

# 변단면과 경계조건에 따른 특별직교이방성판의 진동해석

## Vibration Analysis of Special Orthotropic Plate with Non-uniform Cross-Section and with Arbitrary Boundary Condition

김 덕 현\*  
Kim, Duk-Hyun

원 치 문\*\*  
Won, Chi-Moon

이 정 호\*\*\*  
Lee, Jung-Ho

홍 창 우\*\*\*  
Hong, Chang-Woo

### 요 지

변단면과 다양한 경계조건을 갖는 보와 타워구조물의 제1모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 해는 1974년에 Kim에 의해 발표되었다. 최근 이 방법은 복합재료 적층판을 포함하는 2차원 문제의 제 1모드 진동해석에 확장되었으며, 다양한 경계조건과 불규칙 단면을 갖는 판에 매우 효과적이다. 이 논문에서는 변단면과 경계조건에 따른 특별직교 이방성판에 대한, Kim에 의해 개발된 간편한 진동해석 방법의 응용결과가 주어진다. 또한 집중하중들에 대한 영향이 연구되었다.

**핵심용어** : 진동해석, 변단면, 다양한경계조건, 집중하중

### Abstract

A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beams and tower structures, with irregular cross-sections and with arbitrary boundary conditions was developed and reported by D. H. Kim in 1974. This method has been developed for two-dimensional problems including the laminated composite plates and was proved to be very effective for the plates with arbitrary boundary conditions and irregular sections. In this paper, the result of application of this simple method of vibration analysis developed by D. H. Kim to the special orthotropic plates with variable cross-section, and with arbitrary boundary conditions is presented. The effect of concentrated point mass/masses is also studied.

**Keywords** : *Vibration Analysis, Variable Cross-section, Arbitrary Boundary Condition, Concentrated Point Mass*

### 1. 서 론

복합재료는 해석, 설계, 제작, 건설 그리고 품질 관리에 대한 과정과 규준이 확립되었을 때 광범위한 토목분야에 경제적, 효과적으로 사용될 수 있다. 공

장 또는 건물 등의 바닥판 슬래브와 같은 몇몇 구조 요소들은 자중을 포함하여 집중하중/하중군들의 작용을 받는다. 설계기술자들은 그러한 구조요소의 고유진동수를 계산하는 것이 필요하지만 그러한 문제에 대한 정밀해를 얻는 것은 매우 어렵다<sup>9)</sup>.

\* 정회원 · KOREA COMPOSITE, 대표

\*\* 한라대학교 건축 · 토목공학부, 전임강사

\*\*\* 강원대학교 산업기술연구소, 연구원

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Navier 또는 Levy해의 형태와 다른 경계조건을 갖거나 변단면, 또는 집중하중을 포함하는 불균등 자중을 갖는 적층판의 경우에, 해석적 해를 얻기가 매우 어렵다<sup>4),9)</sup>. 고유치 문제에 대한 수치적 방법은 그러한 해를 찾는 데 있어 매우 복잡하다. Whitney와 Ashton은 특별직교 이방성 적층판에 대해 연구를 하였는데, Navier 해와 마찬가지로 경계조건이 사변 단순지지된 경우에 한해 정확한 해를 얻을 수 있다<sup>1),2)</sup>.

단자유도의 진동해석에 가장 일반적인 해석방법인 Rayleigh Method의 기본 개념은 에너지 보존의 개념이다. 무한자유도를 갖는 보의 경우 단자유도 시스템으로 감소시키기 위해 형상함수(shape function)을 가정하는 것이 필요하다<sup>11)</sup>. 고유진동수는 최대운동에너지가 작용하는 동안 발생하는 최대변형에너지를 같게 놓으므로써 구할 수 있다. 그러나 이 방법의 결과는 실제값과 같거나 크게 계산된다. 결국 실제값과 Rayleigh 결과값의 비율은 1과 같거나 크다<sup>11)</sup>.

따라서 변단면 등 임의의 경계조건에 따른 판의 간편하고도 정확한 진동해석 방법의 연구가 요구된다.

보와 타워 구조물의 제1모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 방법은 1974년에 의해 발표되었다<sup>3)</sup>. 최근 이 방법은 복합재료 적층판을 포함하는 2차원 문제의 제1모드 진동해석에 확장되었으며<sup>5)</sup>, 2차원 문제의 제2모드 진동에 대한 진동해석과 두꺼운 적층판에 대한 적용에는 참고문헌에 주어졌다<sup>6), 7)</sup>.

이 논문에서는 변단면 형상을 갖는 판의 고유진동해석을 보다 간편하게 수행할 수 있는 방법을 제시하였으며, 자중을 포함하는 집중하중을 갖는 적층판에 대해서도 간편하게 고유진동해석을 할 수 있는 방법을 제시하고자 하였다.

## 2. 진동해석방법

이 논문에서 사용된 진동이론은 처짐의 영향면을 필요로 하는데, 어떠한 방법이라도 사용되어질 수 있다<sup>3)</sup>. 이 진동이론의 기본개념은 다음과 같다.

어떤 점의 최대 처짐 크기는 다음과 같이 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (1)$$

여기서 (i, j)는 고려한 점을 나타내며, w는 구조계에서 일어나는 첫 처짐(진폭)을 의미하고, W는 처음에 임의로 주어지는 가상 최대 처짐을 나타낸다. 또한 식에서 (1)은 첫 번째로 주어지는 임의의 처짐을 나타낸다. W는 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가장하면 정확한 고유진동수로의 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 최대 진폭에 대응하는 동적 힘은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$F(i, j)(1) = m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (2)$$

여기서 F는 w(i, j)(1)에 의해 야기되는 동적힘을, m은 질량을 의미하며,  $\omega(i, j)$ 는 고유진동수를 나타낸다. 이 힘에 의해 일어나는 새로운 변위는 F의 함수이고 다음 식과 같이 쓸 수 있다

$$\begin{aligned} w(i, j)(2) &= f \{ m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \} \\ &= \sum \Delta(i, j, k, l) \{ m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \} \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서  $\Delta(i, j, k, l)$ 는 처짐에 대한 영향 계수이며, 단위하중을 (k, l)점에 작용시킬 때의 (i, j)점에서의 처짐값들이다. 공명 상태하에서 구조 부재의 모든 점에서 고려한 w(i, j)(1)과 w(i, j)(2)는 동일해야 하고 다음 식의 조건을 만족해야 한다.

$$w(i, j)(1) / w(i, j)(2) = 1 \quad (4)$$

식(4)의 방정식으로 부터 (i, j)의 각 점에서의  $\omega(i, j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로  $\omega(i, j)$ 의 충분한 값은 모든 (i, j)점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진  $\omega(i, j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 처짐이 최대인 곳에서  $\omega(i, j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다. 두 번째 cycle에서의 처짐은 다음 식과 같이 구해질 수 있다.

$$w(i, j)(3) = f \{ m(i, j) [\omega(i, j)(2)]^2 w(i, j)(2) \} \quad (5)$$

식(5)에서  $w(i, j)$ (2)의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. 복합재료 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지 조건을 가진 판의 경우 이 판을 몇 개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 이 방법은 구조물의 고유 진동 해석을 위해 매우 정확하고 간편한데 이 방법의 정확성은 처짐 영향계수의 정확성에 비례한다.

### 3. 수치 해석의 예

수치 해석에 사용된 적층판의 형태는  $[0^0, 90^0, 0^0]_r$ 이며, 적층판의 물성값은 다음과 같다.

$$E_1 = 67.36 \text{ GPa}, E_2 = 8.12 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.2720,$$

$$\nu_{21} = 0.0328, G_{12} = 3.0217 \text{ GPa}$$

여기서  $E_1$  : 종방향 탄성계수,  $E_2$  : 횡방향 탄성계수,  $\nu_{12} = \nu_{21}$  : 프아송비,  $G_{12}$  : 전단탄성계수.

하나의 플라이(ply)의 두께,  $t$ ,는 0.005m이고 판의 형상비는,  $c = a(x)/b(y) = 1\text{m}/1\text{m} = 1$ 이다. 적층판의 단면형상은 Fig. 1에 나타내었다. 여기서 단면의 변화는 수치해석의 편의를 위해 층을 추가로

적층시킨 것으로 가정하였으며, 제작상의 문제는 없다고 보고 이상화하여 단면을 가정하였다.

이 논문에서는 변단면과 임의의 경계조건 그리고 첨가된 하중, 하중중들이 작용하는 적층판에 대한 고유진동해석을 위해 Kim에 의해 제안된 진동해석 방법으로 비교적 쉽게 수행할 수 있는 방법을 제시하였다<sup>3)</sup>. 이를 위해 사변단순지지된 경우의 적층판과 양단단순-타단자유인 경계조건을 갖는 적층판에 대해 Kim의 방법과 F.E.M.으로 고유진동수 및 처짐을 계산하여 고찰하였다.

여기서 F.E.M.은 상용유한요소 프로그램인 ALGOR을 이용하여 판의 처짐을 계산하였다. 이때 프로그램의 Element중 4 Node Sandwich Plate Element를 이용하여 해석하였는데 이것은 전단 변형을 고려한 Mindlin의 판 이론을 기초한 요소이다. 이 요소의 각절점은 다섯 개의 자유도를 갖는다. 즉, 두개의 직교하는 면내 변위( $u, v$ )와 한개의 수직 변위( $w$ ) 그리고 두 개의 회전변위( $\gamma_x, \gamma_y$ )를 갖는다(평면내의 회전 변위는 무시되었다).

집중하중에 의한 영향에 대해 연구하기 위해 Fig. 2와 같이 CASE-A와 CASE-B로 구분하여 수치해석을 수행하였다. 여기서 CASE-A는  $P(i, j) = n \cdot q \cdot a \cdot b$

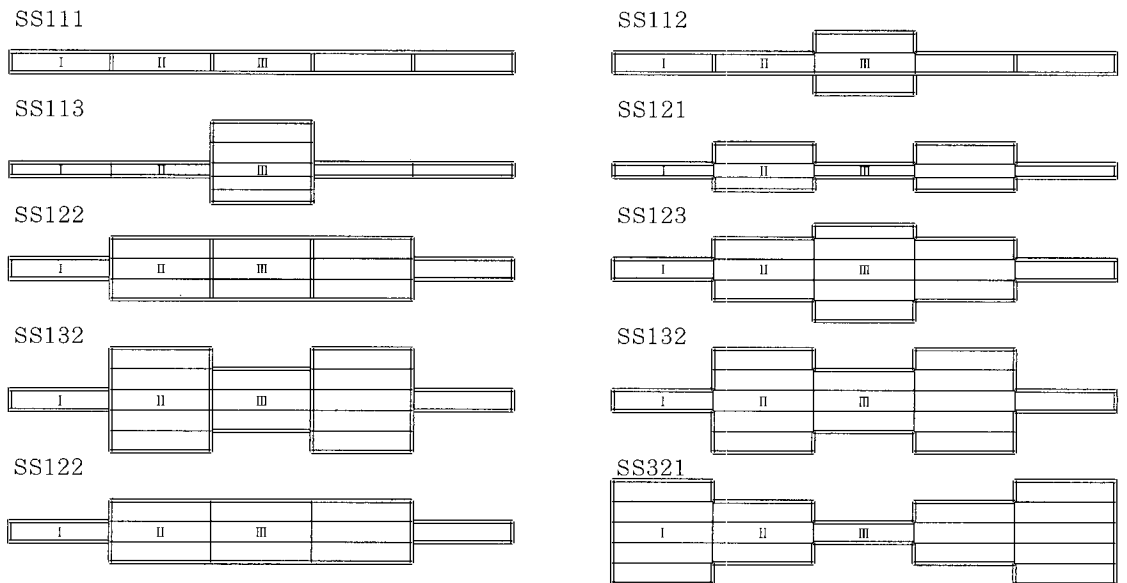


Fig. 1 Cross-Section of the plates

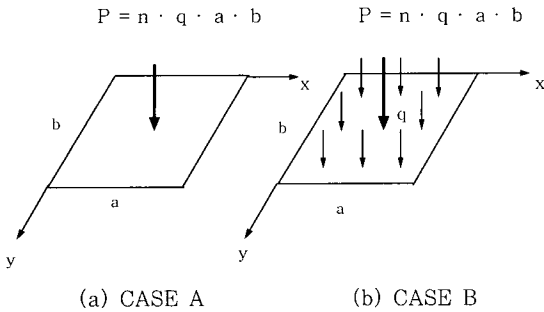


Fig. 2 Plates with and without its own weight

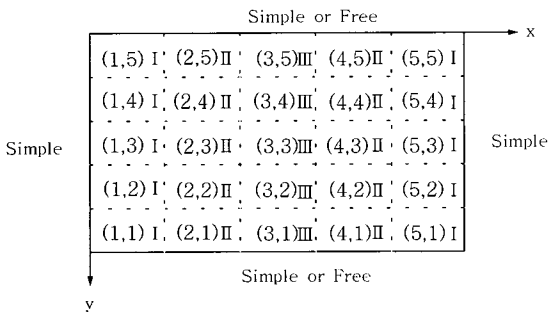


Fig. 3 Location of the concentrated mass(i, j)

의 집중하중만이 판에 작용하는 경우이고 CASE-B는  $P(i, j) = n \cdot q \cdot a \cdot b$ 의 집중하중과 등분포하중  $q$ 가 작용하는 경우이다. 여기서  $n$ 은 정수로서 집중하중을 자중의 정수배로 증가시켜 하중을 재하하기 위하여 고려한 변수이며, 자중은  $q \cdot a \cdot b$ 이고, 다시  $q$ 는 단위중량과 두께의 곱인  $\rho \cdot h$ 로 정의된다. Fig.

3은 적층판의 요소 분할을 그림으로 나타낸 것이다.

### 3.1 사변단순지지된 복합적층판

적층판의 단면형태변화는 다음과 같이 3가지 형태로 고려하였다.

- Type 1.  $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)_3$   $h=9t=0.045m$
- Type 2.  $(90^\circ, [0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]_3, 90^\circ)$   $h=9t+2t=0.055m$
- Type 3.  $(0^\circ, 90^\circ, [0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]_3, 90^\circ, 0^\circ)$   $h=9t+4t=0.055m$

예) SS123: 사변단순지지, I 단면에 Type 1, II 단면에 Type 2, III 단면에 Type 3의 단면 변화

Fig. 1에서 보인 단면형태별로 Kim 방법과 F. E. M.으로 계산한 circular frequencies를 Table 1에 나타내었다. 이 표는 고유 진동수에 대한 변단면의 영향을 나타낸다. Table 1의 결과값은 자중하중  $\sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  값을 공통인수로 빼고 계산된 고유진동수이다. 그러므로 실제 자중을 고려한 고유진동수 값을 구하고자 한다면, 구조부재의 단위중량인  $\rho$  값만 고려하면 표를 이용하여 쉽게 계산 할 수 있다. 표에서 보는바와 같이 Kim의 방법에 의한 결과 값과 F. E. M에 의한 결과 값의 정밀도가 99.54~99.91로 나타났다. 따라서 Kim의 방법에 의한 고유진동해석 방법이 매우 효과적임을 알 수 있다.

Table 2는 단면형상별로 중앙점에 집중하중을 갖는 판의 고유진동수를 나타낸 것이며  $P(i, j) = n \cdot q \cdot a \cdot b = n \cdot 9 \cdot t \cdot \rho \cdot a \cdot b$ 의 집중하중이 작

Table 1  $\omega_n \cdot \sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  of simple supported plate with various section configurations

SECTION			Kim's Method (rad/sec)	F.E.M (rad/sec)	Accuracy(%)
I	II	III			
1	1	1	8214.492	8221.813	0.9991
1	1	2	8885.012	8907.424	0.9975
1	1	3	9181.958	9203.136	0.9977
1	2	1	9188.185	9205.045	0.9982
1	2	2	9687.572	9722.223	0.9964
1	2	3	9961.463	10002.662	0.9959
1	3	1	9760.449	9766.559	0.9994
1	3	2	10246.550	10277.797	0.9970
1	3	3	10945.840	10996.288	0.9954
1	2	1	9952.749	9915.05	1.0038

Note : 1, 2 and 3 are section types of laminate

용할 때 자중의 무시효과를 보여준다. 즉 작용하는 집중하중이  $n$ 배로 증가됨에 따라 자중을 무시한 경우(CASE-A)와 고려한 경우(CASE-B)의 고유진동수 값이 일치되어 감을 알 수 있다. 이것은 작용하중이 자중의 일정 값 이상이 되었을 때 주어진 범위 내에서 자중을 무시하고 작용하중 만으로도 비교적 정확한 고유진동수를 계산할 수 있다는 것을 의미한다.

Fig. 4에는 각각의 단면형태에 따른 CASE B와

CASE A의 비율을 그래프로 나타내었다. 각각의 단면형태에 따라 값의 차이는 있지만,  $n$ 값이 3일때 95%이상의 정확성을 가지고 있다. 이것이 의미하는 것은 작용하는 집중하중이 자중의 3배이상일 때는 자중을 무시하고 고유진동해석을 수행해도 자중을 고려하여 구한 고유진동수와 5% 이하의 차이를 갖고 비교적 쉽게 진동해석을 수행할 수 있다는 것을 의미한다.

Table 2  $\omega_n \cdot \sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  with  $P = n \cdot q \cdot a \cdot b$  at the center of the plate

(Unit : rad/sec)

(i, j) n	Section 111			Section 112			Section 113		
	CASE A	CASE B	Ratio	CASE A	CASE B	Ratio	CASE A	CASE B	Ratio
0		8214.492			8885.012			9181.958	
1	3904.582	3552.045	0.9097	4412.101	3974.494	0.9008	4804.564	4280.658	0.8910
2	2760.957	2628.458	0.9520	3119.826	2953.987	0.9468	3397.340	3197.247	0.9411
3	2254.312	2180.646	0.9673	2547.327	2454.839	0.9637	2773.916	2662.000	0.9597
5	1746.182	1711.351	0.9801	1973.151	1929.305	0.9778	2148.667	2095.480	0.9752
7	1475.793	1454.609	0.9856	1667.617	1640.919	0.9840	1815.955	1783.534	0.9821
10	1234.737	1222.260	0.9899	1395.229	1379.490	0.9887	1519.337	1500.209	0.9874
15	1008.159	1001.337	0.9932	1139.199	1130.589	0.9924	1240.533	1230.061	0.9916
20	873.091	868.650	0.9949	986.575	980.968	0.9943	1074.333	1067.512	0.9937

(i, j) n	Section 121			Section 122			Section 123		
	CASE A	CASE B	Ratio	CASE A	CASE B	Ratio	CASE A	CASE B	Ratio
0		9188.185			9687.572			9961.463	
1	4376.871	3983.565	0.9101	4805.434	4334.452	0.9020	5231.165	4661.024	0.8910
2	3094.915	2947.278	0.9523	3397.955	3219.826	0.9476	3698.992	3481.438	0.9412
3	2526.988	2444.946	0.9675	2774.419	2675.155	0.9642	3020.215	2898.578	0.9597
5	1957.396	1918.621	0.9802	2149.055	2102.029	0.9781	2339.448	2281.662	0.9753
7	1654.302	1630.723	0.9857	1816.283	1787.658	0.9842	1977.195	1941.976	0.9822
10	1384.088	1370.203	0.9900	1519.612	1502.741	0.9889	1654.240	1633.464	0.9874
15	1130.103	1122.513	0.9933	1240.758	1231.530	0.9926	1350.681	1339.308	0.9916
20	978.698	973.757	0.9950	1074.528	1068.519	0.9944	1169.724	1162.316	0.9937

(i, j) n	Section 131			Section 132			Section 133		
	CASE A	CASE B	Ratio	CASE A	CASE B	Ratio	CASE A	CASE B	Ratio
0		9760.449			10246.55			10945.84	
1	4564.787	4168.667	0.9132	4987.237	4515.620	0.9054	5671.708	5073.103	0.8945
2	3227.792	3097.452	0.9540	3526.509	3348.631	0.9496	4010.503	3782.921	0.9433
3	2635.481	2553.119	0.9687	2879.382	2428.563	0.9739	3274.562	3147.498	0.9612
5	2041.435	2002.536	0.9809	2230.360	2000.209	0.9824	2536.465	2476.173	0.9762
7	1725.327	1701.681	0.9863	1884.998	1642.762	0.9882	2143.704	2106.978	0.9829
10	1443.512	1429.591	0.9904	1577.103	1322.710	0.9924	1793.551	1771.895	0.9879
15	1178.623	1171.014	0.9935	1287.699	1137.691	0.9944	1464.429	1452.578	0.9919
20	1020.717	1015.765	0.9951	1115.180	1109.197	0.9946	1268.232	1260.514	0.9939

Table 2 continued

n	Section 321		
	(i,j) CASE A	CASE B	Ratio
0		9952.748	
1	4344.974	4013.684	0.9238
2	3072.361	2949.261	0.9599
3	2508.572	2440.415	0.9728
5	1943.131	1911.016	0.9835
7	1642.246	1622.743	0.9881
10	1374.001	1362.528	0.9916
15	1121.867	1115.600	0.9944
20	971.565	967.488	0.9958

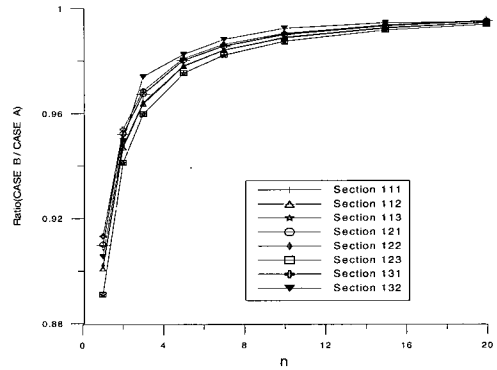


Fig. 4 Ratio of CASE B and CASE A

판에 여러 집중하중이 작용할 경우에도 Kim의 방법이 효과적으로 적용될 수 있다는 것을 보이기 위해 Fig. 5와 같은 단면형상을 갖는 적층판과 임의의 차륜하중을 고려하여 수치해석을 수행하였다. 이때 계산된 고유진동수는  $2051.83/\sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  rad/

sec이다. 또한 판의 (i,j)점에서 계산된 처짐값을 Table 3에 나타내었다. 주어진 결과값들은 기 계산된 처짐의 영향면에 각각의 작용하중값을 곱함으로써 매우 쉽게 정확한 결과 값을 얻을 수 있다. Fig. 5에서 N은 힘의 단위인 뉴톤(Newton)이다.

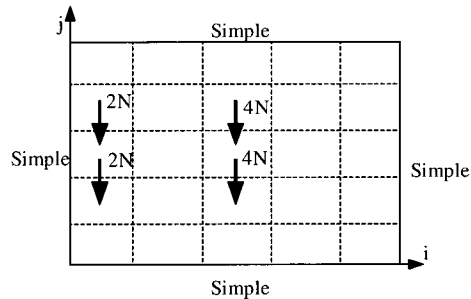
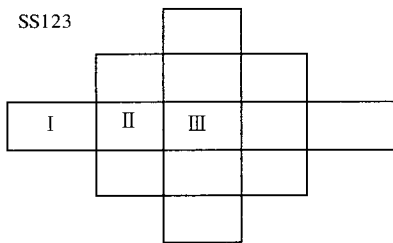


Fig. 5 Location of four concentrated loads

Table 3 Deflection at (i, j) points of the plate with SS123 type section

Deflection (UNIT : 10<sup>-6</sup> M)

I \ J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0302	0.0593	0.0841	0.0932	0.0961	0.0831	0.0653	0.0453	0.0231	0.0000
3	0.0000	0.0562	0.1075	0.1467	0.1676	0.1691	0.1520	0.1218	0.0844	0.0431	0.0000
4	0.0000	0.0743	0.1403	0.1901	0.2178	0.2201	0.1996	0.1616	0.1124	0.0574	0.0000
5	0.0000	0.0823	0.1564	0.2129	0.2439	0.2466	0.2232	0.1802	0.1254	0.0642	0.0000
6	0.0000	0.0823	0.1575	0.2164	0.2465	0.2510	0.2256	0.1819	0.1268	0.0650	0.0000
7	0.0000	0.0778	0.1483	0.2022	0.2322	0.2356	0.2441	0.1737	0.1215	0.0624	0.0000
8	0.0000	0.0664	0.1254	0.1702	0.1959	0.1997	0.1833	0.1504	0.1059	0.0545	0.0000
9	0.0000	0.0479	0.0901	0.1221	0.1405	0.1440	0.1332	0.1102	0.0782	0.0404	0.0000
10	0.0000	0.0250	0.0471	0.0637	0.0734	0.0754	0.0701	0.0582	0.0415	0.0215	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

### 3.2 양단단순-타단자유인 적층복합판

경계조건에 관계없이 주어진 방법이 효과적으로 사용될 수 있다는 것을 보이기 위해 양단단순-타단자유인 경계조건을 갖는 적층판을 고려하였다. 즉, Fig. 2에서와 같이  $x=0$ ,  $x=a$  에서 단순지지,  $y=0$ ,  $y=b$  에서 자유이다. 또한 단면형태변화는 사변 단순지지된 경우와 동일한 조건으로 Type 1, Type 2, Type3의 3가지 형태로 정의하였다.

기타 물성값 및 단면형상에 대한 기호 규약은 사변 단순지지된 적층복합판의 수치예와 같다. Table 4는 Kim의 방법과 F.E.M에 의한 circular frequencies 값을 단면형태별로 나타낸 것이다. 표에서 보는 바와 같이 두가지 방법에 의한 결과가 사변 단순 지지된 적층판의 경우와 같이 두 값의 차이가 극히 미소한 것을 알 수 있다. Table 5는 자중을 무시한 경우(CASE-A)와 고려한 경우(CASE-B)의

고유진동수값을 나타낸 것이다. 이때 적층판의 단면형상을 Fig. 1의 SS321 단면을 고려하였으며, 경계조건만 양단단순-타단자유로 하여 수치해석을 수행하였다. 이 경우에도 사변 단순지지된 판의 경우와 유사한 경향을 나타내었다. 두 수치해석 결과 값의 비율을 Table 6에 나타내었다.

이 논문에서 사용된 방법의 잇점은 구조 해석의 첫 번째 단계에서 구해지는 처짐의 영향면을 이용하여 고유진동수를 계산할 수 있다는 것이다.

사변단순지지된 적층판의 수치 예에서와 마찬가지로 여러 집중하중에 대한 적용 예로서 Fig. 5와 같은 하중군으로, SS321단면의 단면형상을 기준으로 경계조건만 단순-자유로 할 때 수치해석을 수행하였다. 이때 고유진동수는  $7433.498/\sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  이다. 판의 (i, j)점에서의 처짐값을 Table 7에 나타내었다.

Table 4  $\omega_n \cdot \sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  Obtained by Kim's Method and F.E.M

SECTION				Kim's Method (rad/sec)	F.E.M (rad/sec)	Accuracy(%)
PART	I	II	III			
TYPE	1	1	1	6919.263	6957.5065	99.45
	1	1	2	6844.230	6888.7757	99.35
	1	1	3	7336.842	7384.5282	99.35
	1	2	1	6844.974	6879.6540	99.50
	1	2	2	6759.013	6802.2258	99.36
	1	2	3	7315.868	7369.2547	99.28
	1	3	1	7485.102	7513.0802	99.63
	1	3	2	7470.046	7513.5045	99.42
	1	3	3	8630.739	8699.9590	99.20
	3	2	1	8009.542	7729.2428	103.63

Table 5  $\omega_n \cdot \sqrt{9 \cdot t \cdot \rho}$  for SECTION 321 with  $P=n \cdot a \cdot b \cdot q$  at (i, j)  
CASE A = q Neglected, CASE B = q Considered (Unit : rad/sec)

n	$\omega(i, j)$	$\omega(1, 1)$		$\omega(1, 2)$		$\omega(1, 3)$	
		CASE A	CASE B	CASE A	CASE B	CASE A	CASE B
0			8009.542		8009.542		8009.542
1		6003.810	6744.063	8981.125	6703.633	9106.189	6711.086
2		4902.090	5407.951	6350.614	5521.312	6439.048	5563.884
3		4245.335	4586.043	5185.255	4740.453	5257.461	4789.977
5		3466.301	3653.787	4016.481	3814.198	4072.412	3861.107
7		3001.905	3123.592	3394.546	3273.863	3441.816	3316.168
10		2560.033	2635.298	2840.081	2770.085	2879.630	2806.951
15		2122.667	2165.423	2318.917	2281.120	2351.208	2312.049
20		8981.125	1881.188	2008.240	1983.793	2036.206	2010.907

Table 6 Natural frequency ratio for each section :  $\omega(\text{CASE B})/\omega(\text{CASE A})$

n \ (i, j)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
1	0.7943	0.7464	0.7370	0.9161	0.8667	0.8577	0.9428	0.8992	0.8909
2	0.9008	0.8694	0.8641	0.9564	0.9281	0.9231	0.9705	0.9463	0.9417
3	0.9355	0.9142	0.9111	0.9705	0.9509	0.9474	0.9801	0.9634	0.9602
5	0.9622	0.9496	0.9481	0.9821	0.9699	0.9678	0.9880	0.9776	0.9757
7	0.9733	0.9644	0.9635	0.9872	0.9783	0.9768	0.9914	0.9839	0.9825
10	0.9815	0.9754	0.9748	0.9910	0.9847	0.9836	0.9939	0.9887	0.9877
15	0.9877	0.9837	0.9833	0.9940	0.9898	0.9890	0.9960	0.9924	0.9917
20	0.9908	0.9878	0.9876	0.9955	0.9923	0.9918	0.9970	0.9943	0.9938

Table 7 Deflection, at (i, j) points of the plate with SF 321 type section

Deflection

(UNIT :  $10^{-6}$  m)

I \ J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.000	0.044	0.121	0.197	0.248	0.265	0.244	0.190	0.117	0.042	0.000
2	0.000	0.085	0.173	0.255	0.309	0.325	0.299	0.239	0.159	0.078	0.000
3	0.000	0.114	0.219	0.308	0.368	0.386	0.354	0.284	0.195	0.099	0.000
4	0.000	0.132	0.251	0.348	0.414	0.438	0.397	0.317	0.218	0.110	0.000
5	0.000	0.137	0.262	0.365	0.434	0.453	0.414	0.332	0.227	0.115	0.000
6	0.000	0.134	0.255	0.354	0.421	0.445	0.404	0.324	0.223	0.112	0.000
7	0.000	0.119	0.230	0.321	0.379	0.396	0.365	0.296	0.205	0.104	0.000
8	0.000	0.099	0.193	0.270	0.318	0.331	0.308	0.254	0.178	0.090	0.000
9	0.000	0.077	0.150	0.211	0.250	0.262	0.245	0.202	0.142	0.072	0.000
10	0.000	0.051	0.103	0.150	0.182	0.192	0.180	0.147	0.100	0.050	0.000
11	0.000	0.020	0.055	0.090	0.115	0.125	0.116	0.092	0.057	0.021	0.000

#### 4. 결 론

#### 참 고 문 헌

이 논문에서는 변단면을 갖는 적층복합판의 간편한 진동해석 방법을 제시하였다. 사용된 방법은 매우 정밀하면서도 사용하기에 간편하다. 경계조건과 요소의 강성과 질량이 복잡한 경우에도 쉽게 적용할 수 있다. 처짐의 영향계수를 얻기 위해 어떠한 방법도 이용될 수 있다. 결국 해의 정밀도는 오직 처짐의 영향계수의 정확도에 비례한다. 처짐에 대한 영향계수를 얻는 것은 구조물의 설계와 해석에 있어 첫 번째 단계이다. 주어진 방법의 이점은 구조물의 고유진동수를 얻기위해 변위, 처짐값, 모멘트, 전단력등을 구하는데 이미 사용한 값들을 사용할 수 있다는 것이다. 판에 집중 하중 또는 하중균을 갖을 때, 판의 처짐에 대한 영향면에 하중균들의 영향을 더하여 비교적 쉽게 수치해석을 수행할 수 있다.

- Whitney, J. M. and Leissa, A. W., "Analysis of a Simply-Supported Laminated Anisotropic Rectangular Plate", *AIAA Journal*, 7:28-33, 1970
- Ashton, J. E. and Whitney, J. M., Theory of Laminated Plates, *Technomic Publishing Co.*, Westport, VA., 1970
- Kim, D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Elements", *Proc. International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites*, Seoul, Korea, 1974
- Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff



- Publishers, Dordrecht, 1987
5. Kim, D. H., Hwang, J. W., and Chun, D. S., "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements", *Proc. 1st Japan Int' SAMPE Symposium*, 1989
  6. Kim, D. H., Hwang, J. W., and Chun, D. S., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Members-For Higher Modes", *Proc. 8th Structural Congress, American Society of Civil Engineers*, Baltimore, MD, U.S.A. 1990
  7. Kim, D. H., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates", *Proc. ICCM 8*, Honolulu, Hawaii. 1991
  8. Kim, D. H., "Vibration Analysis of Laminated Thick Composite Plates", *Proc. EASEC-III*, China. 1991
  9. Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, London, 1995, pp.189~191
  10. Kim, D. H., "The Effect of Neglecting Own Weight on the Natural Frequency of Vibration of Laminated Composite Plates with Attached Mass/Masses", *Proc. EASEC-V*, Australia, 1995
  11. Clough, R. W. & Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1995, pp.129~142

(접수일자 : 1999. 4. 12)