

변형률 경화효과를 고려한 탄소성 균열판의 p -Version 유한요소해석

p -Version Finite Element Analysis of Elasto-Plastic Cracked Plates Including Strain Hardening Effects

우 광 성*
Woo, Kwang-Sung

홍 종 현**
Hong, Chong-Hyun

윤 영 필***
Yun, Young-Pil

요 지

선형탄성파괴해석은 균열을 갖는 변형률 경화재료의 파괴거동을 예측하는데 불충분하기 때문에 최근에는 균열선단부에서 대규모 소성역을 갖는 균열체에 적용할 수 있는 많은 파괴역학개념이 제안되고 있다. 따라서, 본 연구에서는 대규모항복 조건하의 연성파괴를 보이는 평판을 정확하게 해석할 수 있는 새로운 유한요소모델을 제시하고자 한다. 균열선단부의 응력장을 정의하는데 가장 지배적인 파괴매개변수인 J -적분값과 소성역의 크기 및 형상을 J -적분법과 등가영역적분법을 통해 파괴거동을 설명할 수 있도록 증분소성이론에 기초를 둔 p -version 유한요소해석이 채택되었다. 제안된 유한요소모델에 의한 수치해석결과는 이론해와 h -version 유한요소해석과 비교되었다.

핵심용어 : 선형탄성파괴해석, 대규모항복, 증분소성이론, J -적분값, 소성역의 형상, J -적분법, 등가영역적분법, p -version 유한요소해석

Abstract

Because the linear elastic fracture analysis has been proved to be insufficient in predicting the failure of strain hardening materials, in recent years, a number of fracture concepts have been studied which remain applicable in the presence of plasticity near a crack tip. This work thereby presents a new finite element model to analyze plane problems of ductile fracture under large-scale yielding conditions. Based on the incremental theory of plasticity, the p -version finite element analysis is employed to account for the values of J -integral, the most dominant fracture parameter, and the shape of plastic zone near a crack tip by using the J -integral method and equivalent domain integral method. The numerical results by the proposed model are compared with the theoretical solutions in literatures and the numerical solutions by the h -version of F.E.M..

Keywords : linear fracture analysis, large-scale yielding, incremental theory of plasticity, the values of J -integral, shape of plastic zone, J -integral method, equivalent domain integral method, p -version finite element analysis

* 정회원 · 영남대학교 토목공학과, 부교수

** 탐라대학교 공학부 토목환경공학전공, 전임강사

*** 목포과학대학 토목공학과, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2000년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

종래의 선형탄성파괴역학(Linear Elastic Fracture Mechanics: 이하 LEFM) 이론은 균열을 갖는 연성재료의 파괴거동을 규명하는데는 한계가 있다. 왜냐하면, 강재와 같은 연성재료는 균열선단부근에서 무시할 수 없는 정도의 크기로 소성역(plastic zone)이 확장되어 응력재분배(stress redistribution) 현상이 발생될 뿐만 아니라 균열의 진전양상도 초기의 날카로운 균열선단면(sharp crack)에서 점차 무딘 균열선단면(blunted crack)으로 변하여 균열진전속도를 더디게 하며 중국에는 Elber¹¹⁾가 지적인 균열 닫힘(crack closure)현상을 유발할 수도 있기 때문이다. 따라서, 소성역의 크기와 형상은 주요한 연구 과제로 대두된다. Irwin²⁾과 Dugdale³⁾의 이론적 가설에 의한 소성역의 형상과 크기는 선형탄성파괴역학에서 사용되는 응력확대계수 K 를 사용하여 정의되어 있고, 균열선단부에서 발생하는 소성역으로 인한 응력재분배효과가 적절히 설명되어 있지 않는 K -지배 파괴역학이론(K -dominant Fracture Mechanics)에 근거를 두고 있는데 문제점이 있다. 또한, 응력장의 정의는 주로 HRR 공식(Hutchinson-Rice-Rosengren Formula)에 의해 표현되나 이 역시 균열선단부에서의 파괴매개변수인 J -적분값을 산정해야 하는 문제가 발생되는데 응력확대계수 K 와 달리 이론해나 경험식에 의해 구할 수 없는 한계가 있다. 따라서, J -지배 파괴역학이론(J -dominant Fracture Mechanics)이 필요하게 되는 것이다. 또한, 응력장을 정의하기 위해서는 J -적분값이 필수적인데 이를 계산할 수 있는 간편식이 제안되어 있지 않을 뿐만 아니라 많은 재료상수값들을 알아야만 적용이 가능한 단점을 보인다.

Broek⁴⁾은 소성역의 크기를 유한요소법, 단순가정에 기초를 둔 이론해, 그리고 실험을 통해 비교하였는데 이론해와 유한요소법에 의한 결과에는 상당한 차이가 있었고 실험에 의한 결과와 유한요소법을 이용한 결과에는 근사한 결과를 나타내지만 실험에 의한 방법에도 측정에 어려움이 있다는 것을 보여 주었다.

한편, 탄소성 균열판의 응력과 변형률 분포를 위한 단순한 근사법으로 Neuber의 법칙⁵⁾이 사용되나 균열선단부의 응력장이 과대평가되는 문제점을 보였

다. Swedlow⁶⁾는 삼각형 유한요소를 이용하여 높은 응력과 변형률분포를 가지는 균열선단부를 조밀한 체눈설계를 수행하여 해석하였지만 결과는 역시 만족스럽지 못하였다. 따라서, Benzley⁷⁾은 특별균열선단요소를 사용하고 von Mises의 항복기준을 사용하여 일반균열(single edged crack) 해석을 수행하였으며, Barsoum⁸⁾에 의해 요소수를 줄이고 해석시간도 감소시키며 동시에 해석결과의 정확도를 높이기 위한 삼각형 4분점요소(triangular quarter-point element)가 도입되었지만 자동체눈설계가 곤란하고 특별요소에 대한 사전지식이 필요한 단점이 지적되었다. Wilson⁹⁾은 탄소성균열문제를 해석하기 위해 지금까지 개발된 여러 가지 유한요소 프로그램을 소개하여 비교하였고, Levy¹⁰⁾는 유한요소법을 이용하여 면내력을 받는 탄소성평판문제를 해석하였고, Jones¹¹⁾는 휨을 받는 탄소성균열판 문제를 해석하였다. Gdoutos¹²⁾등은 인장력을 받는 균열판의 소성역 형상을 하중의 함수로 도시하였다.

이와 같이 여러 학자들은 유한요소법을 이용하여 HRR(Hutchinson-Rice-Rosengren)^{13),14)} 응력특이장에서의 응력과 변형률, 그리고 평면응력과 평면변형의 가정에 따른 소성역의 형상과 크기를 주로 산정하려고 하였다.

한편, McMeeking¹⁵⁾, Stump¹⁶⁾ 등의 연구에 의하면 균열선단부에서 소성역이 발생된 균열판의 경우 적분경로에 관계없이 J -적분값이 일정하다는 Rice¹⁷⁾의 경로독립성(path-independence) 학설이 수정되어야 한다고 지적하고 있다. 즉, 적분경로가 균열선단부의 소성역을 지날 때의 J -적분값은 경로종속성(path-dependence)을 주장하였으며, 이는 Sivaneri¹⁸⁾의 모아레실험(Moire interferometer)에 의해 뒷받침되었으며 Kuang¹⁹⁾의 후속적인 연구에서도 입증된 바 있다. 그러므로, 이에 대한 검증 문제도 많은 연구자들의 연구과제가 되고 있다.

따라서, 본 연구에서는 균열선단부 소성역의 영향을 고려하여 정확한 J -적분값을 산정할 수 있는 p -version 탄소성 균열모델을 제안하는 것이 연구의 목적이라 할 수 있다. 이를 위해 LEFM해석에서 높은 정확도와 신뢰성을 입증한 바²⁰⁾ 있는 기존의 선형탄성해석만이 가능한 평면응력/변형 p -version 유한요소 프로그램에, 재료의 탄성-비선형 변형률경화까지 고려할 수 있도록 증분소성이론을 확장하여 탄

소성해석을 가능하게 하였다. 또한, 균열선단부의 균열매개변수인 J -적분값을 계산할 수 있도록 J -적분법과 등가영역적분법(equivalent domain integral method)의 알고리즘을 p -version 유한요소법에 적용할 수 있도록 수정한 연구목적용 프로그램 FAPP (Fracture Analysis Program by P -version of F.E.M.)을 개발하였다. 이 프로그램을 사용하여 균열선단부의 소성역 크기 및 형상, 그리고 응력장의 파와과, 논란이 되고 있는 적분경로가 균열선단부의 소성역을 지날 때 J -적분값의 경로종속성(path-dependence) 여부를 확인하고자 하였다. 수치해석 결과는 기존 연구자의 결과와 범용구조해석 프로그램인 ADINA(Version 7.0) 및 serendipity 8-절점 요소를 사용한 Owen²¹⁾의 h -version 프로그램과 비교하여 제안된 모델의 유용성을 평가하고자 한다.

2. 탄소성 파괴역학이론

2.1 Irwin과 Dugdale의 가설

평면변형 또는 평면응력 상태에서 소성역의 크기를 대략적으로 평가하는 것은 다음과 같다. 즉, 균열선단에서 극좌표계를 이용하여 $\theta=0^\circ$ 인 면에 직각 방향의 응력 σ_{yy} 의 크기가 일축응력시의 항복응력 σ_0 이상인 거리 r_p 까지를 소성역의 거리라고 간주할 수 있다. 그러나 실제 소성역의 크기는 응력의 재분배 효과를 고려해야 하기 때문에 이보다 커야 함은 명백하다. Irwin²⁾은 균열선단에서 x 축 방향으로 소성역의 크기를 단순히 r_p 의 두배로 간주하여 소성역의 크기로 보정하였다. Dugdale³⁾은 실제균열길이 보다 길게 예측하는 유효균열길이(effective crack length) 개념을 도입하고 균열선단부에는 소성역에 의한 재료의 이질화(dislocation)가 발생되어 균열을 닫으려는 썸기력(wedge force)이 발생되는 것으로 가정하였다. 그러나, Irwin과 Dugdale의 소성역 크기는 LEFM에서 사용하는 응력확대계수 K 를 이용하여 표현하였기 때문에 소규모 항복(small scale yielding) 상태 즉, 소성역의 크기가 작은 경우를 대상으로 하고 있다. 따라서, 소성역의 크기가 클 경우에는 적용하기가 부적당하다는 것을

알 수 있다. 한편, Irwin과 Dugdale이 제시한 x 축 상에서의 소성역의 크기 개념을 확대하여 θ 가 0이 아닌 경우로 확장하면 von-Mises 항복기준을 사용하여 식(1)과 같이 나타낼 수 있고 소성역의 형상을 $r_p / (K_I / \pi \sigma_0)^2$ 로 무차원화하여 도시하면 Fig. 1과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Plane Strain :} \\ r_p(\theta) &= \frac{K^2}{4\pi\sigma_0^2} \left[\frac{3}{2} \sin^2\theta + (1-2\nu)^2(1+\cos\theta) \right] \\ \text{Plane Stress :} \\ r_p(\theta) &= \frac{K^2}{4\pi\sigma_0^2} \left[1 + \frac{3}{2} \sin^2\theta + \cos\theta \right] \end{aligned} \quad (1)$$

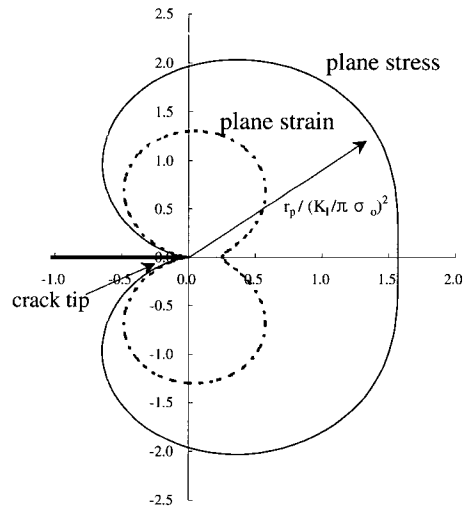


Fig. 1 Estimation of plastic zone by von-Mises yield criteria

여기서, 주의할 점은 Irwin과 Dugdale에 의한 소성역의 크기 및 형상의 차이는 응력확대계수 K 에 의해 결정되며 Irwin에 의하면 식(2)와 같으며 반복법에 의해 구할 수 있다.

$$K = C\sigma\sqrt{\pi\left(a + \frac{K^2}{2\pi\sigma_0}\right)} \quad (2)$$

여기서, C 는 보정계수이고 σ 는 작용되는 인장응력을 각각 나타낸다. 반면에, Dugdale은 식(3)을 제안하였다.

$$K = 2\mu\sqrt{\frac{a}{\pi}} \arccos \frac{s}{a} \quad (3)$$

여기서, μ 는 단위두께당 작용하는 썸기력을 나타내며 s 는 균열선단에서 부터 썸기력이 분포되어 있는 구간을 의미한다.

2.2 HRR 응력특이장

Hutchinson, Rice 그리고 Rosengren^{13),14)}은 각각 독립적으로 지수함수로 정의되는 변형경화재료 (power-law hardening material)에 대한 균열선단 부근의 응력장을 표현하였으며, 소성역의 응력장 및 변형률장을 HRR 특이성(HRR singularity)이라고 정의하였다. 이들은 균열선단 부근에서의 탄성 변형률은 소성변형률에 비교하여 무시할 만큼 작다고 가정하였다. HRR 특이성은 선형탄성해가 적용되지 않는 소성역(plastic zone)에서 J -적분값을 이용하여 응력과 변형률을 나타낼 수 있는데 식(4)와 같다. 즉, HRR 특이성이 적용되는 영역은 균열선단 부근의 소성역 내부라는 것에 주의해야 하고 탄성변형률 성분을 무시했다는 것에 유의하여야 한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{HRR} &= \sigma_o \left(\frac{EJ}{a\sigma_o^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta, n) \\ \epsilon_{ij}^{HRR} &= \alpha \epsilon_o \left(\frac{EJ}{a\sigma_o^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \hat{\epsilon}_{ij}(\theta, n) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, E : Young 계수, σ_o : 항복응력, ϵ_o : 항복 변형률, I_n : n 에 따른 상수, θ, r : 균열선단 좌표계, n : 변형률 경화지수, $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\epsilon}_{ij}$: θ, n 에 관한 무차원 응력과 변형률을 나타낸다. 따라서, 균열선단부의 응력장 및 변형률장을 정의하기 위해서는 많은 재료의 특성값들이 필요하게 되므로 실제 사용하 기에는 번거로움이 따른다.

한편, 균열선단에 매우 근접한 부위에서는 대변형 영역(large strain zone)으로 HRR 특이성이 적용되지 않는 구역이다. 왜냐하면, 균열선단의 대변형이 균열을 무디게(blunted crack) 하는데 HRR 특이성은 이러한 효과를 고려하고 있지 않기 때문이다. 균열선단의 응력장에 대한 소성의 영향에 대해서 Fig. 2에 나타내었다. 균열선단에서부터 무차원화된 길이에 대한 y 방향의 응력 $\log \sigma_{yy}$ 가 도시되었다. Fig. 2(a)는 소규모 항복(small scale yielding)인 경우로 K 와 J 가 균열선단의 조건을 대표하는 파괴 매개변수로 사용되고 K -지배영역(K -dominant zone)에서는 응력이 $1/\sqrt{r}$ 에 비례하고 소성역 내부에서는 HRR 이론이 사용되고 응력은 $r^{-1/(n+1)}$ 에 비례한다. Fig. 2(b)에서는 탄소성 조건인 경우를 나타내고 있으며 K -영역이 사라지고 J -지배영역(J -dominant zone)만 일부 존재하게 된다. Fig. 2(c)에서는 대변형 영역이 넓게 분포된 모습을 보여주며 K 나 J 가 적용되지 않는다. 따라서, 독립매개

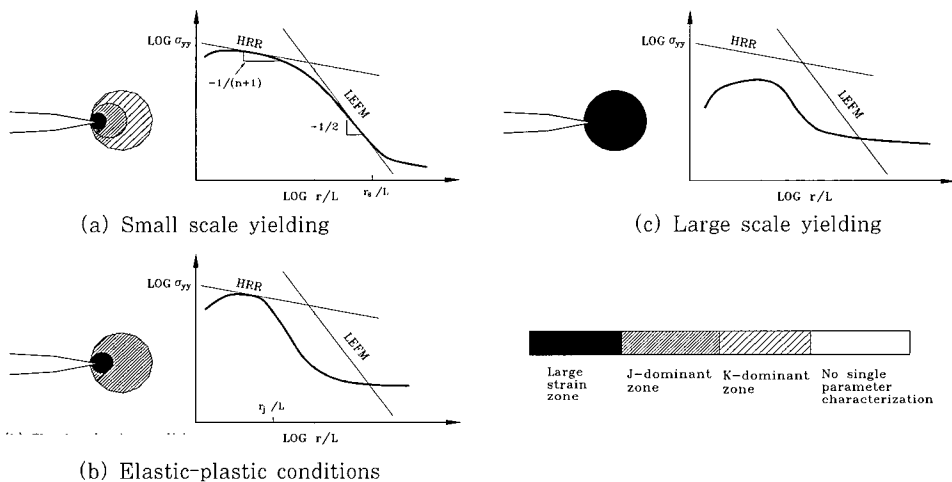


Fig. 2 Stress Field in the vicinity of a crack-tip

변수로는 대변형 영역을 표현하기에는 부적합하다.

3. p -Version 탄소성 유한요소 모델

3.1 제안모델의 개요

본 연구에서 제안하는 p -version 탄소성 균열모델의 개요는 다음과 같이 세가지로 요약해볼 수 있다. 첫째는, 탄소성이론으로 증분소성이론(incremental theory of plasticity)에 기초를 두었다. 즉, Tresca 또는 von-Mises 항복기준을 각각 사용할 수 있도록 하였으며, 유동법칙으로는 결합유동법칙(associated flow rule)을 사용하며, 비선형 방정식을 풀기 위한 알고리즘은 초기강성도법(initial stiffness method)과 접선강성도법(tangential stiffness method)을 사용하여 수렴속도와 해의 안정성 등을 감안하여 선택할 수 있도록 하였다. 둘째는, EPFM 해석의 지배적인 파괴매개변수인 J -적분값 산정을 위한 균열이론으로는 J -적분법¹⁷⁾과 등가영역적분법

(equivalent domain integral method: 이하 EDI 법)²⁰⁾의 알고리즘을 채택하였다. 셋째는, 기존의 선형탄성해석을 위해 사용된 p -version 유한요소법으로 C^0 -계층요소를 사용하고 적분형 르장드르 형상함수(integrals of Legendre polynomials)를 사용하며, 10×10 가우스적분법을 사용하였다²³⁾. 본 논문에서는 전술된 세 가지 내용을 통합하여 탄성-완전소성재료(elastic-perfectly plastic materials), 탄성-선형변형 경화재료(elastic-linear strain hardening materials), 그리고 탄성-비선형변형 경화재료(elastic-nonlinear strain hardening materials)를 해석할 수 있도록 p -version 유한요소 프로그램을 완성한 것이 주요내용이라 하겠다. 이러한 이유로 J -적분법의 산정법과 적분형 르장드르 형상함수의 정의 및 구성에 대해서는 이미 여러 논문^{20),22)}에서 발표된 바가 있기 때문에 이에 대한 상세는 생략하기로 한다.

3.2 프로그램구조와 흐름도

본 논문에서 제안하는 탄소성 p -version 유한요

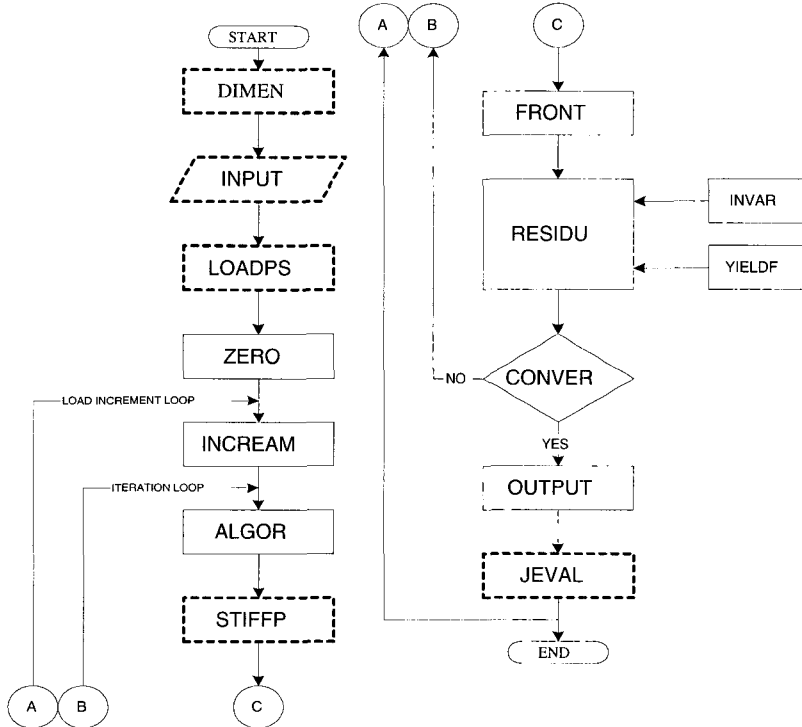


Fig. 3 Flow chart of the p -version finite element program FAPP

소모델의 컴퓨터 연산을 위해서 수치해석 프로그램 FAPP를 개발하였다. FAPP는 1개의 주프로그램과 전체 24개의 부프로그램으로 구성되어 있고 전체적인 구성은 Fig. 3의 흐름도와 같다. 형상함수의 차수인 p -level은 8차까지 사용할 수 있도록 하였으며, 고차 형상함수를 정확하게 적분하기 위해 10×10 점의 가우스적분법을 이용할 수 있으며, 2차원 탄소성 평면문제에 국한되어 해석할 수 있다. 유한요소 해석과정을 거친 뒤 곧바로 해석결과(부프로그램명: OUTPUT)를 이용하여 Rice¹⁷⁾가 제안한 J -적분법과 EDI-법을 이용하는 과정(부프로그램명: JEVAL)이 이어진다. 연립방정식의 해를 구하기 위해서는 Iron에 의해 제안된 Frontal Solver(부프로그램명: FRONT)가 사용되었다. 그러므로, 유한요소 해석과정에서 고려하는 하중의 경우만큼 하중 벡터의 일부를 구하고 그에 대응하는 방정식의 일부를 조립과 동시에 풀어가는 과정이 반복 수행된다. 한편, p -version 프로그램은 Owen²¹⁾의 h -version 프로그램을 수정하였는데 프로그램 구성상 기존의 h -version 프로그램과 상당한 차이가 있는 부프로그램만 점선을 이용하여 표시하였다. 각 부프로그램의 세부적인 내용은 참고문헌²³⁾에 상세히 소개되어 있다.

4. 예제해석

4.1 탄성-완전소성재료를 갖는 중앙균열판의 탄소성해석

수치해석 예제는 Fig. 4와 같이 인장력을 받는 중앙균열판으로 탄소성해석이 수행되었다. 해석예제로는 Owen이 해석한 모델²¹⁾을 본 연구에서 개발된 p -version 프로그램과 상용유한요소프로그램 ADINA를 이용하여 비교 검증하였다. ADINA모델의 경우, Fig. 5와 같이 54개의 체눈설계로부터 250개의 체눈설계를 갖고 수렴성조사를 Fig. 6과 같이 수행하여 수렴구간에 있는 4절점 등매개변수요소 250개를 비교목적으로 사용하였다. p -version 모델의 경우 Fig. 9와 같이 수렴성조사를 통해 4개 요소에 형상함수의 차수 p 는 5차를 사용하였다. Fig. 4에서 보듯이 p -version 모델의 요소형상은 매우 찌그러져 있고, 모서리의 각도가 150도를 넘고 있으므로 요소의 성능이 문제가 될 수 있다. 그러나 참고문헌²²⁾의 연구결과를 보면 p -version 모델의 경우 모서리 각이 165도 정도까지 되어도 변위와 응력에 영향을 받지 않은 것으로 나타나 있다.

해석예제 평판의 폭은 $2W$, 높이 $2H$, 균열의 길

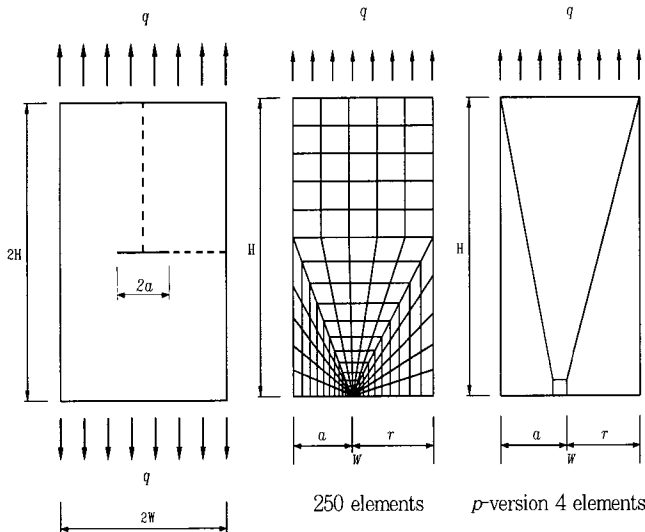


Fig. 4 Mesh design of the center cracked plate by ADINA software and p -version finite element program

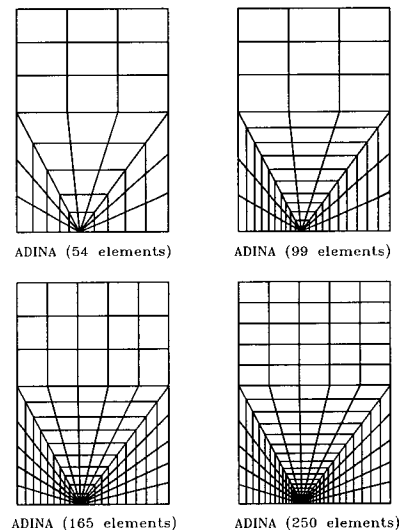


Fig. 5 Details of mesh design by ADINA software

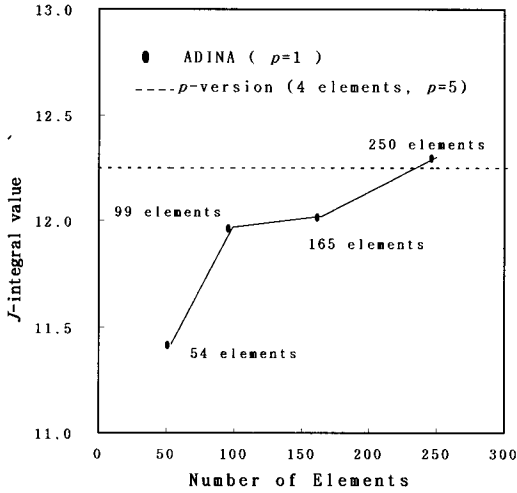


Fig. 6 Convergence characteristics of J -integral by ADINA software

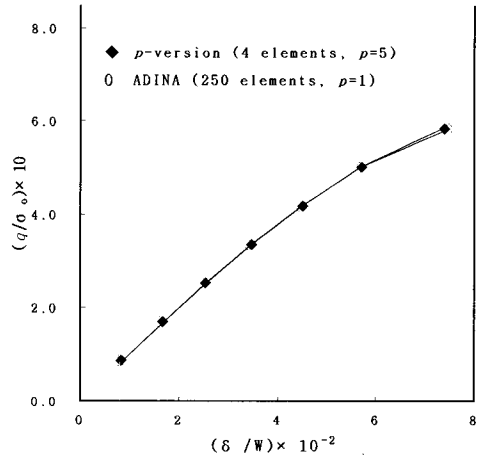


Fig. 7 Crack opening displacement of the center cracked plate with respect to the load increment

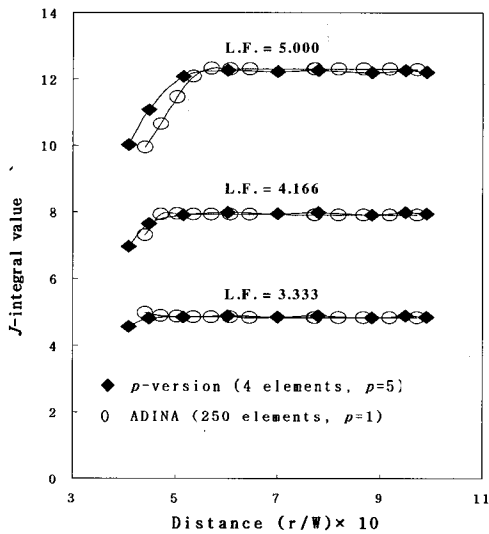


Fig. 8 Path-dependence of J -integral near a crack-tip with respect to load factors

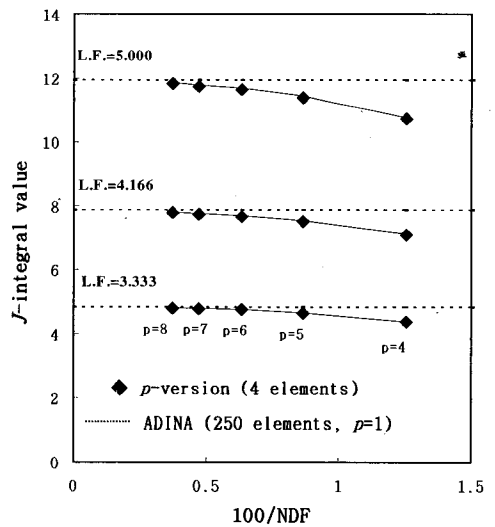


Fig. 9 Convergence characteristics of J -integral by p-version finite element model

이 2a, 그리고 변장비(H/W)는 2.5이다. 균열길이 a가 0.4W인 균열판의 유한요소체눈이 Fig. 4에 도시되었다. 재료의 성질은 $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, 포아송비 $\nu=0.3$, 항복응력 $\sigma_0=2,400 \text{kg/cm}^2$, 그리고 변형률 경화계수 $H=0$ 인 탄성-완전소성재료이다. 평판에 작용되는 인장력은 200kg/cm^2 에서부터

1,400 kg/cm^2 까지 증가시켰다.

Fig. 7에는 중앙균열판의 균열중앙부에서의 정규화된 하중-변위 선도를 도시하였는데 p-version 모델과 ADINA모델이 상대오차 3%이내에서 일치하는 결과를 보이고 있다. Fig. 8에서는 하중계수 ($L.F. = a / \sigma_0 \times 10$)에 따른 J -적분값의 경로독립성

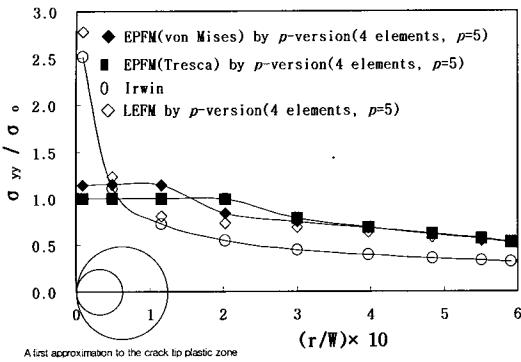


Fig. 10 Distribution of σ_{yy} near a crack-tip by several approaches under plane stress condition(L.F.=5.0)

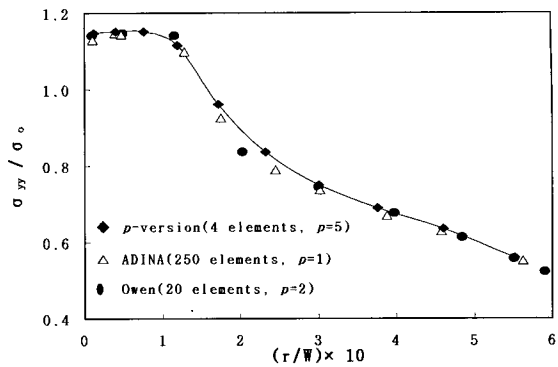


Fig. 11 Comparison of EPFM analyses of σ_{yy} near a crack-tip under plane stress condition(L.F.=5.0)

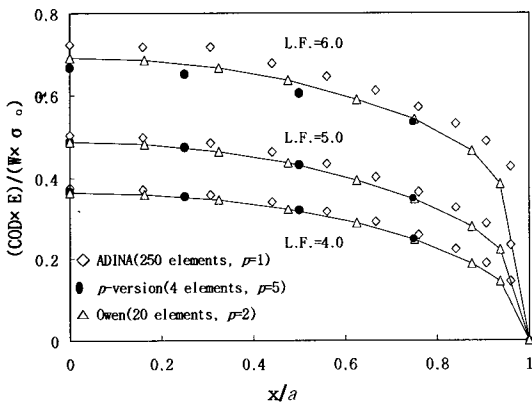


Fig. 12 Comparison of crack opening displacements with respect to load factors

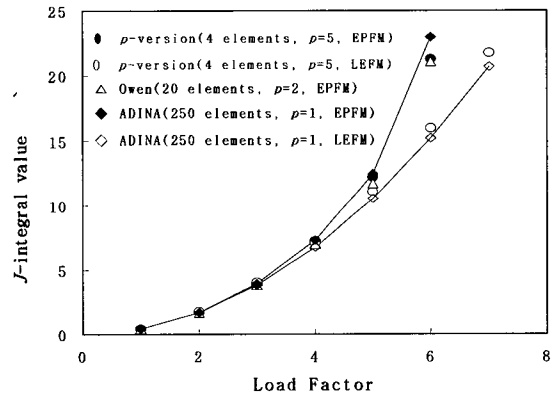


Fig. 13 Comparison of J -integrals with respect to load factors

을 보여주는데 균열선단 부위에 소성역이 형성됨에 따라 즉, 소성역을 통과하는 적분경로에서는 소성에너지의 양에 따라 J -적분값이 영향을 받는 반면, 균열선단에서 비교적 멀리 위치한 탄성역에서는 J -적분값은 적분경로에 관계없이 일정한 결과를 나타내고 있다. 이러한 결과는 균열선단 주위의 소성역을 지나가는 적분경로에서 계산되는 J -적분값은 경로에 무관하다는 Kuang등¹⁹⁾의 연구결과와 일치한다.

Fig. 9에 의하면 p -version 모델의 자유도 증가에 따른 J -적분값 수렴성을 보여주는데 형상함수의 차수

가 5차 이상에서 수렴한다는 것을 알 수 있다. Fig. 10는 L.F.=5.0인 경우 LEFM과 EPFM 이론에 의한 p -version 유한요소결과(4개요소, $p=5$)의 y 방향 응력분포 σ_{yy} 를 도시하였는데 응력장에 큰 차이점을 보여주는 것을 알 수 있는데 LEFM해석의 경우 σ_{yy} 가 균열선단근방에서 항복응력의 3배 정도까지 증가하고 있다. 한편, Fig. 10에서 첫번째로 가 정된 소성역의 크기는 선형탄성해석에서 균열진전방향으로의 균열인대(crack ligament)가 항복응력 σ_0 에 도달할 때를 말하는데, 응력재분배효과를 고

려하지 않았기 때문에 소성역은 이보다 더 클 것으로 예상된다. 따라서 Irwin은 첫 번째의 가정된 소성역 크기의 두배를 실제 균열선단에 발생하는 소성역의 크기라고 주장하였다. 또한, Fig. 10은 Irwin의 소성역 추정치와 p -version 해석결과가 근사한 결과를 보이고 있으나 하중계수가 크게 증가(L.F.=6)하면 Irwin의 추정치와는 소성역의 형상이 크게 차이남을 Fig. 14와 Fig. 15에서 발견할 수 있다.

Fig. 11에서는 평면응력 조건일 때 y 방향 응력

σ_{yy} 에 대해서 p -version 모델과 1차 형상함수를 사용하는 ADINA 모델, 그리고 2차 Serendipity 형상함수를 사용하는 Owen의 모델을 비교한 결과 3가지 모델이 상대오차 5%이내의 일치된 결과를 보이고 있다. Fig. 12에서는 하중계수 증가에 따른 균열개구변위량(crack opening displacement: 이하 COD)을 도시하였는데 ADINA모델, p -version 모델, 그리고 Owen의 모델이 역시, 상대오차 5%이내에서 일치하는 결과를 보이고 있다. Fig. 12에서 x 축은 균열중앙부에서 균열선단까지를 균열길이

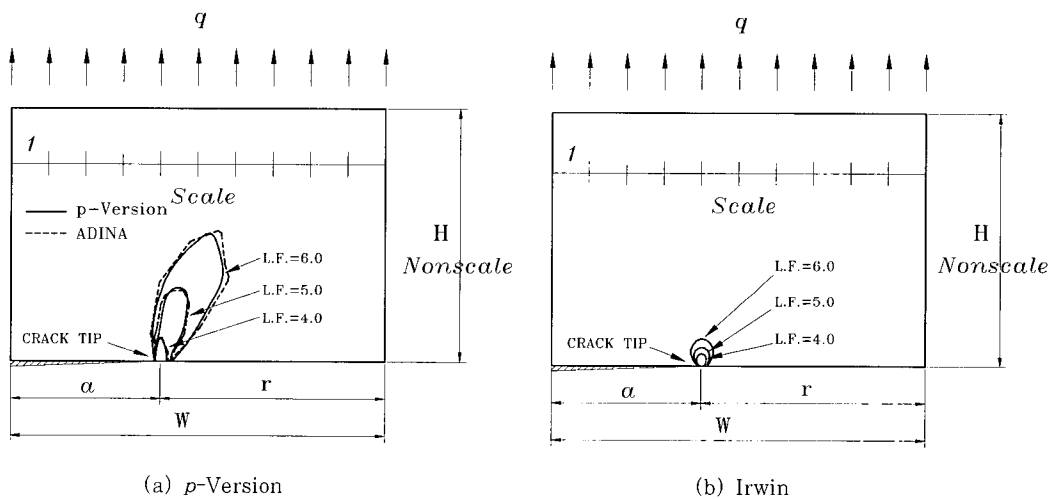


Fig. 14 Shape of plastic zone under plane strain condition based on von-Mises yield criteria

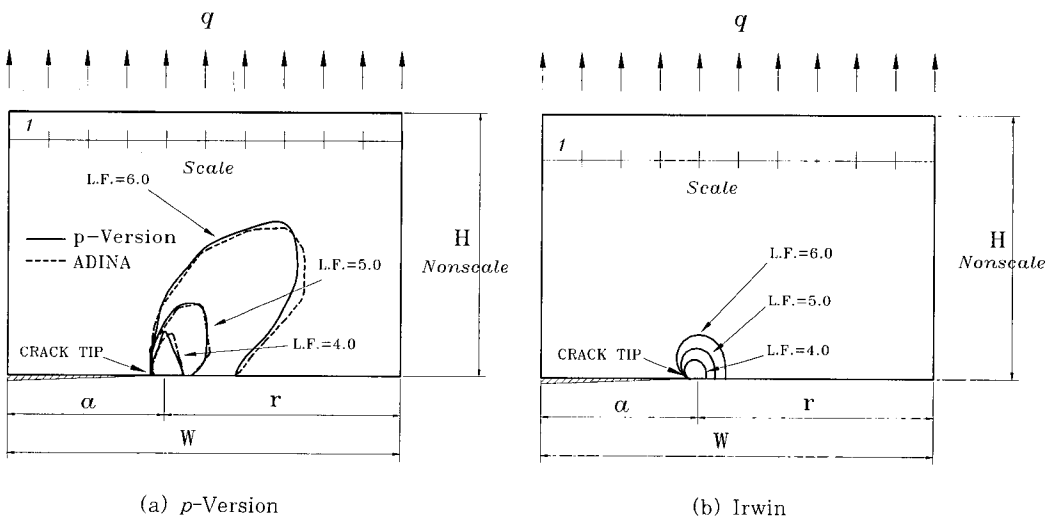


Fig. 15 Shape of plastic zone under plane stress condition based on von-Mises yield criteria

a 로 무차원화 하였고 y 축은 균열개구변위량을 탄성계수와 평판의 폭 그리고 항복응력을 이용하여 무차원량을 나타내었다.

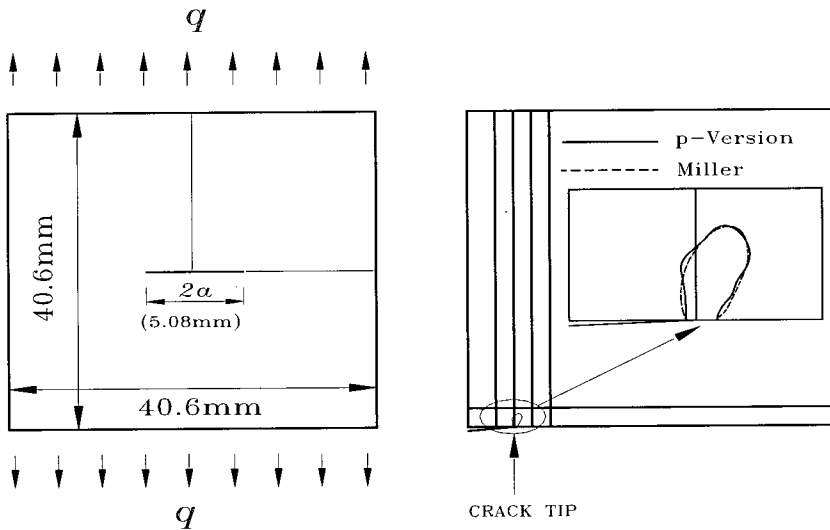
Fig. 13에서는 하중계수 증가에 따른 J -적분값을 비교하였는데 LEFM과 EPFM을 이용한 J -적분값 비교가 주관심 대상이 된다. 왜냐하면, 선형탄성일 경우 J -적분값은 동일한 값을 갖으나 탄소성일 경우 EPFM을 이용한 J -적분값은 균열선단의 소성역이 증가할수록 LEFM의 결과와 비교할 때 상대적으로 큰 값을 갖는 것을 알 수 있다. 즉, 식(1)과 식(2)에 정의된 소성역형상은 EPFM해석을 하게 될 경우 응력확대계수 K 대신에 J -적분값의 함수로 표현할 수 있음을 의미한다. 앞에서 설명된 바와 같이 J -적분값이 상대적으로 크기 때문에 당연히 소성역의 크기는 증가될 수 있는 것이다. 따라서, 응력수준(stress level)이 높은 경우 소성역을 고려한 EPFM을 이용한 해석이 필수적이라 하겠다.

Fig. 14와 Fig. 15에서는 앞에서 언급된 소성역의 크기 및 형상을 정확히 규명하기 위해 많은 가우스적분점이 필요하므로 p -version 모델은 15개의 요소를 사용하였고 각 요소당 10×10 가우스적분점이 이용되었다. 항복기준으로는 von-Mises 항복기

준이 사용되었고 Irwin의 추정치와 비교하여 도시하였다. 예상한 바와 같이 Irwin의 추정치는 응력재분배를 정확히 예측할 수 없고, LEFM개념에 기초를 둔 응력확대계수에 의해 소성역의 형상을 정의하기 때문에 하중수준이 높을 경우 유한요소해석 결과보다 훨씬 작은 소성역을 형성하는 것을 알 수 있다. 그림에서 x 축의 평판의 폭과 y 축의 소성역형상은 스케일을 고려하였고 y 축의 평판높이는 실제 스케일과 다르게 도시하였는데, 그 이유는 실제평판의 스케일로 도시하게 되면 소성역의 크기가 상대적으로 작게 보이기 때문이다. Fig. 14와 Fig. 15에서 보듯이 평면응력조건일 때 소성역의 크기가 평면변형조건일 때 보다 큰 것을 알 수 있으며, 특히 하중계수 L.F.가 6.0일 경우에는 Irwin의 추정치와 매우 상이한 것을 알 수 있다.

4.2 탄성-선형변형 경화재료를 갖는 중앙균열판의 소성역 형상

선형변형 경화재료를 갖는 평판에서 균열선단의 소성역 크기 및 형상에 대한 p -version 모델의 신뢰성을 보이기 위해 Miller등²⁴⁾이 해석한 동일한 예제를 채택



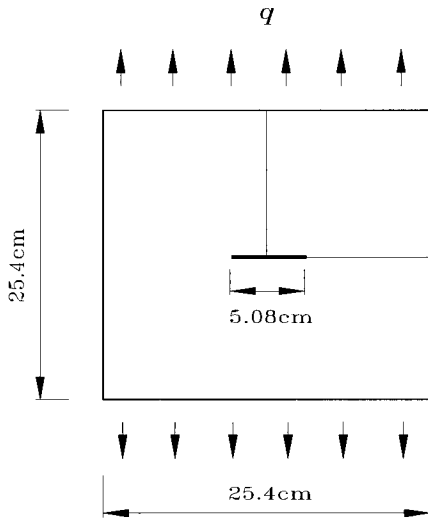
(a) A center cracked plate under tension (b) p -version finite element model and shape of plastic zone

Fig. 16 Shape of plastic zones of the elastic-linear strain hardening materials under plane strain condition (L.F.=5.7)

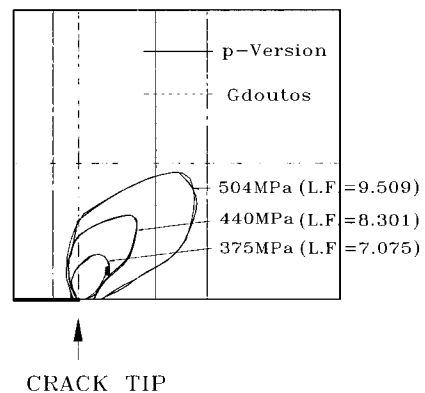
하였다. Miller등은 Fig. 16과 같은 기하형상을 갖는 중앙균열판을 99개의 사변형 등매개변수요소(iso-parametric quadrilateral element)를 사용하여 균열선단의 소성역 형상을 추정하였는데 재료의 거동은 탄성-선형경화 소성재료를 사용하였고, 평면변형조건하에서 von-Mises 항복기준을 사용하였다. 그 밖의 재료상수는 탄성계수 $E = 206.85\text{KN/mm}^2$, 접선탄성계수 $E_T = 965.3\text{N/mm}^2$, 경화계수 $H' = 969.8\text{N/mm}^2$, 포아슨비 $\nu = 0.3$, 일축응력시 응력-변형률곡선으로부터 항복응력 $\sigma_0 = 310.26\text{N/mm}^2$, 그리고 하중 $q = 177\text{N/mm}^2$ 를 사용하였다.

Fig. 16(b)와 같이 p -version 유한요소모델은 소성역의 형상을 정확히 파악할 수 있도록 10개의 요소에 형상함수의 차수 p 는 5차를 사용하였고 요소당 10×10 점 가우스적분법을 이용하여 가우스 적분점에서 소성변형률이 발생되는지 여부를 확인하였다. 그 결과 p -version 유한요소모델과 Miller가 제시한 모델의 결과가 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

4.3 탄성-비선형경화 소성재료를 갖는 중앙균열판의 소성역 형상



(a) A center cracked plate under tension



(b) p -version finite element model and shape of plastic zone

Fig. 18 Shape of plastic zones of elastic-nonlinear strain hardening materials under plane strain condition with respect to load factors

탄성-변형률 경화재료의 균열선단부에서 소성역 형상의 정확도를 비교하기 위해 Gdoutos등¹²⁾이 제시한 중앙균열판 문제를 해석하였다. 수치해석에 사용된 재료는 Fig. 17과 같이 탄성-변형률 경화재료를 사용했고, 그 결과는 Fig. 18에 도시하였다. Gdoutos등은 평면변형조건하에서 von-Mises 항복조건과 증분소성이론에 기초한 h -version 유한요소 모델로 체눈설계를 구축하여 균열문제를 해석하였는

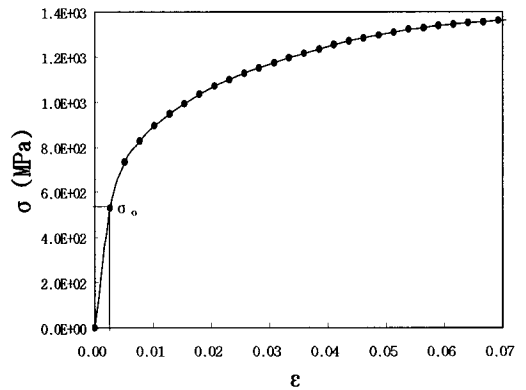


Fig. 17 $\sigma - \epsilon$ curve from a uni-axial tension test

데, 균열선단부에는 특이요소(singular element)를 사용하여 해석에 소요되는 시간을 줄이고자 하였다. 한편, 본 연구에서 제안하는 모델은 Fig. 18(b)에서 나타낸 바와 같이 10개의 요소를 사용하고 형상함수의 차수 p 는 5차를 사용하였는데 소성역의 형상을 정확히 도시하기 위해 앞의 예제와 같이 균열선단부위에서 요소의 배치를 조밀하게 하였고 10×10 가우스적분법을 사용하였다. 그 밖의 제원은 Gdoutos의 중앙균열판 문제와 동일하게 설정하였다. Fig. 18(b)와 같이 탄성-비선형경화 소성재료의 소성역 형상은 하중증가에 관계없이 거의 일치되는 결과를 얻을 수 있었다.

5. 결 론

본 논문을 통해 얻은 결과를 아래와 같이 두 가지로 나누어 요약하였다.

- 1) J -적분값의 정확도 및 경로독립성 : 수렴성조사 후 ADINA에 의한 h -version 모델($p=1$, 250개 요소)과 p -version 모델($p=5$, 4개 요소)에 의한 파괴매개변수 J -값은 거의 일치함을 보여주며 이 결과들은 Owen의 유한요소 해석값과도 상대오차 3%이내의 정확도를 보여준다. 그러나, 적분경로가 소성역을 통과하는 경우에는 J -값이 탄성역을 지날 때와 큰 차이를 보임을 알 수 있는데 이는 Kuang의 연구결과와 일치한다. 따라서, Rice에 의해 최초 제안된 J -적분법은 적분경로에 무관하다는 일반적인 정설은 다시 재고해야 된다고 생각되며, 탄소성균열판의 경우 J -값이 적분경로에 유관하다고 결론지을 수 있다.
- 2) 소성역의 크기 및 형상 : 균열선단부의 소성역의 크기와 형상은 Irwin의 가정에 의해 추정되어 왔다. 그러나, 본 연구에서 하중증가에 대한 소성역의 분포는 Irwin의 추론이 크게 틀렸다는 것을 보여 주고 있다. 본 연구결과는 ADINA의 해석 및 Miller와 Gdoutos 등의 연구결과에 의해 뒷받침되고 있는데, 일반적으로 변형률경화를 갖는 금속재료의 경우 이미 여

러 논문에서 Irwin의 소성역형상의 오류를 지적한 바가 있는데 본 연구에서 취급하고 있는 탄성-완전소성재료의 구조용강재의 경우에도 그 경향이 일치됨을 확인할 수 있었다. 그 이유는 Irwin의 기본 가정에서 소성역의 확산에 따른 응력재분배의 영향을 제대로 설명하지 못하고 있으며, 아울러 소성역의 형상이 LEFM에서 사용되고 있는 응력확대계수 K 에 기초를 두고 있기 때문이라 판단된다. 한편, 본 논문에서 제안하는 p -version 모델에 의한 소성역 형상은 재료특성에 관계없이 정확한 소성역 추정이 가능하다는 것을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Elber, W., "The Significance of Fatigue Crack Closure", in *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, ASTM STP 486, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1971, pp.230~242
2. Irwin, G. R., "Plastic Zone near a Crack and Fracture Toughness", *Proc. 7th Sagamore Conf.*, 1960, pp.IV~63
3. Dugdale, D. S., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", *Mech. Phys. Solids.*, Vol.8, 1960, pp.100
4. Broek, D., *Elementary engineering fracture mechanics*, 4th Ed., Martinus Nijhoff Publishers, 1986, pp.108
5. Neuber, H., "Theory of Notch Stresses", ACE TR-4547, 1958
6. Swedlow, J. L., "Elasto-plastic cracked plates in plane strain", *Fracture Mech.*, Vol.5, 1969, pp.33~44
7. Benzley, S. E., "Nonlinear calculations with quadratic quarter-point crack tip element", *Int. J. Fracture*, Vol.12, 1976, pp.477~480
8. Barsoum, R. S., "Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements", *Numer. Meth. Engng.*

- Vol.11, 1977, pp.85~98
9. Wilson, W. K. and Osias, J. R., "A comparison of finite element solutions for an elastic-plastic crack problem", *Int. J. Fracture*, Vol.14, 1978, pp.95~108
 10. Levy, N., Marcal, P. V., Ostergren, W. J. and Rice, J. R., "Small scale yielding near a crack in plane strain : A finite element analysis", *Fracture Mech.*, Vol.7, 1971, pp.143~156
 11. Jones, D. P. and Swedlow, J. L., "The influence of crack closure and elastoplastic flow on the bending of a cracked plate", *Int. J. Fracture*, Vol.11, 1975, pp.897~914
 12. Gdoutos, E. E. and Papakaliatakis, G., "The effect of load biaxiality on crack growth in non-linear materials", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.5, 1986, pp.141-156
 13. Hutchinson, J. W., "Singular behaviour at the end of a tensile crack in hardening material", *Mech. Phys. Solids*, Vol.16, 1968, pp.13~31
 14. Rice, J. R. and Rosengren, G. F., "Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material", *Mech. Phys. Solids*, Vol.16, 1968, pp.1~12
 15. McMeeking, R. M., "Finite deformation analysis of crack tip opening in elastic-plastic materials", *Mech. Phys. Solids*, Vol.25, 1977, pp.357~381
 16. Stump, D. M. and Zywicz, E., "J-integral computations in the incremental and deformation plasticity analysis of small-scale yielding", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.45, 1993, pp.61~77
 17. Rice, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *ASME Appl.Mech.* Vol.35, 1968, pp.76~386
 18. Sivaneri, N. T., Xie, Y. P. and Kang, B. S. J., "Elastic-plastic crack-tip-field numerical analysis integrated with Moire interferometry", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.49, 1991, pp.291~303
 19. Kuang, J. H. and Chen, Y. C., "The values of J-integral within the plastic zone", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.55, No.6, 1996, pp.869~881
 20. Woo, K.S., Hong, C.H. and Shin, Y.S., "An Extended Equivalent Domain Integral Method for Mixed Mode Fracture Analysis by p -Version of F.E.M.", *Numer. Meth. Engng.*, Vol.42, 1998, pp.857~884
 21. Owen, D. R. and Fawkes, A. J., *Engineering fracture mechanics : Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press Ltd. Swansea, U.K., 1983
 22. Woo, K.S., "A Robustness of Hierarchic Element Formulated by Integrals of Legendre Polynomial", *Comp. & Struct.*, Vol.49, NO.3, 1993, pp.421~426
 23. 홍종현, "탄소성파괴역학 이론에 의한 균열판의 p -Version 유한요소해석", 공학박사학위논문, 영남대학교, 1999
 24. Miller, K. J. and Kfoury, A. P., "An elastic-plastic finite element analysis of crack tip fields under biaxial loading conditions", *Int. J. Fracture*, Vol.10, 1974, pp.393~404

(접수일자 : 1999. 3. 29)