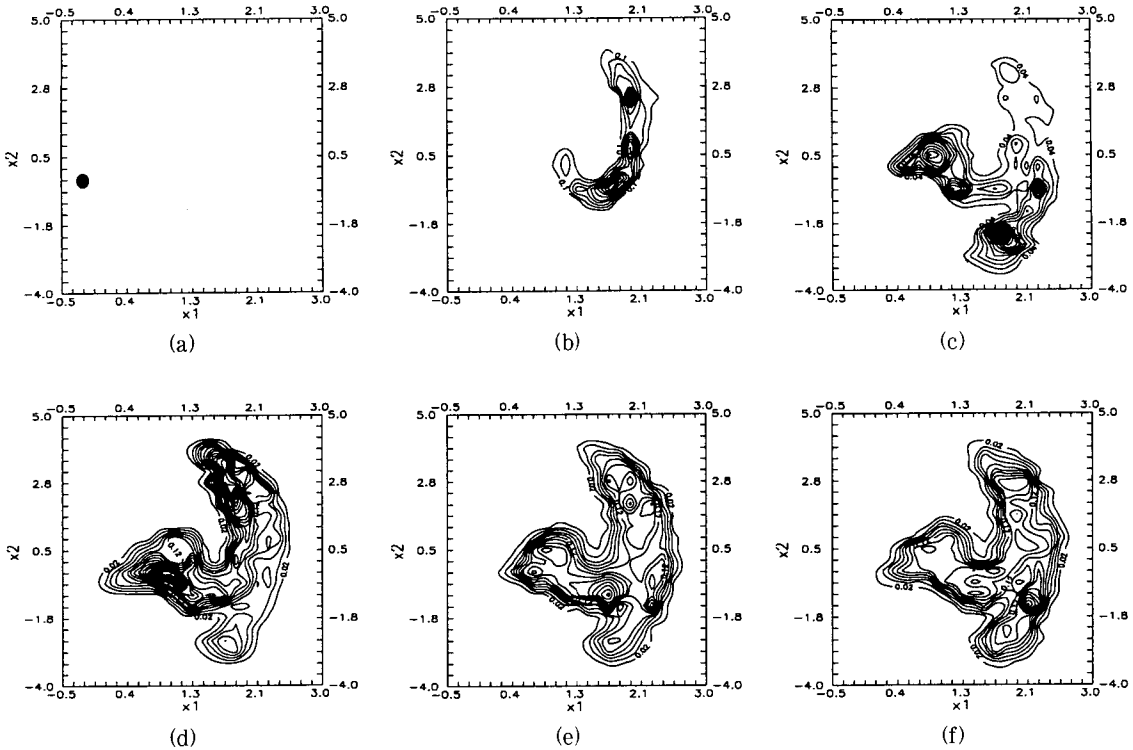


Fig. 5 Evolution of the joint probability density function $f(x_1, x_2; t)$ of a perturbed chaotic response in 2-D contour maps ($\xi=0.03, \alpha=10, \beta=1, F_0=4.5, q=0.0002$): (a) initial condition; (b) 2nd cycle, (c) 3rd cycle, (d) 4th cycle, (e) 6th cycle, (f) 50th cycle.

process)임을 밝히고 있다 (Fig. 5e, f). 또한, 하나의 응답구조와 같은 형태를 보임으로써 에르고드과정임도 보이고 있다.

다양한 노이즈강도를 가해줌으로써 혼돈거동에 미치는 노이즈의 영향 역시 반 해석적 절차에 의해서 구한 시스템의 응답거동에 대한 정상상태의 PDF를 통하여 분석하였으며, 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 노이즈강도가 매우 작은 경우 ($q=0.0002$), PDF의 경계면은 혼돈거동의 프랙탈구조를 그대로 유지함을 알 수 있다 (Fig. 6a). 좀 더 큰 노이즈강도를 가했을 경우 ($q=0.0006$), 응답양상들의 일부가 PDF 경계선에서 낮은 확률 값이지만 밖으로 확장됨을 보이고 있다 (Fig. 6b). 노이즈의 강도가 10배 더 커진 경우 ($q=0.002$), PDF는 양상들이 더욱 넓게 퍼져있음을 보이며 노이즈가 적은 경우와는 달리 시스템의 거동에서 혼

돈거동이 보이는 섬세한 구조는 더 이상 식별하기 어려움을 알 수 있다 (Fig. 6c). 그러나 PDF의 윤곽선의 형태가 혼돈거동의 그것과 유사함을 쉽게 볼 수 있으며, 이는 상당한 수준의 노이즈가 있는 상황에서도 혼돈거동의 자취가 남아있음을 시사한다. 노이즈의 강도가 더욱 커지면 ($q=0.01$), 응답양상들은 상응하는 결정론적 시스템이 보여주던 응답구조는 완전히 상실하게 되고 일반적인 랜덤분포를 이루게 된다 (Fig. 6d).

5. 결 론

본 연구에서는 구분적선형시스템의 추계론적 미분방정식에 상응하는 Fokker-Planck 방정식을 구하고 그 해인 path-integral solution을 이용하여 위상면 상에서의 시스템의 동적거동을 예측할

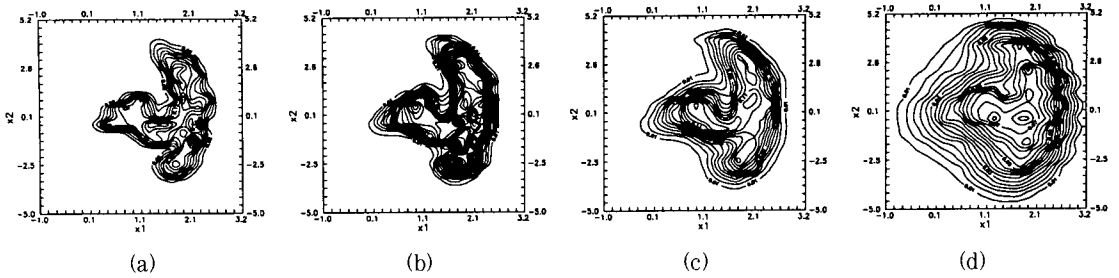


Fig. 6 Steady state probability density functions showing the effect of noise to the chaotic response with various noise intensities in 2-D contour maps ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=4.5$): $t=10$ th cycle; (a) $q=0.0002$, (b) $q=0.0006$, (c) $q=0.002$, (d) $q=0.01$.

수 있는 반해석적 방법을 개발하였다. 반해석적 방법을 통하여 구한 정상상태의 결합확률밀도함수와 초기치로부터의 전개과정의 관찰로부터 구분적선형시스템의 동적거동에 대한 특성 및 노이즈의 영향을 분석하였다.

시스템이 소유하고 있는 다양한 응답거동에 대한 노이즈의 영향을 분석해 본 결과, 노이즈는 결정론적 시스템에서 발견될 수 있는 주기 및 혼돈거동을 궁극적으로 파괴하는 것을 결합밀도함수로부터 확인하였다. 주기거동의 특성은 매개변수영역 상에서의 거동발생위치에 지배를 받는 것을 알 수 있었다. 혼돈거동의 발생위치로부터 멀리 떨어져 있는 주기거동은 혼돈거동의 발생위치에 가까이 위치한 주기거동에 비해 거동특성을 강하게 유지함을 알았다. 또한 조화하중에 첨가된 노이즈는 혼돈거동 근처에서 발견되는 주기거동을 혼돈거동으로 전환시킴도 발견하였다. 특기할 만한 결과로써 결정론적 시스템에서는 초기치의 동요로부터만 볼 수 있었던 공존거동이 동일한 초기치를 갖더라도 외부동요(노이즈)에 의해서 발생할 수 있다는 사실이며 결합밀도함수는 이러한 경향을 보다 뚜렷이 보여준다는 것을 밝혔다.

결합밀도함수의 전개 및 정상상태를 분석해본 결과, 혼돈거동은 주기거동에 비해 끌개의 힘이 강함을 알 수 있었다. 이러한 혼돈거동의 자취는 결합밀도함수의 윤곽선의 형태를 살핌으로써 노이즈가 있는 환경에서도 오랫동안 잔재한다는 것을 알았다. 그러나 혼돈거동의 자취는 노이즈강도가 증가하면서 점점 약해지며 궁극적으로 완전

히 사라진다는 것도 밝혔다.

본 연구에서 개발한 반해석적 예측기법은 구분적선형시스템의 동적거동에 대하여 올바른 정보를 제공하고 특별한 거동의 세기, 즉, 외부노이즈에 의한 동요에 버티는 능력에 대하여 확률영역 상에서 뚜렷이 나타냄을 밝혔다. 본 연구에서 개발된 예측절차는 고성능 미니컴퓨터를 이용할 경우, 응답확률과정의 결합확률밀도함수의 전개과정을 제공함으로써 시스템의 거동을 추계론적으로 예측하는데 적용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. Davies, H. G. and Liu, Q., "The Response Envelope Probability Density Function of a Duffing Oscillator with Random Narrow-Band Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, 139, 1990, pp.1~8
2. Feigenbaum, M. J., "Universal Behavior in Nonlinear Systems", *Physica 7D*, 1983, pp.16~39
3. Gottlieb, Oded and Yim, Solomon C. S., "Nonlinear Oscillations, Bifurcations and Chaos in a Multi-Point Mooring System with a Geometric Nonlinearity", *Applied Ocean Research*, 14, 1992, pp.241~257
4. Graham, R., "Path Integral Formulation of General Diffusion Processes", *Zeitschrift fr Physik B*, 26, 1977, pp.281~290

5. Haken, H., "Generalized Onsager-Machlup Function and Classes of Path Integral Solutions of the Fokker-Planck Equation and the Master Equation", *Zeitschrift fr Physik B*, 24, 1976, pp.321 ~ 326
6. Huang, Y. M., Krousgrill, C. M. and Bajaj, A. K., "Dynamic Behavior of Offshore Structures with Bilinear Stiffness", *Journal of Fluids and Structures*, 3, 1989, pp405 ~ 422
7. Jung, P. and Hanggi, P., "Invariant Measure of a Driven Nonlinear Oscillator with External Noise", *Physical Review Letters*, 65 (27), 1990, pp.3365 ~ 3368
8. Kapitaniak, Tomasz, *Chaos in Systems with Noise*, World Scientific, Singapore, 1988
9. Lau, S. L. and Zhang, W. -S., "Nonlinear Vibrations of Piecewise-Linear Systems by Incremental Harmonic Balance Method", *Journal of Applied Mechanics*, March 59, 1992, pp.153 ~ 160
10. Maezawa, S. and Furukawa, S., "Superharmonic Resonance in Piecewise-Linear System", *Bulletin of the JSME*, 16, 1973, pp. 931 ~ 941
11. Mha, H-S. and Yim, S.C.S., "Stochastic Dynamics of a Piecewise-Linear Ocean System", *Proceedings of the Seventh International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, Vol. 3, 1997, pp.1643 ~ 1648
12. Moon, F. C., "Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors", *Journal of Applied Mechanics*, Sep. 47, 1980, pp.638 ~ 644
13. Natsiavas, S., "Periodic Response and Stability of Oscillators with Symmetric Trilinear Restoring Force", *Journal of Sound and Vibration*, 134 (2), 1989, pp.315 ~ 331
14. Natsiavas, S., "On the Dynamics of Oscillators with Bi-linear Damping and Stiffness", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 25 (5), 1990, pp. 535 ~ 554
15. Ochi, M. K., *Applied Probability & Stochastic Processes in Engineering and Physical Sciences*, John Wiley & Sons, New York, 1990
16. Poddar, B., Moon, F. C. and Mukherjee, S., "Chaotic Motion of an Elastic Plastic Beam", *Journal of Applied Mechanics*, 55, March, 1988, pp.185 ~ 189
17. Risken, H., *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984
18. Shaw, S. W. and Holmes, P. J., "A periodically Forced Piecewise Linear Oscillator", *Journal of Sound and Vibration*, 90 (1), 1983, pp.129 ~ 155
19. Shinozuka, M., "Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes", *Journal of the Acoustical Society of America*, 49, 1977, pp.357 ~ 367
20. Tang, D. M. and Dowell, E. H., "On the Threshold Force for Chaotic Motions for a Forced Buckled Beam", *Journal of Applied Mechanics*, 55, March, 1988, pp.190 ~ 196
21. Thompson, J. M. T., Bokaian, A. R. and Ghaffari, R., "Subharmonic and Chaotic Motions of Compliant Offshore Structures and Articulated Mooring Towers." *Journal of Energy Resources Technology*, 106, 1984, pp.106 ~ 198
22. Wehner, M. F. and Wolfer, W. G., "Numerical evaluation of path-integral solutions to Fokker-Planck equations", *Physical Review A*, 27 (5), 1983, pp.2663 ~ 2670
23. Wissel, C., "Manifolds of Equivalent Path Integral Solutions of the Fokker-Planck Equation", *Zeitschrift fr Physik B*, 35, 1979, pp.185 ~ 191
24. 마 호성, "구분적선형시스템을 이용한 해양구조물의 거동분석", *전산구조공학회는문집 제 10권 제4호*, 1997, pp.251 ~ 265
25. 마 호성, "구분적선형 해양구조물의 비선형거동에 미치는 노이즈의 영향." *대한토목학회논문집, 제17권 제1-6호*, 1997, pp.823 ~ 835
(접수일자 : 1999. 4. 20)