두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Circular Curved Beams Resting on Two-Parameter Elastic Foundation

이 병 구* 박 광 규** 오 상 진***
Lee, Byoung-Koo Park, Kwang-Kyou Oh, Sang-Jin

요 지

이 논문은 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 회전관성 및 전단변형을 고려하여 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치적분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석기법으로 해석하였다. 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 곡선보의 최저차모드 3개의 고유진동수를 산출하였다. 곡선보의 수평높이 지간길이비, Winkler지반계수, 전단지반계수에 따른 고유진동수 변화를 분석하였으며, 회전관성 및 전단변형의 영향을 고찰하였다.

핵심용어 : 곡선보, 자유진동, 탄성지반, 회전관성, 전단변형

Abstract

This paper deals with the free vibrations of circular curved beams on an elastic foundation. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, the differential equations governing free vibrations of circular curved beams resting on two-parameter elastic foundation are derived and solved numerically. The lowest three natural frequencies for such beams with hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end restraints are calculated. Numerical results are presented to show the effects on the natural frequencies of the non-dimensional system parameters: the horizontal rise to span length ratio, the Winkler foundation parameter, and the shear foundation parameter. The effects of rotatory inertia and shear deformation are also analyzed.

Keywords : *curved beam, free vibration, two-parameter elastic foundation, rotatory inertia, shear deformation*

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과, 교수
** 정회원 · 대전대학교 토목공학과, 교수
*** 담양대학 토목과, 전임강사

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

지반위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련한 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련한 많은 문제들은 탄성지반위에 놓인 보로서 모형화할 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프라인 및 띠기초(strip footing) 등을 들 수 있다.

최근에도 탄성지반위에 놓인 보에 관한 연구가 이루어지고 있지만, 이들 연구에서 다루어지고 있는 대상구조는 대부분 직선보[1)~5)]이다. 그러나 철도궤도 및 파이프라인 등에는 곡선부가 존재하며, 원형띠기초는 유체저장조 등 주요구조물의 기초로서 이용[6)]되고 있어 탄성지반위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 대한 활발한 연구가 수행되어 많은 설계자료가 제시되어야 한다.

공학에서 지반위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler[7)]가 제안한 지반모형이다. Winkler모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 지반모형이지만, 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 연구에 이용되고 있다. 그러나 Winkler모형은 독립적인 스프링으로 구성되어 있기 때문에 하중작용점의 처짐이 근접한 지역의 처짐에 영향을 미치지 못하는 단점을 가지고 있다.

이와 같은 Winkler모형의 문제점을 해결하기 위한 시도 즉 지반연속성을 고려하기 위하여 Pasternak는 Winkler모형의 스프링에 전단층(shear layer)을 연결하여 연속성을 고려한 두 개의 매개변수로 표현되는 지반모형(two-parameter elastic foundation)을 제시하였다.[8)]

탄성지반위에 놓인 곡선부재에 대한 연구로서 Panayotounakos와 Theocaris[9)]는 자유-자유의 단부조건을 갖는 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선부재의 자유진동에 대한 엄밀해를 산출하였으며, Wang과 Brannen[10)]은 회전관성과 전단변형을 고려하지 않은 Bernoulli-Euler보이론을 적용하여 고정-고정의 단부조건을 갖는 원호형 곡선보의 고유진동수방정식을 유도하였다. Issa[11)]는 원호형 곡선부재의 동적강성행렬을 유도하여 Winkler형 지반위에 놓인 2경간 원호형 곡선보의 고유진동수를 산출하였다. 최근 이 등[12)]은 회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko보이론을 적용하여 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 고유진동수를 구하였다. 그러나 이상의 연구들에서 채택하고 있는 지반모형은 Winkler모형이다.

이상과 같은 연구배경으로 본 연구에서는 두 개의 매개변수로 표현되는 지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식을 수치해석하여 대상보의 고유진동수를 산출하고자 한다. 미분방정식의 유도시 회전관성 및 전단변형의 영향을 고려하였으며, 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 고려하였다.

2. 수학적 모형

그림 1은 탄성지반위에 놓인 지간길이 l인 원호형 곡선보의 기하학적 형상과 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 a, h 및 α는 각각 곡률반경, 수평높이 및 중심각이며, θ는 좌단, 곡률중심 O 및 곡선보축상 임의점이 이루는 각도이다. 그리고 v, Ψ, β 및 ϕ는 각각 곡선보축상 임의점에서의 수직방향변위, 순수휨에 의한 단면회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이며, R_V와 R_T는 지반반력 성분으로서 각각 단위길이당 수직반력과 회전반력이다.

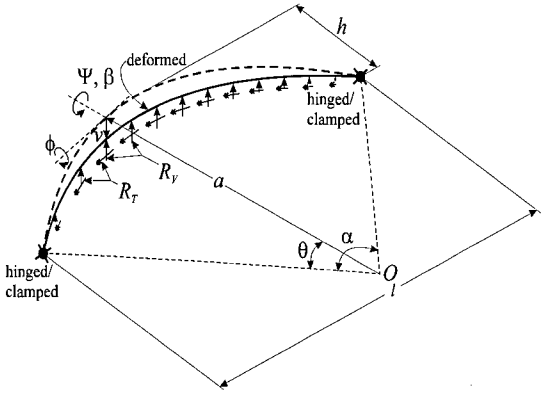


그림 1 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보

그림 2는 진동시 곡선보 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로 M, T 및 Q는 각각 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고, F_v와 C_Ψ는 각각 단위길이당 수직방향 관성력과 회전관성우력이다. 곡선보 미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력 및 반력 R_V, R_T 사이의 동적평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

$$a^{-1}Q' - F_v - R_V = 0 \tag{1}$$

$$a^{-1}M' - Q + a^{-1}T + C_\Psi = 0 \tag{2}$$

$$a^{-1}M - a^{-1}T' + R_T = 0 \tag{3}$$

여기서 $(') = d/d\theta$ 이다.

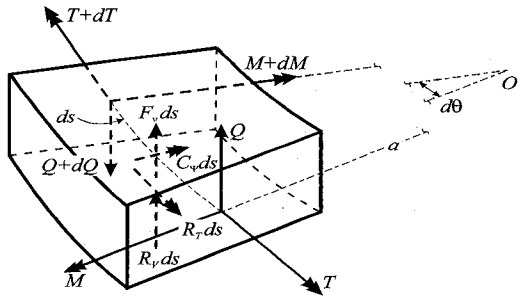


그림 2 곡선보 미소요소에 작용하는 힘

휨모멘트와 비틀림모멘트를 Ψ와 ϕ의 항으로 나타내면 식 (4), (5)와 같다.[6]

$$M = EIa^{-1}(\phi - \Psi') \tag{4}$$

$$T = GJa^{-1}(\Psi + \phi') \tag{5}$$

여기서 I와 J는 각각 곡선보 단면의 단면2차모멘트 및 비틀림상수, E와 G는 각각 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이다.

전단변형을 고려하는 경우 단면회전각은 식 (6)과 같이 Ψ와 β의 합으로 표현된다.

$$\frac{dv}{ds} = a^{-1}v' = \Psi + \beta \tag{6}$$

따라서 전단력 Q는 식 (7)과 같다.

$$Q = a_s AG\beta = a_s AG(a^{-1}v' - \Psi) \tag{7}$$

여기서 a_s는 단면형상에 따른 상수이다.

곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면 F_v와 C_Ψ는 각각 식 (8), (9)와 같다.

$$F_v = -\gamma A\omega^2 v, \quad C_\Psi = -\gamma I\omega^2 \Psi \tag{8,9}$$

여기서 γ는 부재재료의 밀도, A는 단면적, ω는 고유각진동수(rad/sec)이다.

그림 3(a)는 두 개의 매개변수로 그 특성이 표현되는 탄성지반위에 놓인 곡선보의 단면형상과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로 B와 D는 각각 지반과 접하는 단면폭 및 단면의 높이, r은 단면도심 o'을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이며, $z(r,\theta)$는 곡선보축상 θ 위치에서 비틀림각으로 인하여 곡률중심방향으로 변화하는 수직변위를 의미한다. 그리고 k와 G_p는 각각 Winkler지반계수와 전단지반계수이다.

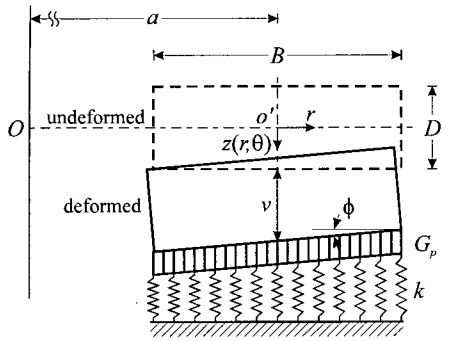
그림 3(a)에 보인 바와 같이 두 개의 매개변수로 지반특성이 표현되는 Pasternak지반모형을 택하는 경우 곡선보와 지반이 접하는 면에서의 압력과 처짐의 관계는 식 (10)과 같다.[8]

$$p(r,\theta) = kz(r,\theta) - \frac{G_p}{a^2}\frac{d^2z(r,\theta)}{d\theta^2} \tag{10}$$

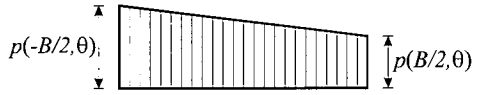
비틀림각 ϕ는 미소각이므로 $z(r,\theta)$는 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r,\theta) = v - r\phi \tag{11}$$

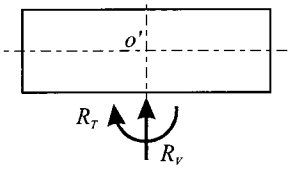
식 (11)을 식 (10)에 대입하면 곡선보축상 임의점 θ 위치 단면에서 곡률중심방향의 압력변화는 식 (12)와 같이 표현된다.



(a) displacement and twist of the beam cross-section



(b) pressure diagram of the contact area



(c) vertical and torsional reactions acting on the center line of the beam

그림 3 지반과 곡선보가 접하는 면에 작용하는 힘

$$p(r,\theta)=k(v-r\phi)-\frac{G_p}{a^2}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}-r\frac{d^2\phi}{d\theta^2}\right) \quad (12)$$

식 (12)로부터 단면 양쪽끝에서의 압력을 구하면 식 (13)과 같다.

$$p\left(-\frac{B}{2},\theta\right)=k\left(v+\frac{B\phi}{2}\right)-\frac{G_p}{a^2}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{B}{2}\frac{d^2\phi}{d\theta^2}\right) \quad (13a)$$

$$p\left(\frac{B}{2},\theta\right)=k\left(v-\frac{B\phi}{2}\right)-\frac{G_p}{a^2}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}-\frac{B}{2}\frac{d^2\phi}{d\theta^2}\right) \quad (13b)$$

그림 3(b)는 이상의 결과를 이용하여 곡선보 단면에 작용하는 압력분포를 나타낸 것으로 이는 그림 3(c)에 보여진 바와 같이 곡선보 중심축에 대한 단위길이당 수직반력 R_V와 회전반력 R_T로 나타낼 수 있으며, R_V와 R_T는 각각 식 (14) 및 (15)와 같다.

$$R_V=kBv-\frac{BG_p}{a^2}\frac{d^2v}{d\theta^2} \quad (14)$$

$$R_T=\frac{B^3}{12a^2}\left(k\phi a^2-G_p\frac{d^2\phi}{d\theta^2}\right) \quad (15)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta=v/l,\ \rho=a/l,\ f=h/l \quad (16\text{-}18)$$

$$s=l/\sqrt{I/A},\ \varepsilon=GJ/(EI),\ \mu=\alpha_sG/E \quad (19\text{-}21)$$

$$\lambda=kl^5/(\pi^4EI),\ g_p=G_pl^3/(\pi^2EI),\ b=B/l \quad (22\text{-}24)$$

$$C_i=\omega_i l^2\sqrt{\gamma A/(EI)},\ i=1,2,3,\cdots \quad (25)$$

여기서 f와 s는 각각 수평높이 지간길이비 및 세장비, ε과 μ는 각각 강성계수와 전단계수, λ, g_p 및 b는 각각 무차원화한 Winkler지반계수, 전단지반계수 및 접촉면의 폭비이며, C_i는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

그림 1에서 곡선보의 지간길이 l은 식 (26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$l=2(a-h)\tan(\alpha/2)=2\sqrt{a^2-(a-h)^2} \quad (26)$$

식 (17), (18), (26)을 이용하면, 무차원 곡률반경 ρ 및 중심각 α는 각각 식 (27) 및 (28)과 같이 표현된다.

$$\rho=\frac{4f^2+1}{8f} \quad (27)$$

$$\alpha=2\tan^{-1}\left(\frac{4f}{1-4f^2}\right) \quad (28)$$

식 (7), (8) 및 (14)를 식 (1)에 대입하여 무차원 변수들을 이용하여 정리하고 식 (27)의 무차원 곡률반경을 대입하면 다음 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta'' = \frac{(4f^2+1)^2}{64f^2(\mu s^2+\pi^2 g_p b)}(\pi^4\lambda b - C_i^2)\eta + \frac{\mu s^2(4f^2+1)}{8f(\mu s^2+\pi^2 g_p b)}\Psi' \tag{29}$$

식 (4), (5), (7) 및 (9)를 식 (2)에 대입하고 무차원 변수들과 무차원 곡률반경을 이용하면 식 (30)을 얻을 수 있다.

$$\Psi'' = \left[\frac{(4f^2+1)^2}{64f^2}(\mu s^2 - s^{-2}C_i^2) + \varepsilon\right]\Psi + (1+\varepsilon)\phi' - \frac{4f^2+1}{8f}\mu s^2\eta' \tag{30}$$

식 (4), (5) 및 (15)를 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\phi'' = \frac{1}{12\varepsilon+\pi^2 g_p b^3}\left[12 + \frac{\pi^4\lambda b^3(4f^2+1)^2}{64f^2}\right]\phi - \frac{12(1+\varepsilon)}{12\varepsilon+\pi^2 g_p b^3}\Psi' \tag{31}$$

이상에서 식 (29)~(31)은 회전관성과 전단변형을 고려한 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이며, $g_p=0$인 경우 이 식들은 문헌 [12]의 Winkler형 지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식으로 변환된다.

회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0"이며, 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 곡선보 양단 ($\theta=0$ 또는 $\theta=\alpha$)에서 회전단 및 고정단의 경계조건식은 각각 식 (32)~(34) 및 식 (35)~(37)과 같다.

$$\eta=0,\ \phi=0,\ \Psi'=0 \tag{32-34}$$

$$\eta=0,\ \phi=0,\ \Psi=0 \tag{35-37}$$

3. 해석방법 및 결과 고찰

본 연구에서는 식 (29)~(31)의 지배미분방정식을 해석하기 위하여 문헌 [13-15] 등에서 그 적용성이 확인된 바 있는 수치적분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석기법을 이용하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법[16]을 이용하였으며, 해석대상구조의 무차원 고유진동수 C_i는 시행착오적 행렬값탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법[16]을 이용하여 구하였다. 이러한 해석과정으로 대상보의 단부조건 및 제변수 f, s, ε, μ, λ, g_p 및 b가 입력되면 고유진동수가 계산되도록 FORTRAN77어로 프로그램하였다. 이 논문에서는 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하여 표 1 및 그림 4~12에 그 결과를 제시하고 고찰하였다.

곡선보의 수평높이 지간길이비 f가 "0"으로 수렴하는 경우 해석결과는 대응되는 단부조건과 제원을 갖는 직선보의 고유진동수로 수렴해야만 한다. 표 1은 이러한 직선보로의 수렴과정을 나타낸 것으로 $f\rightarrow 0$인 경우 본 연구결과는 문헌 [3] 및 문헌 [17]의 직선보에 대한 무차원 고유진동수로 정확히 수렴함을 알 수 있다.

그림 4~6은 곡선보의 수평높이 지간길이비 f의 변화에 따른 무차원 고유진동수비 C_i/C_{si}를 나타낸

표 1 직선보로의 수렴

제 원 ($\mu=0.25$)	f	무차원 고유진동수, C_i		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
회전-회전	0.100	17.76	44.03	79.08
$s=25$	0.050	18.60	45.89	81.86
$\varepsilon=0.2865$	0.010	18.92	46.53	82.79
$\lambda=25.7$	0.005	18.93	46.55	82.82
$g_p=253.3$	0.001	18.93	46.55	82.83
$b=0.01$	0.000*	18.93	46.56	82.83
회전-고정	0.100	26.44	59.93	106.1
$s=50$	0.050	27.25	62.00	109.8
$\varepsilon=1.146$	0.010	27.53	62.70	111.0
$\lambda=33.33$	0.005	27.54	62.73	111.0
$g_p=133.3$	0.001	27.54	62.73	111.0
$b=0.03$	0.000§	27.54	62.73	111.0
고정-고정	0.100	19.95	45.63	77.98
$s=25$	0.050	20.89	47.47	80.62
$\varepsilon=0.2865$	0.010	21.23	48.08	81.50
$\lambda=10$	0.005	21.24	48.10	81.53
$g_p=5$	0.001	21.25	48.11	81.54
$b=0.05$	0.000§	21.25	48.11	81.54

*는 문헌 [17], §는 문헌 [3]의 직선보에 대한 결과

표 2 직선보의 무차원 고유진동수 C_{si}
(s=20, b=0.03, ε=1.146, μ=0.347)

지반특성	단부조건	무차원 고유진동수, C_{si}		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\lambda=0$ $g_p=0$	회전-회전	9.435	33.82	66.53
	회전-고정	13.95	39.60	71.77
	고정-고정	19.05	45.08	76.65
$\lambda=3$ $g_p=0$	회전-회전	9.879	33.94	66.59
	회전-고정	14.25	39.70	71.82
	고정-고정	19.28	45.17	76.72
$\lambda=3$ $g_p=2$	회전-회전	10.16	34.26	66.96
	회전-고정	14.47	39.99	72.16
	고정-고정	19.45	45.45	77.02

것이다. 여기서 C_i는 대응되는 제원을 갖는 곡선보의 무차원 고유진동수이며, C_{si}는 대응되는 제원을 갖는 직선보의 무차원 고유진동수로서 표 2에 수록한 바와 같다.

그림 4~6에서 횡축의 f에 대응되는 곡선보의 고유진동수는 고유진동수비 C_i/C_{si}에 위에 수록한 직선보의 고유진동수 C_{si}를 곱하므로서 얻을 수 있으며, "1"에서 C_i/C_{si}를 뺀 값은 f의 영향으로 인한 고유진동수의 변화를 의미한다.

그림 4~6에서 f가 "0"보다 큰 경우 C_i/C_{si}는 항상 "1"보다 작고, f가 증가함에 따라 C_i/C_{si}는 감소하여 곡선보의 무차원 고유진동수는 동일한 제원을 갖는 직선보의 무차원 고유진동수보다 작음을 알 수 있다. 그리고 저차모드일수록 고유진동수비 C_i/C_{si}가 작아 수평높이 지간길이비 f는 저차모드에 더 큰 영향을 미침을 알 수 있다.

이 그림들에서 ($\lambda=0$, $g_p=0$), ($\lambda=3$, $g_p=0$), ($\lambda=3$, $g_p=2$)의 순으로 C_i/C_{si}가 작아 탄성지반의 영향을 무시하는 경우, Winkler형 지반, 두 개의 매개변수로 표현되는 지반 순으로 f의 영향으로 인한 고유진동수 감소가 큼을 알 수 있다. 한편 지반모형에 따른 고유진동수비의 차이는 저차모드일수록, 그리고 단부강성이 작을수록(회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 순서) 큼을 알 수 있다.

그림 7~9는 전단지반계수 g_p의 변화에 따른 무차원 고유진동수비 C_i/C_{wi}를 나타낸 것이다. 여기서 C_{wi}는 $g_p=0$ 즉 Winkler형 지반위에 놓인 곡선보의 무차원 고유진동수로서 표 3에 수록하였다.

그림 7~9에서 가로축의 g_p에 대응되는 곡선보의 고유진동수는 C_i/C_{wi}에 위에 수록한 C_{wi}를 곱하므로서 얻을 수 있으며, C_i/C_{wi}에서 "1"을 뺀 값은 g_p의 영향으로 인한 고유진동수의 변화를 의미한다.

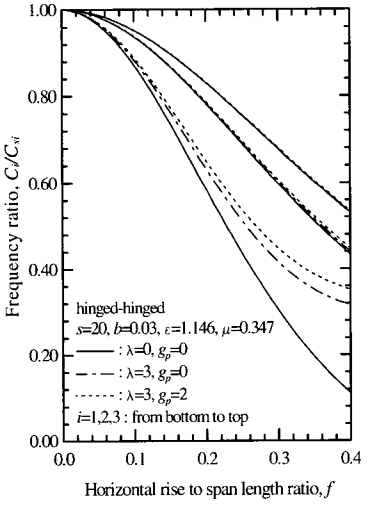


그림 4 f에 따른 C_i/C_{si}의 변화 (회전-회전)

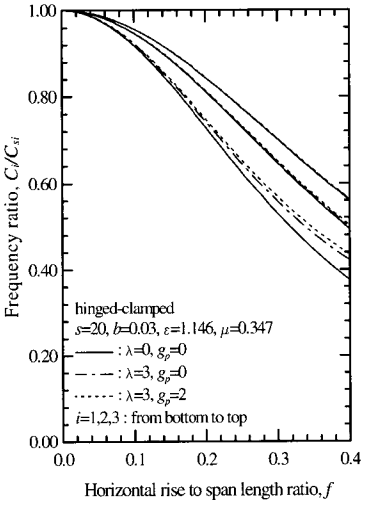


그림 5 f에 따른 C_i/C_{si}의 변화 (회전-고정)

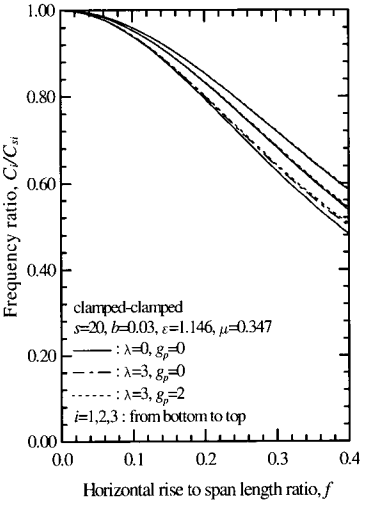


그림 6 f에 따른 C_i/C_{si}의 변화 (고정-고정)

표 3 Winkler형 지반위에 놓인 곡선보의 무차원 고유진동수 C_{wi} ($s=20$, $b=0.03$, $\varepsilon=1.146$, $\mu=0.347$)

f 및 λ	단부조건	무차원 고유진동수, C_{wi}		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$f=0.3$ $\lambda=1$	회전-회전	3.340	20.30	45.15
	회전-고정	7.590	25.68	50.34
	고정-고정	12.10	30.82	55.17
$f=0.1$ $\lambda=1$	회전-회전	8.399	31.76	63.41
	회전-고정	12.92	37.53	68.67
	고정-고정	17.98	43.01	73.57
$f=0.3$ $\lambda=5$	회전-회전	4.760	20.57	45.27
	회전-고정	8.313	25.90	50.45
	고정-고정	12.57	31.00	55.27
$f=0.1$ $\lambda=5$	회전-회전	9.055	31.93	63.49
	회전-고정	13.35	37.68	68.75
	고정-고정	18.30	43.14	73.64

표 4 $s=1000$인 곡선보의 무차원 고유진동수 C_{bi} ($\lambda=3$, $b=0.03$, $\varepsilon=1.146$, $\mu=0.347$)

f 및 g_p	단부조건	무차원 고유진동수, C_{bi}		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$f=0.1$ $g_p=2$	회전-회전	9.344	37.04	83.80
	회전-고정	14.56	47.05	98.47
	고정-고정	21.16	58.20	114.3
$f=0.3$ $g_p=2$	회전-회전	4.599	22.63	55.23
	회전-고정	8.597	30.15	65.90
	고정-고정	13.65	38.36	77.33
$f=0.1$ $g_p=0$	회전-회전	9.042	36.74	83.50
	회전-고정	14.33	46.79	98.20
	고정-고정	21.00	57.97	114.1
$f=0.3$ $g_p=0$	회전-회전	4.154	22.28	54.91
	회전-고정	8.321	29.87	65.62
	고정-고정	13.47	38.12	77.08

그림 7~9에서 g_p가 "0"보다 큰 경우 C_i/C_{wi}는 항상 "1"보다 크며 g_p가 증가함에 따라 증가하여 두 개의 매개변수로 표현되는 지반위에 놓인 곡선보는 Winkler형 지반위에 놓인 곡선보의 무차원 고유진동수보다 항상 큼을 알 수 있다. 그리고 저차모드일수록 C_i/C_{wi}가 커서 g_p는 저차모드에 더 큰 영향을 미침을 알 수 있다.

한편 이 그림들에서 λ가 동일한 경우 f가 클수록 g_p의 영향이 크며, f가 동일한 경우 λ가 작을수록 g_p의 영향이 큼을 알 수 있다. 또한 단부강성이 작을수록 g_p의 영향이 큼을 알 수 있다.

그림 10~12는 회전관성 및 전단변형의 영향을 분석하기 위하여 세장비와 C_i/C_{bi}의 관계를 나타낸 것이다. 여기서 C_i는 회전관성과 전단변형을 고려하여 산출한 무차원 고유진동수이며, C_{bi}는 세장비 $s=1000$($1/s=0.001$)에 대하여 얻어진 무차원 고

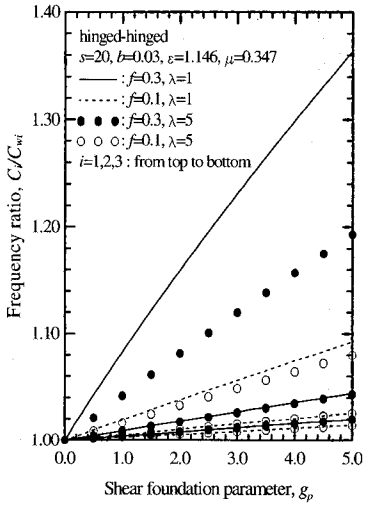


그림 7 g_p에 따른 C_i/C_{wi}의 변화 (회전-회전)

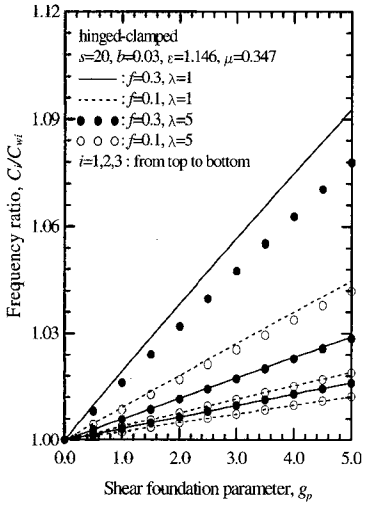


그림 8 g_p에 따른 C_i/C_{wi}의 변화 (회전-고정)

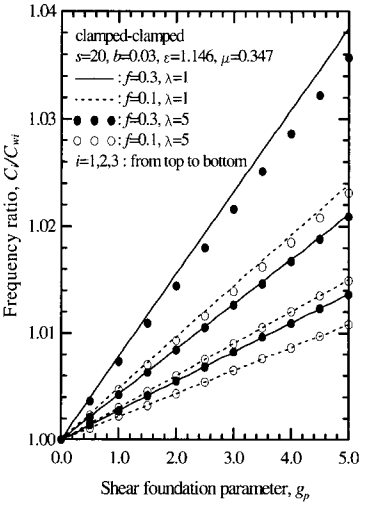


그림 9 g_p에 따른 C_i/C_{wi}의 변화 (고정-고정)

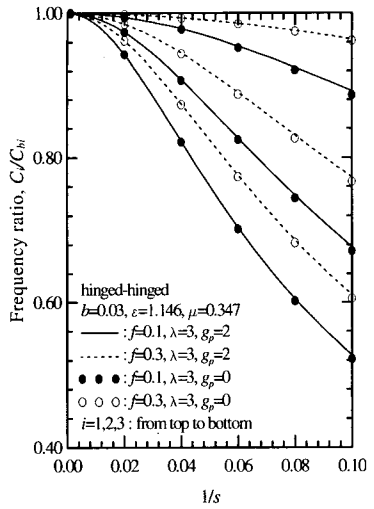


그림 10 회전관성 및 전단변형의 변화 (회전-회전)

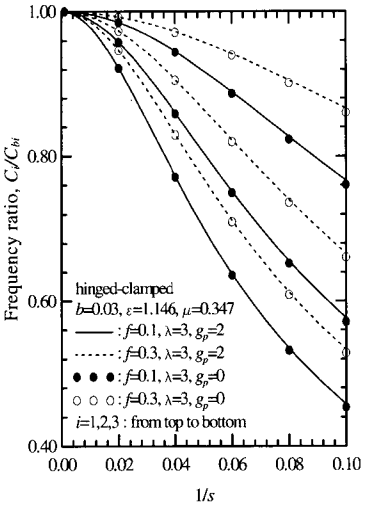


그림 11 회전관성 및 전단변형의 영향 (회전-고정)

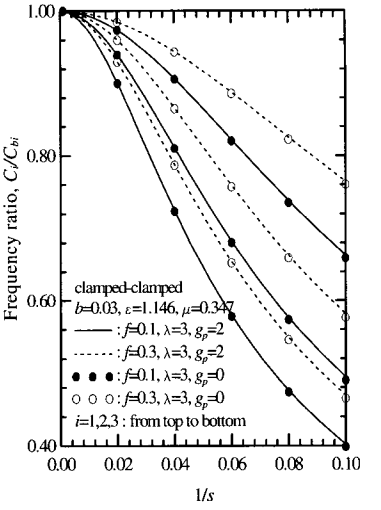


그림 12 회전관성 및 전단변형의 영향 (고정-고정)

유진동수로서 표 4에 수록한 바와 같다.

그림 10~12에서 C_i/C_{bi}는 항상 "1"보다 작아 회전관성 및 전단변형은 고유진동수를 감소시키는 요인임을 알 수 있으며, 세장비가 작을수록($1/s$이 클수록) 그리고 고차모드일수록 영향이 큼을 알 수 있다. 한편 다른 조건이 동일한 경우 $f=0.1$에 대한 결과는 $f=0.3$인 경우에 비해 고유진동수비가 작아 수평높이 지간길이비가 작을수록 회전관성 및 전단변형의 영향이 큼을 알 수 있다. 따라서 회전관성 및 전단변형이 곡선보의 고유진동수에 미치는 영향은 직선보에 비해 작음을 알 수 있다.

또한 이 그림들에서 두 개의 매개변수로 표현되는 지반인 경우가 Winkler형 지반인 경우($g_p=0$일 때)에 비해 회전관성 및 전단변형의 영향이 작음을 알 수 있다. 한편 다른 조건이 동일한 경우 단부강성이 클수록 회전관성 및 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있다.

4. 요약 및 결론

이 논문에서는 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 지배 미분방정식의 유도시 회전관성과 전단변형의 영향을 고려하였으며, 수치적분기법 및 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석기법을 이용하여 지배방정식을 해석하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정 보의 제변수 변화에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하였으며 그 결과로부터 다음 내용을 고찰할 수 있었다.

1) 탄성지반의 영향을 무시하는 경우, Winkler형 지반, 두 개의 매개변수로 표현되는 지반 순으로 수평높이 지간길이비의 증가로 인한 고유진동수 감소가 크다.

2) 두 개의 매개변수로 표현되는 지반위에 놓인 곡선보는 Winkler형 지반위에 놓인 곡선보의 무차원 고유진동수보다 항상 크다.

3) 전단지반계수의 영향은 저차모드일수록 크다.

4) 전단지반계수의 영향은 Winkler지반계수가 동일한 경우 수평높이 지간길이비가 클수록, 그리고 수평높이 지간길이비가 동일한 경우에는 Winkler지반계수가 작을수록 크다.

5) 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 곡선보는 Winkler형 지반위에 놓인 곡선보에 비해 회전관성 및 전단변형의 영향이 작다.

감사의 글

이 논문은 1998년 한국학술진흥재단의 학술연구비 지원에 의하여 이루어진 연구결과의 일부로서 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. C. Franciosi and A. Masi, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil," *Computers & Structures*, Vol. 47, 1993, pp.419~426
2. S.Y. Lee and C.C. Yang, "Non-Conservative Instability of Non-Uniform Beams resting on an Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, 1994, pp.433~444
3. 이병구, "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석," 한국강구조학회 논문집, 제6권 제3호, 1994, pp.107~115
4. T. Yokoyama, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Computers & Structures*, Vol. 61, 1996, pp.995~1007
5. M.A. De Rosa and M.J. Maurizi, "The Influence of Concentrated Masses and Pasternak Soil on the Free Vibrations of Euler Beams-Exact Solution," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, 1998, pp.573~581
6. E. Volterra and J.H. Gains, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, 1971
7. E. Winkler, Die *Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominicus, 1867
8. A.P.S. Selvadurai, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier, 1979
9. D.E. Panayotounakos and P.S. Theocaris, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 47, 1980, pp.139~144
10. T.M. Wang and W.F. Brannen, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, 1982, pp.241~246
11. M.S. Issa, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, 1988, pp.291~301
12. 이병구, 오상진, 이재만, "탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동," 한국전산구조공학회 논문집, 제11권 제2호, 1998, pp.273~280
13. B.K. Lee and J.F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, 1989, pp.75~89
14. J.F. Wilson, B.K. Lee and S.J. Oh, "Free Vibrations of Circular Arches with Variable Cross-Section," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 2, 1994, pp.345~357
15. S.J. Oh, B.K. Lee and I.W. Lee, "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, 1999, pp.23~33
16. J.H. Mathews, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, 1987
17. T.M. Wang and J.E. Stephens, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, 1977, pp.149~155

(접수일자 : 1999. 8. 12)