

# CAGD를 사용한 쉘의 형상 및 두께 최적화에 관한 연구 (부피 제약조건을 사용한 변형에너지의 최소화)

## A Study on the Shape and Thickness Optimizations of Shells Using CAGD through Minimization of Strain Energy with Volume Constraint

이 상 진\*                      한 상 을\*\*  
Lee, Sang-Jin                Han, Sang-Eul

### 요 지

본 논문에서는 쉘 최적화에 대한 연구 결과를 기술하였다. 본 연구의 주 목적은 쉘 구조물의 최적형상과 두께 분포를 찾는 데 있다. 쉘의 변형에너지를 목적함수로 사용하고 초기 쉘의 부피를 제약조건으로 고려하였다. 본 연구에서는 Computer-Aided Geometric Design(CAGD)기법을 이용하여 쉘의 형상과 그 두께분포를 표현하였고 쉘의 변형에너지를 측정하기 위해서 가변형도를 채용한 퇴화쉘요소(Degenerated Shell Element)를 도입하였다. 최적값을 구하기 위해서 세가지 수학적 프로그래밍 기법을 제공하는 프로그램 DOT를 사용하였다. 마지막으로 새로이 개발된 쉘 최적화시스템의 효율성을 최적화예제로써 증명하였다.

핵심용어 : 쉘, 형상 및 두께 최적화, CAGD 기법, 유한요소, 변형에너지

### Abstract

This paper describes basic procedures and results of shell optimizations. The main objective of this study is to find the optimum shape and thickness distribution of shells under certain conditions. The strain energy to be minimized is considered as the objective function with a volume constraint. The computer-aided geometric design (CAGD) such as Coon patch representation is used to represent the geometry and thickness distribution of shells. In order to measure structural response of shells, a nine-node degenerated shell finite element<sup>8)</sup> is adopted. Robust optimization algorithms available in the optimizer DOT are used in the optimization. Finally, several numerical examples are provided to show the efficiency of the shell optimization system.

**Keywords** : shell, shape and thickness optimizations, computer-aided geometric design, finite element, strain energy

## 1. 서 론

최근에 쉘의 형상최적화에 대한 연구가 크게 활발해지고 있다. 이는 쉘의 구조적 기능이 그 형상에

따라 크게 좌우되기 때문이다.

형상을 최적화하는 작업은 여러 가지 복잡한 단계를 거쳐야 한다. 첫번째 단계는 최적화하고자 하는 구조물의 형상을 주어진 오차 내에서 정확히 표현하는

\* 정회원 · University of Wales, Swansea, Department of Civil Engineering, Research officer

\*\* 정회원 · 인하대학교 건축공학과, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

것이다. 구조물의 형상표현을 위해서는 Computer-Aided Geometric Design (CAGD)<sup>1),2)</sup> 기법을 사용할 수 있다

CAGD기법은 컴퓨터의 발달과 함께 태동하였는데 현재는 많은 분야에서 사용되어지고 있으며 형상최적화도 그 중의 한 분야이다. 일반적으로 자동차 동체설계를 위해 개발된 콘의 조각면(Coons Patch)<sup>3)</sup> 이 곡면에 대한 CAGD기법의 시초라고 할 수 있다. 현재는 Non-Uniform Rational B-Spline(NURBS)<sup>2)</sup> 과 같은 복잡한 곡면형식이 개발되어 효과적으로 곡면을 표현하고 조절할 수 있게 되었다.

CAGD기법을 이용한 최초의 쉘 형상최적화는 Ramm과 그 동료의 연구결과<sup>4),5)</sup>를 꼽을 수 있다. 이들은 Bezier곡면을 사용하여 쉘의 형상을 표현하였고 조절점(Control Point)의 좌표를 설계변수로 채택하여 쉘의 형상최적화를 시도하였다. 각 설계변수에 대한 쉘의 반응을 측정하기 위해서 이들은 감차 적분을 채용한 표준 퇴화 쉘요소를 사용하였고, 최적화 알고리즘으로는 Sequential Quadratic Programming(SQP)<sup>6)</sup>과 The Method of Moving Asymptotes(MMA)<sup>7)</sup>를 사용하였다.

Rao와 Hinton<sup>8)</sup>은 콘의 조각면(Coons patch)을 사용하여 형상과 두께최적화를 시도하였다. 이들은 가변형도를 채용한 퇴화 쉘 요소<sup>9)</sup>를 사용하여 쉘의 구조적반응을 계산하였고 Sequential Quadratic Programming(SQP)<sup>10)</sup>을 사용하여 최적값을 계산하였다.

전술한 바와 같이 CAGD기법을 사용한 쉘의 형상최적화 문제는 문헌상 예가 적고 그에 대한 연구가 크게 요망되고 있다.

따라서 본 논문에서는 CAGD기법을 사용하여 쉘의 형상과 두께의 분포를 조절하면서 그 변형에너지를 감소시킬 수 있는 최적화 시스템을 개발하고 그 시스템을 이용하여 최소의 변형에너지를 가지는 쉘의 형상과 두께분포를 조사하였다. 특히 세가지의 최적화 알고리즘<sup>13)</sup>을 쉘 최적화에 적용함으로써 구해진 최적값을 검증하고 기존에 발표된 결과와 비교하였다.

## 2. 형상과 두께의 표현방법

본 연구에서는 쉘의 형상과 두께분포를 표현하기 위해 콘이 개발한 조각면을 사용하였다. 이 방법은

곡면을 보간 하기 위해 개발되었지만 임의의 스칼라 값도 주어진 데이터 값으로 보간 할 수도 있다. 콘 조각면은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$r(u, v) = \mathbf{u} \mathbf{H} \mathbf{G}_p \mathbf{H}^T \mathbf{v}^T, \quad p = x, y, z \quad (1)$$

여기서,

$$\mathbf{u} = \{u^3, u^2, u, 1\}, \quad \mathbf{v} = \{v^3, v^2, v, 1\}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}_{,v} \\ \mathbf{R}_{,u} & \mathbf{R}_{,uv} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p(0,0) & r_p(0,1) \\ r_p(1,0) & r_p(1,1) \end{bmatrix}$$

여기서  $r_p(0,0)$ ,  $r_p(0,1)$ ,  $r_p(1,0)$ ,  $r_p(1,1)$ 은 콘의 조각면 네 가장자리의 좌표값이고  $r_p(0,0)$ ,  $\mathbf{u}$ 는  $r_p(u, v)$ 를 매개변수  $u$ 에 대하여 점(0,0)에서 편미분한 값을 말한다. 식 (1)과 Fig. 1에서 나타난 바와 같이 콘의 조각면을 형성하기 위해서는 콘의 조각면 네 가장자리의 좌표 값과 그에 상응하는 미분값이 필요하다.

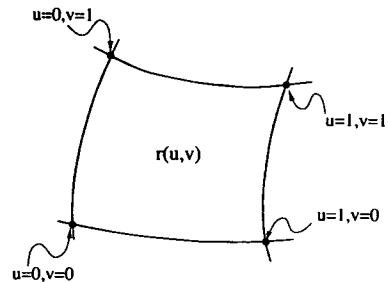


Fig. 1 A parametric Coons patch representation

일반적으로 쉘은 여러 개의 콘의 조각면을 조합함으로써 표현될 수 있다. 이러한 조합은 Fig. 2에서 표현된 바와 같이 스플라인(Spline)이 두 방향, 즉  $u$ 와  $v$ 방향으로 걸쳐있는 것으로 간주될 수 있다. 따라서 콘의 조각면을 이루는 조절점의 미분값들은 스플라인에서 사용되는 방식과 같은 방법으로 구할 수 있다.

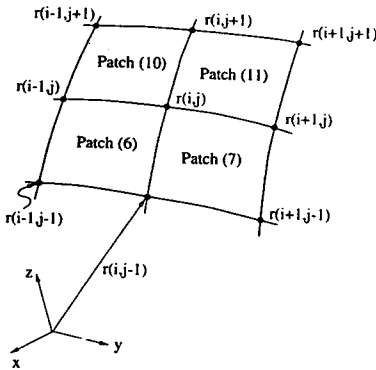


Fig 2. An assembly of Coons patches having  $(k+1)$  curves and  $(l+1)$  curves in the  $u$ - and  $v$ - directions respectively: The patch number has been assigned under the assumption that  $i=j=2$  and  $k=l=4$

주어진 스플라인이  $C^2$ 의 연속성을 가진다고 가정하면  $j=1$ 에서 자연종점조건(natural end condition)을 가지는  $u$ 방향 곡선의 접선값은 다음식으로 구할 수 있다<sup>12)</sup>.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & & & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial r_1 \\ \partial r_2 \\ \vdots \\ \partial r^i \\ \vdots \\ \partial r_{k-2} \\ \partial r_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ b \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \partial r_i &= r_p(i, 0), u \\ \partial r_1 &= \frac{1}{2} \{-3r_p(1, 0) + 3r_p(2, 0) - \partial r_2\} \\ \partial r_{k-1} &= \frac{1}{2} \{-3r_p(k-1, 0) + 3r_p(k, 0) - \partial r_k\} \\ a &= 6r_p(3, 0) - 3r_p(2, 0) - r_p(1, 0) \\ q_1 &= 3\{r_p(i+1, 0) - r_p(i-1, 0)\} \\ b &= 3r_p(k, 1) - 3r_p(k-1, 0) - 6r_p(k-2, 0). \end{aligned}$$

나머지 접선값  $r(u, v),_v$ 와  $r(u, v),_{uv}$ 도 위와 같은 방법으로 구할 수 있다. 쿤의 조각면에 필요한

모든 접선값을 구한 다음에는 식(1)을 사용하여 유한요소절점의 좌표값들을 구할 수 있다. 앞에서 언급한 바와 같이 쿤의 조각면은 사실상 어떠한 스칼라 값도 보간할 수 있으므로 쉘의 두께 역시 쿤의 조각면을 사용하여 표현할 수 있다. 예를 들면, 쉘의 두께분포는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h(u, v) = \mathbf{u} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^T \mathbf{v}^T \quad (3)$$

여기서 행렬  $\mathbf{Q}$ 는

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(0,1) & h(0,0),_v & h(0,1),_v \\ h(1,0) & h(1,1) & h(1,0),_v & h(1,1),_v \\ h(0,0),_u & h(0,1),_u & h(0,0),_{uv} & h(0,1),_{uv} \\ h(1,0),_u & h(1,1),_u & h(1,0),_{uv} & h(1,1),_{uv} \end{bmatrix}$$

이고  $h(0,0)$ ,  $h(0,1)$ ,  $h(1,0)$ ,  $h(1,1)$ 는 쿤의 조각면을 이루는 네 가장자리에서의 두께이고  $h(0,0),_u$ 는 점  $u=0, v=0$ 에서의 일계 미분값이고  $h(0,0),_{uv}$ 는 모서리점  $u=0, v=0$ 에서의 이계 미분값이다. 이 절에서 기술한 내용은 유한요소망을 생성하고, 쉘의 형상과 두께를 조절하기 위하여 사용된다.

### 3. 요소 및 절점 두께 자동 생성

제 2절에서 설명한 쿤의 조각면은 유한요소와 요소절점의 두께를 자동생성 하는데 사용한다. 첫번째로 쿤의 조각면을 사용하여 쉘의 기하학적 모델을 준비한다. 쉘의 기하학적 모델을 준비하는 과정은 다음과 같은 순서로 정리할 수 있다.

1) 구조물의 형상데이터값을 이용하여 쿤의 조각면의 조절점 좌표를 준비한다. 조절점은 유한요소의 절점과 유사한 역할을 한다. 이때 쿤의 조각면으로 표현된 쉘의 형상을 쉘의 기하학적 모델이라고 정의한다. 쉘이  $u$ 방향으로  $k$ 개,  $v$ 방향으로  $l$ 개의 조절점을 가진 규격격자의 형태로 표현된다면 다음의 수식으로 표현된다.

$$\mathbf{r}(i, j) = [r_x(i, j), r_y(i, j), r_z(i, j)]^T, \quad i=0, 1, \dots, k \quad \text{그리고} \quad j=0, 1, \dots, l.$$

2) 조절점을 잇는 곡선의  $u$ 방향과  $v$ 방향의 접선값을 전 단계에서 준비한 좌표 값을 사용하여 구한

다.  $u$ 방향곡선의 접선값을 계산하기 위해서는 위치 벡터  $\mathbf{r}(0, j), \mathbf{r}(1, j), \mathbf{r}(2, j), \dots, \mathbf{r}(k, j)$ 를 사용하고,  $v$ 방향곡선의 접선값을 계산하기 위해서는 위치 벡터  $\mathbf{r}(i, 0), \mathbf{r}(i, 1), \mathbf{r}(i, 2), \dots, \mathbf{r}(i, l)$ 를 사용한다. 식(2)로부터 스플라인 중간조절점의 접선 값은 미리 지정해야 함을 알 수 있다.

3) 각 조각면  $i$ 에 해당하는 행렬  $\mathbf{G}_i^j$ 을 계산한다. 결과적으로 쿤의 조각면에 대한 식을 매개변수  $u$ 와  $v$ 에 대한 함수로 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

다음단계는 2차원의  $u-v$ 파라메트릭평면에서 유한요소망을 생성한 뒤 각각의 절점을 제 2절에서 기술한 식들을 사용하여 기하학적인 모델에 투영(mapping)함으로써 실제 평면에 유한요소망을 형성한다. 파라메트릭평면에서 삼차원의 공간으로 유한요소를 투영하는 방법은 Fig.3에 도시하였고 이

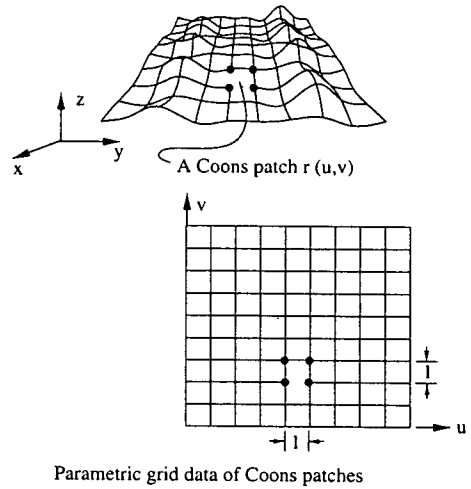
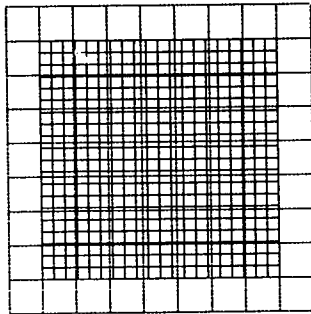
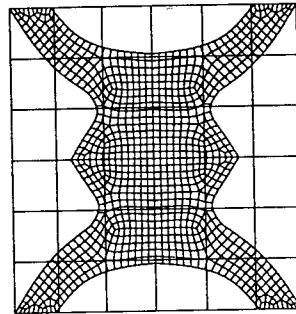


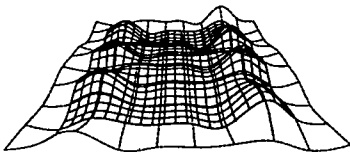
Fig 3. Coons patches in three-dimensional space and the parametric grid data of Coons patches



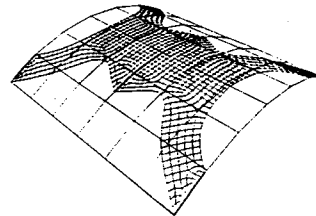
(a) Structured finite element mesh with Coons patches on parametric plane



(b) Unstructured finite element mesh with Coons patches on parametric plane



(c) Structured finite element mesh with Coons patches in three dimension



(d) Unstructured finite element mesh with Coons patches in three dimension

Fig 4. Two step mesh generator based on a Coons patch representation

렇게 구해진 유한요소망의 예는 Fig.4와 같다.

기술한 방식의 장점은 쉘의 형상과 두께를 조절할 때 유한요소망을 직접 사용하지 않아도 되고, 큰 의 조각면의  $C^2$ 의 연속성을 자동적으로 만족하므로 최적화결과가 부드러운 곡면과 완만한 두께의 변화를 가지게 되는데 있다.

#### 4. 유한요소해석

최적화를 수행하기 위해서는 쉘의 구조적 반응을 산정해야 한다. 본 연구에서는 Reissner-Mindlin(RM)의 이론을 이용하여 Huang과 Hinton이 개발한 퇴화 쉘요소 (이하  $H^2$ 요소)<sup>9)</sup>를 이용하여 쉘의 구조적 반응을 측정하였다. 본 연구에 사용된 쉘 요소의 절점 자유도는 Fig.5와 같다.

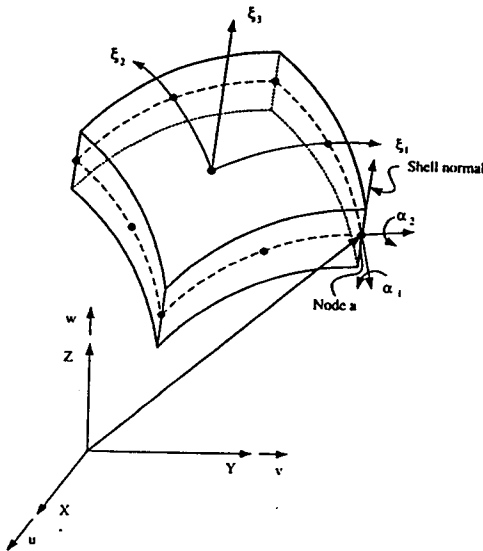


Fig 5. Definitions of notations

$H^2$ 요소는 절점당 5개의 자유도를 가지는 9절점 라그랑지안 요소이다. 요소를 개발하기 위하여 총 네가지의 좌표계를 사용하였다. 쉘의 응력과 변형도는 국부좌표계를 사용하여 계산하였고 회전변위를 표현하기 위해 절점좌표계를 도입하였다. 특히 도입된 요소는 면방향 가변형도의 유도를 위해 독특한

국부좌표계<sup>9)</sup>를 사용하였다.

쉘의 전체 포텐셜에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\pi = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \epsilon_p'^T D_p \epsilon_p' d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_s'^T D_s \epsilon_s' d\Omega \right] - P \quad (4)$$

여기서  $\epsilon'$ 는 국부좌표계를 기준으로 계산된 변형도이며 면방향성분  $\epsilon_p'$ 와 전단성분  $\epsilon_s'$ 로 구분하였다. 변형도는 절점변위벡터를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_p' \\ \epsilon_s' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_p \\ B_s \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (5)$$

$B$ 는 변형도-변위관계 행렬이다. 그리고 등방성재료의 응력- 변형도 관계식은

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p' \\ \sigma_s' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & O \\ O & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p' \\ \epsilon_s' \end{Bmatrix} \quad (6)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $D_p$ 와  $D_s$ 는 다음과 같다.

$$D_p = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix}$$

여기서 물성행렬의 성분은

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad D_{12} = \nu D_{11}, \quad D_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$D_{44} = D_{55} = \frac{k_s E}{2(1 + \nu)}$$

여기서  $E$ 는 탄성계수이고,  $\nu$ 는 프와송비이다. 그리고  $k_s$ 는 전단교정계수이며 5/6을 사용하였다.

유한요소이산화과정을 거치면, 전체 포텐셜에너지는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}. \quad (7)$$

전체 포텐셜에너지를 절점변위  $\mathbf{d}$ 에 대하여 최소화하면 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{d}$ 는 전체 절점변위벡터이고  $\mathbf{f}$ 는 전체절점 하중벡터이며  $\mathbf{K}$ 는 전체 강성행렬이다. 참고로 전체 강성행렬과 전체 절저하중은 각 요소별로 계산한 다음 아래와 같은 방법<sup>11)</sup>으로 조합된다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{K}^{(e)}), \quad \mathbf{f} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{f}^{(e)}). \quad (9)$$

변형에너지를 식(4)에서 면방향 성분과 전단성분으로 구분했기 때문에 요소의 강성행렬도 두 개의 성분으로 분리하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \mathbf{K}_p^{ab(e)} + \mathbf{K}_s^{ab(e)} \\ &= \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}_p^a]^T \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p^a dV \\ &\quad + \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}_s^a]^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s^a dV \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\mathbf{K}_p^{ab(e)}$ 는 면방향의 강성을 나타내는 행렬이고,  $\mathbf{K}_s^{ab(e)}$ 는 전단방향의 강성을 나타내는 행렬이다.  $a$ 와  $b$ 는 요소가 연결된 절점을 나타내며  $\mathbf{B}$ 는 변형도-변위관계 행렬이다. 본 연구에 사용된 쉘 요소는 식(5)에서 유도된 표준  $\mathbf{B}$ 행렬을 사용하는 대신 가변형도를 채용하여 유도한 대체  $\bar{\mathbf{B}}$ 행렬을 사용하였다. 자세한 대체  $\bar{\mathbf{B}}$ 행렬의 유도는 참고문헌<sup>9)</sup>에서 찾아 볼 수 있다.

본 연구에서는 초기 쉘의 부피를 유지하며 변형에너지를 최소화해야 한다. 이때 변형에너지 값은 유한요소해석 결과를 사용하여 계산한다. 변형에너지는 면 방향성분의 변형에너지와 전단성분의 변형에너지를 다음과 같이 분리하여 계산하였다.

$$U = U_p + U_s = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \epsilon_p'^T \mathbf{D}_p \epsilon_p' d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_s'^T \mathbf{D}_s \epsilon_s' d\Omega \right] \quad (11)$$

참고로 위의 식은 전체포텐셜에너지의 내부에너지부분에 해당한다.

### 5. 최적화문제정의

최적화문제는 그 적용분야에 상관없이 일반적으로 다음과 같은 표준식<sup>12)</sup>으로 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && \Psi(\mathbf{s}) \\ &\text{Subjected to} && g_j(\mathbf{s}) \leq 0, \quad j=1, m \\ & && h_j(\mathbf{s}) = 0, \quad j=1, l \\ & && s_i' \leq s_i \leq s_i'', \quad i=1, ndv \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{s}$ 는 설계변수벡터이고,  $\Psi(\mathbf{s})$ 는 목적함수,  $g_j(\mathbf{s})$ 는 부등제약함수이고,  $h_j(\mathbf{s})$ 는 등제약수함수이다.  $s_i'$ 와  $s_i''$ 는  $i$ 번째 설계함수가 가질 수 있는 하한값과 상한값이며  $ndv$ 는 최적화에 사용된 설계변수의 수를 나타낸다.

본 연구에서는 전 질에서도 언급한 바와 같이 쉘의 변형에너지를 목적함수로 사용하였고 초기구조물의 부피  $V_0$ 를 제약조건으로 사용하였다. 설계변수  $s_i$ 로는 조절점의 좌표와 두께 값을 사용하였다.

최적화를 수행하기 위하여 프로그램인 DOT<sup>13)</sup>에 사용된 세 가지의 수학적프로그래밍 알고리즘, Sequential Linear Programming(SLP), Sequential Quadratic Programming(SQP) 그리고 Modified Feasible Direction Method(MFDM)를 채용하여 쉘의 최적형상과 두께분포를 계산하였다. 참고로 사용된 알고리즘의 특성상 하나의 등제약함수를 두 개의 부등제약함수로 환산하여 사용하였다.<sup>13)</sup>

### 6. 쉘최적화설계과정

본 연구에서 제시한 CAGD기법을 이용한 쉘의 최적화는 다음과 같은 다섯 가지의 기본 과정을 거친다.

1) 최적화 문제 정의 : 쉘의 초기형상과 두께의 분포를 큰의 조각면을 사용하여 정의한다. 설계변수의 이동방향과 이동범위 또한 이 단계에서 정의한다. 유한요소해석을 위해서는 하중과 경계조건 등을 준비한다.

2) 유한요소망의 자동생성 : 제 3절에서 설명한 유한요소 자동생성기를 사용하여 전 단계에서 정의된 기하학적인 모델위에 유한요소망을 생성한다. 파라메트릭평면에 유한요소를 생성할 경우 규격요소망<sup>14)</sup>과 비규격요소망<sup>15)</sup>을 두가지 모두 다 사용할 수 있다.

3) **유한요소해석** : 제 4절에서 언급한 쉘요소를 사용하여 유한요소 해석을 한다. 이 단계에서 목적 함수에 해당하는 변형에너지와 제약함수인 초기셀의 부피를 계산한다.

4) **민감도해석** : 민감도 해석은 설계변수가 목적 함수 또는 제약함수에 끼치는 영향의 정도를 파악하는 단계이다. 본 연구에서는 차분법을 사용하여 민감도를 계산하였다.

5) **최적값검색** : 민감도 해석에서 계산된 각 설계변수에 대한 민감도를 사용하여 최적값을 검색한다. 최적값이 구해 질 때까지 2)-5)과정을 반복한다.

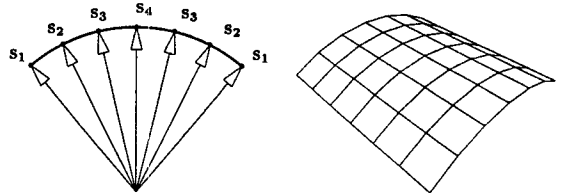
**7. 쉘의 형상과 두께조절기법**

본 연구에서는 CAGD기법을 이용하여 쉘의 최적 형상과 두께의 변화를 구하므로 기하학적 모델을 효과적으로 조절할 수 있어야 한다. 따라서 CAGD기법으로 형성한 기하학적인 모델을 조절하는 방법에 대해 기술한다.

1) **설계변수의 선택** : 설계변수의 선택은 쉘의 형상최적화를 위해서는 매우 중요하다. 한가지 예로써 유한요소의 절점좌표를 설계변수로 사용할 경우 실제 구조물과는 거리가 먼 형상을 최적값으로 구할 수 있기 때문이다. 본 연구에서는 쉘의 형상 및 두께의 분포를 표현하기 위해 쿤의 조각면을 사용하였다. 따라서 쿤의 조각면에 사용된 조절점의 좌표와 그 두께 값을 설계변수로 사용하였다. 이 방법은 자동적으로 곡면의  $C^2$ 연속성을 만족하므로 쉘 최적화를 위해 매우 용이하게 쓰일 수 있다.

2) **설계변수의 연계** : 최적화 과정 중 설계변수의 연계(Linking)는 필수적이다. 예를 들면 설계변수의 연계는 구조물의 초기형상특성을 지켜준다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 실린더 쉘은 길이 방향으로 같은 단면을 가진다. 이러한 구조형상적 특성을 유지하기 위해서는 49개의 조절점을 가지는 기하학적인 모델을 4개의 주 조절점으로 조절할 수

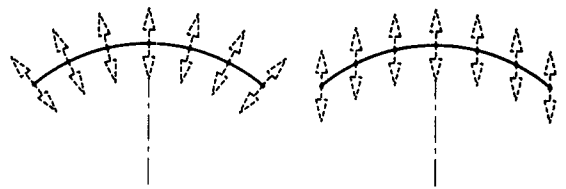
있게 한다. 결과적으로 이러한 설계변수의 연계는 최적화 과정중 구조물의 단면을 길이 방향으로 항상 같게 하여 준다. 또한 이는 설계변수가 49개에서 4개로 줄어든 효과를 나타낸다.



(a) Cross section of cylindrical shell (b) The cylindrical shell modeled using a set of 6x6 Coons patches

Fig. 6 Cylindrical shell

3) **설계변수의 이동방향** : 설계변수의 이동방향은 최적화 과정에서 중요한 의미를 가진다. 그 이유는 설계변수의 이동방향에 따라서 설계공간이 달라지기 때문이다. 본 연구에서는 수직이동과 방사선방향으로의 이동을 허용하였고 Fig. 7에 도시하였다.



(a) Normal direction (b) Vertical direction

Fig. 7 Possible movement directions of the design variables

4) **설계변수의 미세변화** : 각 설계변수의 민감도 해석을 위해서는 아주 미세한 양만큼 설계변수를 변화시켜야 한다. 본 연구에서는 조절점의 좌표와 그 위치에서의 두께 값을 설계변수로 사용하였기 때문에 민감도 해석시 이 들 값을 미세변화시켰다. 기하학적인 모델의 변화시 그에 상응하는 유한요소망도

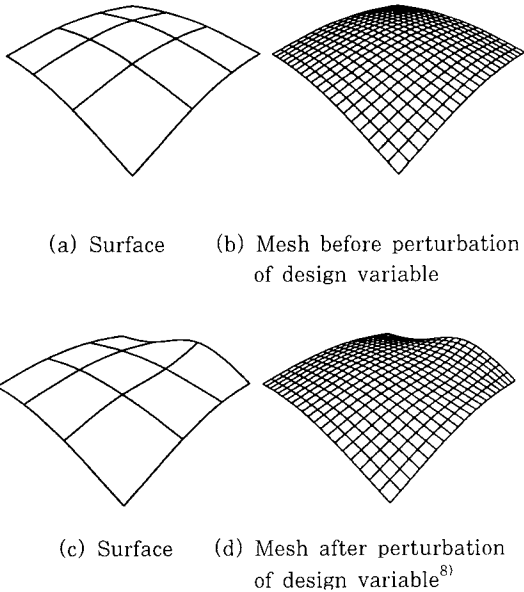


Fig. 8 Effect of perturbation of a design variable on the shell surface and the mesh

다시 생성해야 하는데 기하학적 모델과 상응하는 유한요소망을 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 8로부터 기하학적 모델로 유한요소망을 조절할 수 있음을 알 수 있다.

### 8. 최적화예제

두 가지의 콘크리트 쉘을 지금까지 기술한 방법을 이용하여 최적화 하였다. 세 가지의 최적화 알고리즘 (SLP, MFDM, SQP)을 사용하여 최적형상과 두께분포를 계산하였고 그 결과를 기존에 발표된 최적값<sup>8)</sup>과 비교하였다. 표에 나타난 목적함수값들은 초기변형에너지를 사용하여 정규화하였고 정규화된 변형에너지는  $\bar{\Psi}(\mathbf{s})$ 로 표시하였다. 표에서  $\mathbf{s}^0$ 는 설계변수의 초기값을 나타내며, 제약조건을 만족하기 위한 정규허용오차는 0.01을 사용하였다.

#### 8.1 실린더 쉘

쉘의 중심에 집중하중  $p=2500lb$ 을 받고 있는 실린더 쉘을 최적화하였다. 이와 유사한 쉘은 Scodelis-Lo<sup>16)</sup>에 의해서 처음 해석되었다. 쉘의 반지름은

$R=30ft$ 이고 길이는  $L=50ft$ 이다. 사용된 탄성계수는  $E=4.32 \times 10^8 lb/ft^2$ 이며 프와송비는  $\nu=0.0$ 이다. 전체 쉘은  $6 \times 6$  칸의 조각면을 사용하여 모델링 하였고, 쉘의 사분의 일을  $6 \times 6$  유한요소망을 사용하여 유한요소해석 하였다. 변형에너지를 목적함수로 사용하였고 초기쉘의 부피를 제약값으로 사용했다. 사용된 초기변형에너지와 초기부피는  $\Psi(\mathbf{s}^0)=113.7$ 과이다. 본 연구에서는 형상설계변수 ( $s_1-s_4$ )와 쉘 전체  $V_0=523.4$ 의 두께를 균일하게 변화시키는 두께설계변수 ( $s_5$ )를 사용하였다. 최적화에 사용된 쉘의 초기형상과 형상설계변수의 위치는 Fig. 9에 도시하였다.

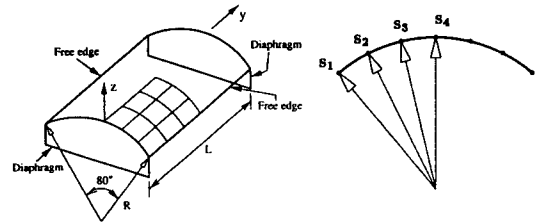


Fig. 9 Cylindrical shell roof subjected to a central point load

쉘의 단면을 길이방향으로 일정하게 유지하기 위하여 길이 방향의 조절점들을 연계하였고 실린더 쉘 단면의 좌우대칭을 유지하기 위하여 중심축을 기준으로 좌우 같은 위치에 있는 조절점을 연계하였다. 결과적으로 쉘의 전체형상을 형성하기 위하여 이용한 49개의 조절점을 4개의 조절점군으로 바꾸어 실린더 쉘의 형상을 조절할 수 있게 되었다. 최적화문제에 사용된 설계변수는 쉘의 방사선방향으로 이동할 수 있게 하였고, 그 이동범위는 Table 1에 기술하였다.

이 예제에서는 SLP를 사용한 경우 최적해를 구하기 위해서 211번의 목적함수 계산을 요하였고, MFDM과 SQP의 경우 각각 94번과 96번의 목적함수 계산이 필요하였다. SQP를 사용했을 때 최적화과정의 이력을 Fig.10에 도시하였다.

최적화를 통해서 초기 쉘의 부피를 유지하면서 95%의 변형에너지를 감소시켰다. 쉘의 두께는 초기 값보다 감소했고 쉘의 형상은 집중하중을 받는 중심축을 기준으로 솟아올랐다. 이러한 최적형상은



Table 1 The results of shape optimization of cylindrical shell

설 계 변 수						
No.	$s^1$	$s^0$	$s^u$	SQP	SLP	MFDM
1	18.000	30.000	35.000	18.000	21.581	18.000
2	18.000	30.000	35.000	20.137	22.900	19.737
3	18.000	30.000	35.000	22.483	18.003	18.005
4	18.000	30.000	35.000	27.927	32.720	31.818
5	0.1200	0.2500	0.3500	0.2347	0.1447	0.1658
$\Psi(s)$	-	-	-	0.0676	0.0533	0.0523

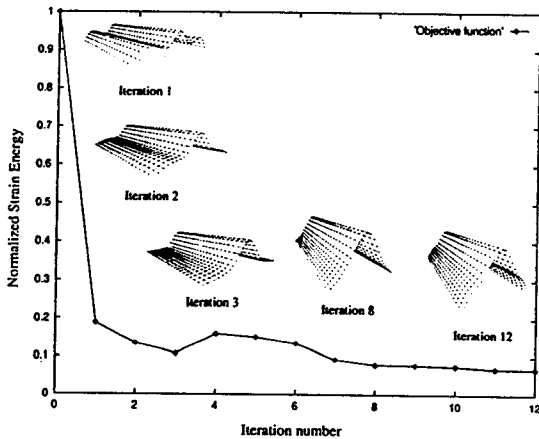


Fig. 10 The iteration history of shape optimization for a cylindrical shell.

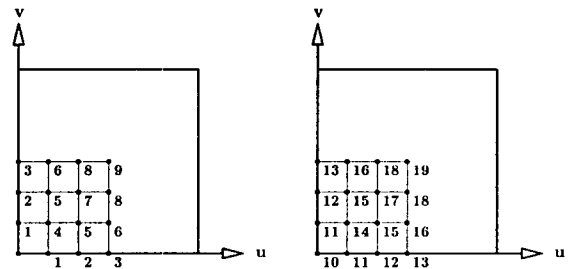
주어진 하중에 효과적으로 지탱하기 위한 쉘의 형상으로 간주된다. 즉 쉘의 두께는 줄어들고 쉘의 모양을 바꿈으로써 쉘의 강성을 증가시켰다.

### 8.2 이중곡률의 가진 쉘

설 하중  $1kN$ 을 받고 있는 쉘을 최적화 하였다. 쉘의 초기형상은 다음식으로 계산하였다.

$$z = \frac{C(x^2 + y^2)}{(L/2)^2}$$

여기서  $L=6m$ 이고  $C=L/10$ 이다. 쉘의 네 모퉁이는 고정지지 하였고 사용된 탄성계수는  $E=3.2 \times 10^7 kN/m^2$  이고 프와송비는  $\nu=0.3$ 이다. 쉘의 두께는  $h=0.2m$ 이다. 전체 쉘을  $6 \times 6$  쿤의 조각을 사용하여 표현하였고, 쉘의 사분의 일을  $6 \times 6$  유한요소망을 사용하여 유한요소해석 하였다. 변형에너지를 목적함수로 사용하였



(a) Shape design variables (b) Thickness design variables

Fig. 11 Positions of key points

고 초기 쉘의 부피를 제약값으로 사용했다. 사용된 초기 변형 에너지와 초기부피는  $\Psi(s^0) = 1.31 \times 10^{-2}$  과  $V_0 = 7.57$ 이다. 본 예제에서는 형상설계변수 ( $s_1 - s_9$ )와 두께설계변수 ( $s_{10} - s_{19}$ )를 동시에 사용하여 쉘을 최적화 하였다. 최적화에 사용된 설계변수의 위치는 Fig.11에 표시하였다.

이 예제에서는 쉘의 형상을 수직방향으로만 이동할 수 있게 하였고 그 이동 범위는 Table 2에 나타내었다.

최적값을 계산하는데 요구된 목적함수의 계산 횟수는 SLP, MFDM, SQP가 각각 437, 277, 166 회이었으며 최종 변형에너지값은 SQP와 MFDM을 이용해서 구한 값이 서로 근사했다. 본 예제에서는 초기 부피를 유지하면서 91%의 변형에너지를 감소시켰다. 세가지의 결과중 SQP를 사용하여 구한 최적화 이력을 Fig.12에 도시하였다. 참고로 Table 2에 제시된 참고문헌 8의 결과가 본 연구에서 구한 최적값에 비해 열등한 이유는 국부최적값(Local optimum)이 계산되어졌기 때문인 것으로 사료된다.

쉘의 형상은 전체적으로 위로 솟아 올랐으며 이

Table 2 The results of mixed optimization of doubly curved shell

No.	설 계 변 수						
	$s^1$	$s^0$	$s^u$	Ref[8]	SQP	SLP	MFDM
1	-1.20	-0.87	1.20	-0.37	-0.555	-0.522	-0.533
2	-1.20	-0.67	1.20	0.90	0.306	0.466	0.384
3	-1.20	-0.60	1.20	1.20	0.283	0.368	0.432
4	-1.20	-0.50	1.20	0.17	-0.093	-0.088	-0.010
5	-1.20	-0.33	1.20	0.75	0.439	0.470	0.454
6	-1.20	-0.27	1.20	1.12	0.611	0.802	0.639
7	-1.20	-0.13	1.20	1.04	0.872	1.147	0.866
8	-1.20	-0.07	1.20	1.20	1.067	0.767	1.075
9	-1.20	0.00	1.20	1.20	1.200	-0.167	1.200
10	0.10	0.20	0.30	0.30	0.300	0.300	0.300
11	0.10	0.20	0.30	0.30	0.300	0.300	0.300
12	0.10	0.20	0.30	0.10	0.100	0.100	0.100
13	0.10	0.20	0.30	0.23	0.100	0.100	0.100
14	0.10	0.20	0.30	0.30	0.172	0.130	0.178
15	0.10	0.20	0.30	0.10	0.204	0.199	0.203
16	0.10	0.20	0.30	0.10	0.300	0.300	0.300
17	0.10	0.20	0.30	0.21	0.100	0.100	0.100
18	0.10	0.20	0.30	0.10	0.100	0.100	0.100
19	0.10	0.20	0.30	0.27	0.100	0.100	0.100
$\bar{\Psi}(s)$	-	-	-	0.28	0.085	0.094	0.083

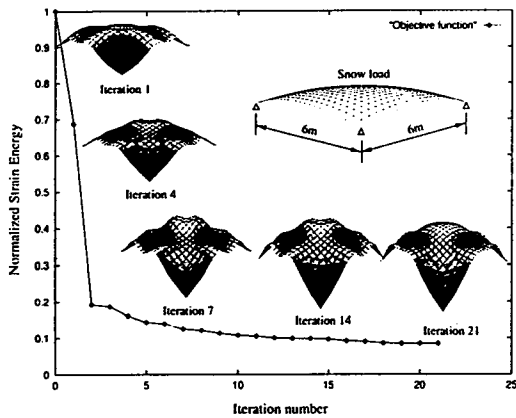


Fig. 12 The iteration history of shape optimization for the free form shell under snow load

는 설하중에 효과적으로 지탱하기 위한 것으로 간주된다. 흥미로운 사실은 형상최적화에서 구해진 쉘의 형상이 실제 설계에서 나타나는 형상과 매우 유사하다는 것이다. 다섯개의 지지점을 가지고 있으나

Heinz Isler에 의해 설계된 파리근교의 Horticultural Center가 유사한 쉘의 예로 들 수 있다.

### 9. 결 론

본 연구에서는 CAGD기법을 사용하여 쉘을 최적화 할 수 있는 시스템을 개발하였다. 개발된 최적화 시스템의 효율성을 입증하기 위하여 두개의 콘크리트 쉘을 최적화하였고 다음의 결론을 얻었다.

1) 쉘 최적화에 CAGD기법의 도입은 쉘의 형상을 조절하는데 유용하다.

2) 콘의 조각면을 사용하면 그 정의가 간단하고 자동적으로 곡면의  $C^2$ 연속성을 만족시켜주므로 자동요소 생성기의 개발이 용이하다.

3) 수학적 프로그래밍기법을 사용하는 프로그램 DOT를 쉘 최적화문제에 적용하였고 세가지 알고리

음을 비교 연구한 결과 SQP와 MFDM이 쉘 최적화에 효과적이었다.

4) 새로이 개발된 최적화 시스템은 쉘을 설계할 때 매우 유용하게 쓰일 것으로 사료된다.

### 감사의 글

본 논문의 일부는 영국 Engineering and Physical Sciences Research Council과 초대형구조시스템연구센터(STRESS)의 연구비 (GR/K22839) 지원으로 이루어진 것으로 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고 문헌

1. Faux, I.D. and Pratt, M.J., *Computational Geometry Ellis Horwood*, Chichester, 1979
2. Farin, G., *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, Academic Press, San Diego, 1990
3. Coons, S.A., *Surfaces for computer-aided design of space figures*, Report of Mech. Eng. Dept., MIT, 1964
4. Ramm, E., Bletzinger, K.U. and Kimmich, S., *Strategies in shape optimization of free-form shells*, in *Festschrift Erwin Stein, Nonlinear computational mechanics - a state of the art*, edited by P. Wriggers and W. Wagner, Springer, Berlin, 1991
5. Bletzinger, K.U., Kimmich, S. and Ramm, E., "Efficient modelling in shape optimal design", *Computing Systems in Eng.*, 2, 483-495, 1991
6. Schittkowski, K., "The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function", *Numerische Mathematik*, 38, 83-114, 1981

7. Svanberg, K., "The method of moving asymptotes a new method for structural optimization", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24, 359-373, 1987
8. Rao, N.V.R. and Hinton, E., "Structural optimization of variable thickness plates and free form shell structures", *Structural Engineering Review*, 5, 1-21, 1993
9. Huang, H.C. and Hinton, E., "A new nine-node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 22, 73-92, 1986
10. *The NAG Fortran library manual*, Numerical algorithm group Ltd., Oxford, UK (1988)
11. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method-Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987
12. Lee, S.J. and Hinton, E., On the reliability of optimized shells, in *Proc. Of 4<sup>th</sup> International Conference on Computational Structures Technology and the 1<sup>st</sup> International Conference on Engineering Computational Technology - Advances in Computational Structural Mechanics*, edited by B.H.V. Topping, 371-381, Edinburgh, UK, 1998
13. DOT manual VMA Engineering, 1996
14. Crook, A.J.L., Hoe, Y.C., Hinton, E. and Stagg, K.G., "User guide to the Gold suite of programs", C/R/490/84a, Dept. of Civil. Eng., University College of Swansea, 1984
15. Peiro, J., "A finite element procedure for the solution of Euler equations on unstructured meshes", C/ph/126/89, Dept. of Civil Eng., University of Wales, Swansea, 1989
16. Scordelis, A.C. and Lo, K.S., "Computer analysis of cylindrical shells", *J. Amer. Concr. Inst.*, 61, 539-561, 1964

(접수일자 : 1999. 4. 6)