

응력집중문제의 해석을 위한 다중스케일 무요소법에 관한 연구

A Multi-Scale Meshless Method for Stress Concentration Problems

이 상 호*
Lee, Sang-Ho

김 호 진***
Kim, Hyo-Jin

전 석 기**
Jun, Sukky

요 지

본 논문에서는 요소를 사용하지 않는 수치해석기법인 무요소법 중에서 다중해상도(multi-resolution) 특성이 내재되어 있는 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)의 이중스케일 분해기법을 사용하여 RKPM의 형상함수를 상단성분과 하단성분으로 분리하고 이를 3차원 선형탄성해석과정에 적용하여 von Mises 응력장의 상·하단성분을 유도하였다. 유도된 응력장의 상단성분을 이용하여 후처리과정을 거치지 않고도 응력의 고변화도 부위를 손쉽게 파악할 수 있는 기법을 개발하였으며 이를 이용한 효율적인 적응적 세분화기법의 적용가능성을 연구하였다. 대표적인 2차원 및 3차원 응력집중 문제에 적용하여 응력집중부위를 파악하고 간단한 적응적 세분화과정에 따른 질점추가를 통하여 해의 정도 향상을 파악해 본 결과, 본 연구에서 개발된 기법이 응력집중부위를 정확히 판정할 수 있었으며 효율적인 적응적 세분화기법의 유용한 도구로서 활용될 수 있음을 검증하였다.

핵심용어 : 무요소법, RKPM, 이중스케일, 적응적 세분화, 응력집중

Abstract

In this study, a meshfree method called Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) with an inherent characteristic of multi-resolution is modified to develop structural analysis algorithm using two scales. The shape function of RKPM is decomposed into two scales, high and low. The two scale decomposition is incorporated into linear elastic formulation to obtain high scale and low scale components of von Mises stresses. The advantage of using this algorithm is that the high scale component of von Mises stress indicates the high stress gradient region without posteriori estimation. This algorithm is applied to the analyses of 2- and 3-dimensional stress concentration problems. It is important to note that the two scale analysis method has been applied to 3-dimensional stress concentration problem for the very first time. Also, the possibility of applying this algorithm to adaptive refinement technique is studied. The proposed method is verified by analyzing typical 2- and 3- dimensional linear elastic stress concentration problems. The results show that the algorithm can effectively locate the high stress concentration regions and can be utilized as an efficient tool for the adaptive refinement technique.

Keywords : meshless or meshfree method, RKPM, two scale decomposition, adaptive refinement, stress concentration

* 정회원 · 연세대학교 토목공학과, 조교수

** 정회원 · 연세대학교 토목공학과, 박사과정

*** 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 연구원, Ph. D.

• 이 논문에 대한 토론을 2000년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

무요소법은 요소를 사용하지 않고 절점들간의 상관관계만을 이용하여 해석을 수행하는 방법으로 최근 몇 년 동안 크게 발전되어 온 전산구조해석의 새로운 분야이다. 대표적인 무요소법으로는 Belytschko 등의 Element Free Galerkin (EFG)법¹⁾, Melenk 와 Babus ka에 의한 Partition of Unity Method (PUM)²⁾, Duarte와 Oden의 hp-Cloud법³⁾, Onate 등의 Finite Point Method (FPM)⁴⁾, Zhu 등의 Local Boundary Integral Equation (LBIE)법⁵⁾ 그리고 Liu 등의 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)⁶⁾ 등이 있다. 이러한 무요소법들은 정식화 과정에서 요소를 필요로 하지 않기 때문에 유한요소법과 같이 요소개념을 사용하는 해석방법으로는 해결하기 힘들었던 특수공학적 문제들을 보다 손쉽게 해석하는데 많은 성과를 거두었으며, 균열전파해석 문제⁷⁾, 대변형 문제⁸⁾ 등으로 그 적용의 범위를 점차 확대해 가고 있다.

본 연구에서 사용하는 무요소법인 RKPM은 핵함수를 이용하여 함수를 근사화한다는 점에서 Lucy⁹⁾와 Monaghan¹⁰⁾이 도입한 Smoothed Particle Hydrodynamics(SPH)법과 유사하다. 그러나 SPH법은 경계에서의 해의 정도가 떨어지고 일관성(consistency)조건이 만족되지 않는 등의 단점이 있어서 정확한 수치해결을 얻는데 한계가 있었으나 RKPM에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해서 기존의 핵함수에 보정함수를 도입함으로써 실제적인 공학문제의 적용에 있어서 보다 안정되고 정확한 해를 보장할 수 있게 되었다. 또한, RKPM은 다중해상(multi-resolution)해석과 무요소법을 결합한 다중스케일 RKPM¹¹⁾이라는 해석 과정을 통해서 형상함수를 여러 단계의 스케일로 분해할 수 있게 되었다. 이러한 연구들에 기초하여, 다중스케일 RKPM의 응용분야에 대한 폭 넓은 연구가 Liu 등에 의해서 수행되었으며¹²⁾, 특히, Liu와 Jun은 다중스케일 RKPM을 대변형 문제에 적용하였다¹³⁾. 또한, 국내에서도 RKPM을 이용하여 shear band 문제를 해결하려는 연구가 수행되었다¹⁴⁾.

앞에서도 언급했듯이 RKPM의 핵함수는 다른 무요소법과는 달리 완화계수(dilation parameter)를 도입함으로써 다중해상도 특성을 가지게 되어 다중

스케일 해석이 가능하고, 이 중 최상단 성분을 이용하여 해의 고변화도 부위를 산정하는 기법으로 활용할 수 있다는 점에서 다른 무요소법들과 구별될 수 있는 특징을 갖는다. 본 연구에서는 2단계 분해방식을 통해 RKPM의 형상함수를 하단성분(low scale)과 상단성분(high scale)으로 나누고, 그 중 상단 성분을 이용하여 응력이 집중하는 부위 혹은 해의 고변화도 부위를 기존의 오차평가방법과는 달리 후처리과정을 거치지 않고 파악하고자 하며, 특히, 3차원 문제에도 이 방법을 적용함으로써 본 연구결과가 향후 새로운 적응적기법으로 활용될 가능성을 검증하고자 한다. 이 때, 응력의 상단성분은 방향성을 고려하지 않기 위해서 von Mises 유효응력을 이용하여 유도하였으며 몇 가지 예제를 통해서 응력집중 부위의 탐지에 따른 효율적인 적응적 세분화기법의 적용 가능성을 검증하였다.

본 논문의 내용은 다음과 같은 순서로 구성되어 있다. 2장에서는 RKPM의 이론을 고찰하고 선형탄성 문제의 해석을 위한 정식화과정을 설명하며, 3장에서는 고변화도 부위를 찾는 데 이용되는 상단성분을 산정하기 위한 2단계 분해 다중스케일 RKPM의 이론을 설명하고 이를 선형탄성 응력집중 문제에 적용하기 위한 구체적인 절차를 기술한다. 4장에서는 2차원 선형탄성 문제, 더 나아가서는 무요소법이 보다 우수한 적용성을 보일 것으로 기대되는 3차원 문제에 적용해 봄으로써 본 연구의 성과를 검증한다. 마지막으로 5장에서는 연구의 결과에 대한 논의와 향후 연구 방향에 대하여 간략히 설명한다.

2. RKPM의 이론과 정식화

2.1 RKPM 이론의 고찰

RKPM 함수의 근사화는 먼저 다음과 같은 유한한 영역 Ω 에서 함수 $u(\mathbf{x})$ 와 핵함수(kernel function)의 대합(convolution)으로 표현될 수 있다.

$$u^R(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\mathbf{y})K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\Omega \quad (1)$$

여기서, $K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 는 핵함수이고, a 는 완화계수이며, \mathbf{x} 는 기준점의 위치벡터, 즉, 3차원에서,

$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3]$ 이며, \mathbf{y} 는 기준점과 상관관계에 있는 점의 위치벡터이다. 이 때 완화계수 a 는 핵함수의 영향영역(domain of influence)을 조절하고 다른 무요소법과는 구별되는 다중해상 특성을 RKPM에 부여하는 역할을 한다.

RKPM의 근사함수는 주어진 $u(\mathbf{x})$ 를 임의의 다항식에 대해서 정확하게 재생(reproducing)해야 한다. 보통 수식화의 간편성을 위해서 선형 재생조건을 만족하도록 하며, 이를 위해 \mathbf{x} 에 대하여 1차 Taylor 급수를 이용하여 다음과 같이 표현한다. 필요에 따라서는 이 보다 고차의 일관성 조건도 같은 절차를 통해서 손쉽게 얻어 낼 수 있다.

$$u(\mathbf{y}) \cong u(\mathbf{x}) - [(x_1 - y_1)u_{,x_1}(\mathbf{x}) + (x_2 - y_2)u_{,x_2}(\mathbf{x}) + (x_3 - y_3)u_{,x_3}(\mathbf{x})] + O(h^2) \quad (2)$$

식 (1)을 식 (2)의 형태로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u^R(\mathbf{x}) &\cong u(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \\ &- u_{,x_1}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (x_1 - y_1) K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \\ &- u_{,x_2}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (x_2 - y_2) K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \\ &- u_{,x_3}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (x_3 - y_3) K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)을 간편한 형태로 정리하기 위해서 다음과 같은 모멘트의 개념을 도입하기로 하자.

$$m_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \quad (4a)$$

$$m_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (x_1 - y_1) K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \quad (4b)$$

$$m_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (x_2 - y_2) K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \quad (4c)$$

$$m_3(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (x_3 - y_3) K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \quad (4d)$$

이제 식 (3)은 식(4)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u^R(\mathbf{x}) &\cong u(\mathbf{x})m_0(\mathbf{x}) - u_{,x_1}(\mathbf{x})m_1(\mathbf{x}) \\ &- u_{,x_2}(\mathbf{x})m_2(\mathbf{x}) - u_{,x_3}(\mathbf{x})m_3(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 통해서 근사함수가 정확하게 재생되기 위해서는 다음과 같은 재생조건이 만족되어야 한다.

$$m_k(\mathbf{x}) = \delta_{k0}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (6)$$

여기서, δ 는 kroneker delta 함수를 의미한다. 이 때 식 (1)의 핵함수는 식 (6)의 재생조건을 만족하기 위해서 기존의 SPH 등에서 사용되던 창함수(window function)에 보정함수(correction function)을 곱하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= C(\mathbf{x} - \mathbf{y})\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{P}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{c}(\mathbf{x})\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \\ (x_3 - y_3) \end{bmatrix}, \quad \text{그리고} \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c_0(\mathbf{x}) \\ c_1(\mathbf{x}) \\ c_2(\mathbf{x}) \\ c_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

이며, $C(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 는 보정함수이고, $\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 는 창함수로서 SPH 등에서 사용되는 핵함수나 다른 무요소법에서 사용되는 가중함수(weight function)와 같은 의미이다.

보정함수를 도입한 핵함수를 식 (4)에 대입하고 식 (6)의 재생조건을 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(0) \quad (8)$$

여기서,

$$\mathbf{P}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (9)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{P}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \quad (10)$$

식 (8)에서 모멘트의 역행렬을 계산하므로써 다음과 같이 보정함수의 계수값들을 구할 수 있다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P}(0) \quad (11)$$

2.2 RKPM 핵함수의 이산화

수치해석을 위해서 식 (1)은 다음과 같이 이산화하여 나타낼 수 있다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} N_I(\mathbf{x})u_I \quad (12)$$

이 때 형상함수 $N_I(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$N_I(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Delta V_I \quad (13)$$

여기서, \mathbf{x}_I 와 ΔV_I 는 각각 I 번째 질점의 위치벡터와 집중체적(lumped volume)을 의미한다. 이 때, ΔV_I 가 1이라면 RKPM의 형상함수는 이동최소제곱법에 의한 형상함수와 같은 형태가 된다¹²⁾.

변형률과 응력성분을 계산하기 위해서는 형상함수의 도함수가 필요하며, RKPM의 1차 도함수는 다음과 같이 보정함수와 창함수를 미분함으로써 구할 수 있다.

$$N_{I,x}(\mathbf{x}) = [C_{,x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) + C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \phi_{a,x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)] \Delta V_I \quad (14)$$

이 때, 창함수의 1차 도함수는 창함수를 직접 미분해서 계산할 수 있으며, 보정함수의 1차 도함수는 식 (8)을 미분해서 얻는다.

$$M_{,x}(\mathbf{x})C(\mathbf{x}) + M(\mathbf{x})C_{,x}(\mathbf{x}) = 0 \quad (15)$$

식 (15)를 보정함수의 미분성분에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$C_{,x}(\mathbf{x}) = -M^{-1}(\mathbf{x})M_{,x}(\mathbf{x})C(\mathbf{x}) \quad (16)$$

2.3 무요소법의 정식화

본 연구에서 고려하는 선형탄성 고체역학문제의 지배방정식은 영역 Ω , 경계 Γ 에서 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (17)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력텐서이며, \mathbf{b} 는 물체력이다. 이 때의 자연경계조건(natural boundary condition)과 필수경계조건(essential boundary condition)은 각각 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (19)$$

여기서, \mathbf{u} 는 변위벡터, \mathbf{n} 은 경계에 수직인 단위벡터이며, \mathbf{g} 와 \mathbf{t} 는 미리 규정된 변위와 표면력이다. 식 (18)과 식 (19)에서 $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_g$, $\{0\} = \Gamma_t \cap \Gamma_g$ 조건을 만족한다.

무요소법의 단점 중의 하나는 필수경계조건을 자동적으로 만족시킬 수 없다는 것인데, 본 연구에서는 Lagrange multiplier λ 를 사용하여 필수경계조건을 만족시킬 수 있도록 하였다. 식 (17)을 가상일의 원리를 적용하여 약형식(weak form)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Omega - \int_{\Gamma_g} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{g}) d\Gamma - \int_{\Gamma_g} \delta \mathbf{u} \cdot \lambda d\Gamma = 0 \quad (20)$$

식 (20)으로부터 최종적으로 유도되는 선형 계방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서, 각각의 하위 행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{K}_U = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega, \quad (22a)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_g} N_I \widehat{\mathbf{N}}_K d\Gamma, \quad (22b)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} N_I \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \mathbf{b} d\Omega, \quad (22c)$$

$$\mathbf{q}_K = \int_{\Gamma_K} \hat{N}_K \mathbf{g} d\Gamma \quad (22d)$$

3. 선형탄성해석을 위한 다중스케일 적응적 해석과정

신호처리와 같은 데이터처리이론 등에서는 데이터의 샘플링과 재생이 매우 중요하며, 이는 수치해석에서 이산화와 내삽(interpolation)의 개념과 유사하다. 따라서, 절점만을 이용하여 수치해석을 수행하는 무요소법은 신호처리이론과 매우 유사한 형태를 갖게 된다. 특히, 완화계수 a 를 사용하는 RKPM에서의 형상함수는 샘플링된 데이터로부터 본래의 응답을 재생하는 저역(low-pass)필터로 볼 수 있으며, 다음과 같이 투영연산자(projection operator)를 이용하여 정의된 식으로부터 이를 보다 명확하게 이해할 수 있다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{np} L_i(\mathbf{x})u_i \quad (23)$$

여기서, \mathbf{P} 는 투영연산자, np 는 샘플링된 데이터 절점수이며, $L_i(\mathbf{x})$ 는 저역필터이다. 보다 정확한 응답값을 얻기 위해서 완화계수를 도입하여 다음과 같이 쓸 수 있으며 이는 RKPM의 근사식과 같은 형태임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}_a\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{np} L_i(\mathbf{a}, \mathbf{x})u_i \\ &= \sum_{i=1}^{np} C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)u_i \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)에서 완화계수 a 는 응답을 재생하는데 있어서 해의 정도에 영향을 미치기 때문에 투영연산자의 해상도(resolution)를 결정하는 역할을 한다. 이러한 투영연산자의 해상도에 의해서 응답의 계층적 투영을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a\mathbf{u}(\mathbf{x}) &\supset \mathbf{P}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{P}_{4a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \supset \dots \\ &\dots \supset \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{2^n a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{0\} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)에 의해서 상위 계층의 투영연산자 $\mathbf{P}_a\mathbf{u}(\mathbf{x})$

는 보다 하위 계층의 투영연산자와 그에 해당하는 complementary 투영연산자에 의해서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ &= \{\mathbf{P}_{4a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}_{4a}\mathbf{u}(\mathbf{x})\} + \mathbf{Q}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ &= \dots \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)의 complementary 투영연산자 \mathbf{Q}_{2a} 는 $\mathbf{P}_a\mathbf{u}$ 값의 변화도(gradient)를 나타내는 역할을 하며 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_{2a}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})d\Omega \quad (27)$$

여기서, $\Psi_{2a}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 는 wavelet 함수이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi_{2a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= C_a(\mathbf{x} - \mathbf{y})\phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &\quad - C_{2a}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\phi_{2a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (28)$$

수치해석을 위해서 식 (26)-(28)을 아래와 같이 이산화 할 수 있다.

$$\mathbf{P}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} N_j^1(\mathbf{x})u_j = \sum_{j=1}^{NP} N_j(\mathbf{x}; 2a)u_j \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{2a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{NP} N_j^h(\mathbf{x})u_j \\ &= \sum_{j=1}^{NP} [N_j(\mathbf{x}; a) - N_j(\mathbf{x}; 2a)]u_j \end{aligned} \quad (30)$$

식 (29)는 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 의 하단성분, 식 (30)은 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 의 상단성분이라고 표현할 수 있으며 이와 같은 계층적 해상도 분해에 의해서 RKPM의 형상함수는 여러 단계로 나누어 질 수 있다.

본 연구에서는 최종적으로 응력값을 상단성분과 하단성분의 두 단계로 나누어 해석을 수행한다. 위에 기술한 내용에서 알 수 있는 바와 같이 하단성분은 신호처리에서 저역필터, 상단성분은 대역필터와 같은 역할을 수행한다. 즉, 하단성분은 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 정확하게 재생하는 역할을 하며, 반면에 상단성분은

해의 변화도를 의미한다. 상단성분의 이러한 특성을 이용하여 해의 고변화도 부위를 찾는 역할을 부여하면 적응적 해석(adaptive analysis)에의 응용이 가능하다.

이상과 같은 절차를 통해 다중스케일 해석을 선형탄성 문제들에 적용하기 위해서 먼저 변위장을 분해한다. 변위장을 2단계 분해하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^h(\mathbf{x}) + u_i^l(\mathbf{x}) \quad (31)$$

여기서, 윗첨자 h 와 l 은 각각 상단성분과 하단성분을 의미한다. $u_i(\mathbf{x})$ 는 위치 \mathbf{x} 에서의 변위장이며, 아래첨자 i 는 좌표축을 의미한다. 변위장의 하단성분 $u_i^l(\mathbf{x})$ 와 상단성분 $u_i^h(\mathbf{x})$ 는 각각 식 (29)와 식 (30)의 형태로 주어진다. 선형성에 의해서 변형율 텐서는 다음과 같이 간단하게 정리된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j^l}{\partial x_i} \right) = \epsilon_{ij}^h + \epsilon_{ij}^l \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)와 같이 정의된 변형율텐서로부터 다음과 같이 응력성분을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^h + \sigma_{ij}^l = D_{ijkl} \epsilon_{kl}^h + D_{ijkl} \epsilon_{kl}^l \quad (33)$$

본 연구에서 수행하는 적응적 세분화 영역의 탐지를 위한 선형탄성 응력집중 문제의 해석에 있어서는 응력텐서의 상단성분, 혹은 그의 invariant값을 사용하여 응력의 변화가 급격하게 발생하는 부분을 후처리과정을 거치지 않고서도 정확히 찾아낼 수 있도록 하였다. 이 때 사용하는 invariant의 값은 von Mises 유효응력의 개념을 사용하여 다음과 같은 상단성분의 응력값을 사용하였다.

$$\begin{aligned} &(\sigma_x^h - \sigma_y^h)^2 + (\sigma_y^h - \sigma_z^h)^2 + (\sigma_z^h - \sigma_x^h)^2 \\ &+ 6[(\sigma_{xy}^h)^2 + (\sigma_{yz}^h)^2 + (\sigma_{zx}^h)^2] = 2(\sigma_{vp}^h)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

4. 수치예제 및 해석 결과

RKPM 형상함수의 2단계 분해를 통해 얻어진 응력의 상단성분을 이용하여 2차원 및 3차원 응력집중 문제에 있어서 효율적으로 해의 고변화도 부위를 찾아낼 수 있는지를 검증하기 위해서 다음과 같은 몇 가지 대표적인 수치예제들을 다루어보았다. 모든 예제에서 수치적분은 사각형 셀(cell)을 이용하여 수행하였으며, 2차원 문제의 경우 2×2 Gauss 적분점을, 3차원 문제의 경우에는 $3 \times 3 \times 3$ 적분점을 사용하였다. 또한, 완화계수값은 초기값으로 0.55를 사용하였으며, 창함수는 cubic spline 형태를 이용하였다.

4.1 2차원 직사각형 판의 응력집중 문제

그림 1은 직사각형 판에 집중하중이 작용하는 2차원 응력집중 문제로서 Timoshenko와 Goodier¹⁵⁾에 의해서 $y=0$ 에서 x 축방향에 따른 이론해가 제시되었다. 무요소법에 의한 해석에 있어 총 451개의 절점을 사용하였으며 $E=300\text{ksi}$, $\nu=0.3$ 을 사용하였다. 그림 2에서는 본 연구에서 제시한 방법에 의해 계산된 응력 σ_{yy} 의 상단성분 분포를 정규화시켜 도시하였으며, 그림 3에서는 이론해가 주어진 $y=0$ 에 x 축방향을 따른 구간에서의 상단성분과 후처리 과정에 의해 계산된 이론해와 RKPM 계산결과 사이의 정규화된 오차분포를 비교하였다. 직사각형 판 전체에 정규화된 상단성분의 분포를 도시한 그림 2와 이론해가 주어진 구간에서 상단성분의 분포와 오차분포가 유사한 양상을 나타내고 있음을 나타내는 그림 3을 바탕으로 2단계 분해과정을 통해 유도된 응력의 상단성분이 후처리과정을 거쳐 얻어지는 기존의 적응적해석을 위한 오차평가 기법들과 마찬가지로 효율적으로 응력이 집중되는 부위나 해의 고변화도 부위를 지적하고 있다는 것을 확인할 수 있다. 또한, 이와 같은 상단성분의 특성을 이용하면 적응적 세분화(adaptive refinement)기법에서 자유도를 증가시켜 주어야 하는 영역을 찾아내는 유용한 도구로서 본 연구결과를 활용하는 것이 가능하다.

그림 4는 초기해석시의 절점배치와 그림 2의 상단성분값을 사용하여 해의 변화도가 큰 부위에 12개의 절점을 추가한 절점배치를 나타내었다. 이 때, 절점의 추가배치를 위해서 각 절점의 상단성분값 중

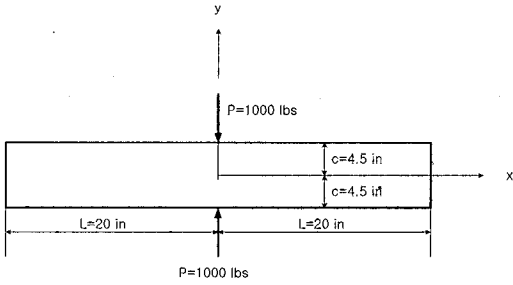


그림 1 집중하중을 받는 직사각형 판

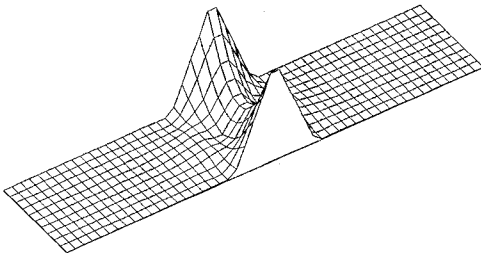


그림 2 정규화된 σ_{yy} 의 상단성분 분포도

표 1 집중하중을 받는 직사각형 판의 (0,0)에서의 σ_{yy} 비교

	이론해 (psi)	수치해 (psi)	오 차 (%)
절점 추가 이전	-204.33	-213.39	4.43
절점 추가 이후	-204.33	-206.20	0.92

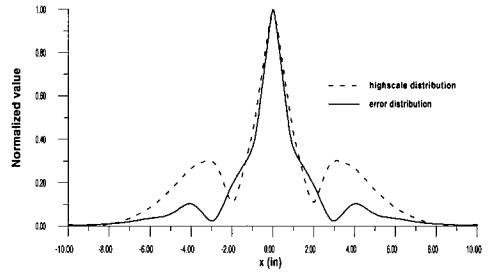


그림 3 이론해와 RKPM 해석결과사이의 정규화된 오차분포와 σ_{yy} 의 정규화된 상단성분 분포의 비교도 ($y=0$ 인 지점에서 x 방향을 따라서)

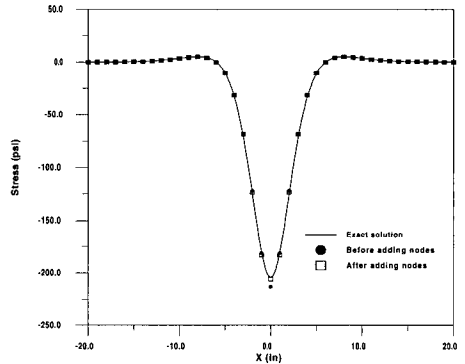
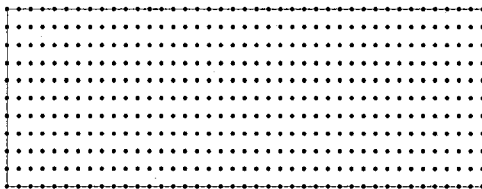
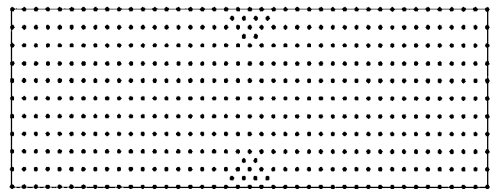


그림 6 집중하중을 받는 직사각형 판의 $y=0$ 에서의 σ_{yy} 비교

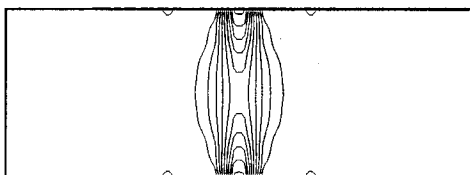


(a) 초기의 절점배치

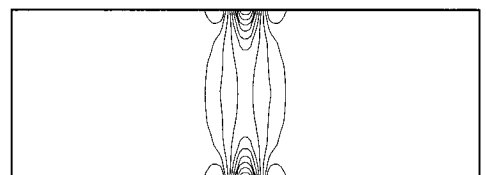


(b) 적응적 세분화 후의 절점배치

그림 4 집중하중을 받는 직사각형 판의 절점배치도



(a) 초기해석의 응력분포



(b) 적응적 세분화 후의 응력분포

그림 5 집중하중을 받는 직사각형 판의 σ_{yy} 분포도

에서 가장 큰 값을 나타내는 절점을 결정하고 이 절점의 상단성분값과 그 외 절점들의 상단성분값을 비교하여 일정한 범위 이내의 상단성분값을 가지는 절점들을 선택하며, 선택된 절점들의 주위에 등간격으로 새로운 절점들을 추가하였다. 이러한 과정을 바탕으로 초기해석시와 응력의 상단성분을 이용한 적응적 세분화 이후의 응력상태의 분포를 그림 5에 나타내었는데, 적응적 세분화 과정에 의해 12개의 절점을 추가한 이후의 응력 σ_{yy} 의 분포가 초기상태보다 훨씬 국소화 되었음을 확인할 수 있다. 또한, 그림 2에 제시된 상단성분의 분포에 의해서 그림 4에서와 같이 응력이 집중되는 부위에 절점을 추가한 경우, 그림 6과 표 1에 제시된 바와 같이 직사각형 판의 중심점에서의 응력값의 정확도가 효과적으로 향상되는 것을 확인할 수 있다.

4.2 2차원 L자형 응력집중 문제

두번째 해석예제는 그림 7에 도시된 바와 같이 L

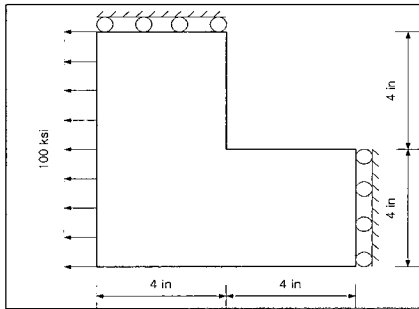


그림 7 L자형의 평판과 경계조건

자 모양의 평판에 분포하중이 작용하는 문제이다. 이 문제에서는 필수경계조건을 만족시키기 위해서 Lagrange Multiplier 법을 적용하여 RKPM 해석을 수행하였다. 또한, 무요소법에 의한 해석에 있어서 1in 간격으로 총 65개의 절점을 사용하였으며 $E = 300\text{ksi}$, $\nu = 0.25$ 을 사용하였다. 그림 8은 식 (34)에 제시된 von Mises 응력의 상단성분의 invariant값을 정규화시켜 gray scale로 나타낸 것이다. 전술했던 바와 같이 상단성분이 응력의 집중부위를 정확히 도시하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 9은 L형 평판의 초기 절점배치 및 4.1 절에서 언급한 방식에 따라 5개의 절점을 추가한 후의 절점배치를 나타낸 것이며, 그림 10은 초기해석시의 응력분포와 절점을 추가한 이후의 von Mises 응력분포도를 도시한 것이다. 앞의 예제 결과와 마찬가지로 소수의 절점추가로도 효과적으로 응력의 분포가 보다 국소화 되고 있음을 알 수 있다.

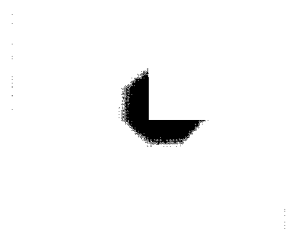
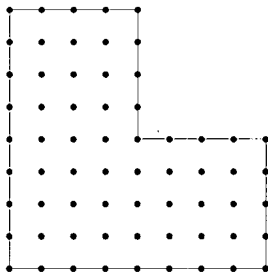
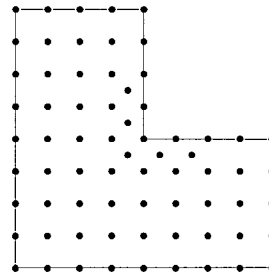


그림 8 정규화된 von Mises 응력의 상단성분 분포도

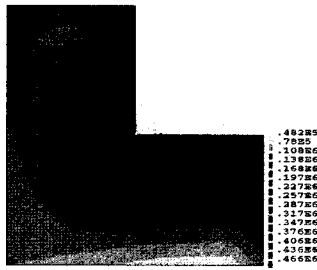


(a) 초기의 절점배치

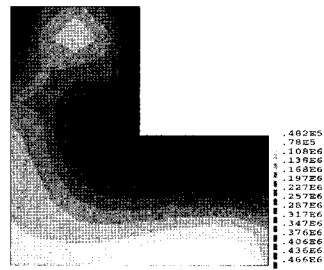


(b) 적응적 세분화 후의 절점배치

그림 9 L자형 평판의 절점배치도



(a) 초기해석의 응력분포



(b) 적응적 세분화 후의 응력분포

그림 10 L자형 평판의 von Mises 응력 분포도

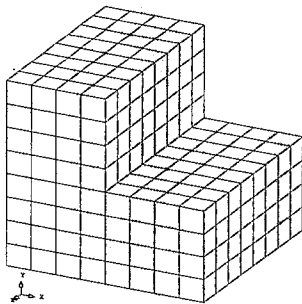


그림 11 3차원 L자 모형

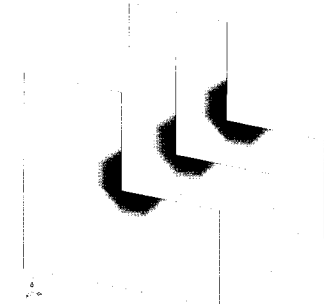


그림 12 정규화된 von Mises 응력의 상단성분 분포도(앞면, 중간면, 뒷면의 순)

4.3 3차원 응력집중 문제

3차원 응력집중 문제의 해석대상체는 그림 11과 같은 L자 모형으로서 하중조건과 경계조건은 4.2 절에 제시된 2차원 모형을 3차원으로 확장한 것과 같다. 여기서는 RKPM해석시 사용하는 절점만으로는 3차원 형상을 표현하는데 한계가 있기 때문에 유한요소법과 같이 요소망(grid)을 사용하여 도시하였다. RKPM 해석에 사용된 총절점수는 585개이며 물성치는 $E = 300\text{ksi}$, $\nu = 0.25$ 을 사용하였다. 그림 12는 정규화된 von Mises 응력의 상단성분 분포를 도시한 것으로 해석대상체 내부의 분포를 살펴보기 위해서 가장 앞부분, 가운데 부분, 그리고 끝 부분에서의 상단성분의 분포를 순차적으로 나타내었다. 그림 12에서 보는 바와 같이 L형으로 꺾어진 부분의 양쪽 끝에서의 상단성분값이 가운데 부분보다 더 큰 것으로 나타났으며 3차원 문제에서의 적용에서도 여전히 상단성분이 응력집중부위를 잘 지적하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 13은 RKPM해석에 의한 3차원

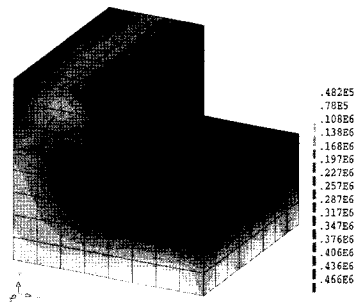


그림 13 3차원 L자 모형의 von Mises 응력 분포도

해석대상체의 von Mises 응력분포를 나타내고 있으며 그림 12의 상단성분 분포가 타당함을 보여준다.

5. 결 론

실제적이고 복잡한 형상의 공학문제에 있어서 응력이 집중하는 부위를 산정한다는 것은 매우 중요한 작업이며, 또한 어려운 일이다. 본 논문에서는 무요

소범중 다중스케일 특성을 갖는 RKPM을 대상으로 2단계 분해작업을 통하여 해의 도출과정을 분해하고, 응력의 상단성분을 이용하여 응력의 변화가 급격하게 발생하는 부위를 후처리과정을 거치지 않고서도 손쉽게 판정할 수 있는 방법을 제안하였으며, 대표적인 2차원 및 3차원 응력집중 문제에 적용하여 그 효율성과 정확성을 검증하였다. 본 연구의 성과는 적응적 해석방법(adaptive method)에서 자유도를 증가시켜 주어야 할 세분화 영역을 손쉽게 파악하는데 유용한 도구로 활용될 수 있을 것으로 사료되며, 특히 응력집중현상등이 발생하는 복잡한 3차원 문제에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp.229~256
2. Melenk, J. M. and Babus ka, I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, 1996, pp.289~314
3. Duarte, C. A. and Oden, J. T., "An h-p Adaptive Method Using Clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, 1996, pp.237~262
4. Onate, E., Idelson, S., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Sacco, C., "A Stabilized Finite Point Method for Analysis of Fluid Mechanics Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, 1996, pp.315~346
5. Zhu, T. L., Zhang, J. and Atruli, S. N., "A Local Boundary Integral Equation Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach", *Computational Mechanics*, Vol. 21, 1998, pp.223~235.
6. Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, 1995, pp.1081~1106
7. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Crack Propagation by Element-free Galerkin Methods", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 2, 1995, pp.295~315
8. Jun, S., Liu, W. K. and Belytschko, T., "Explicit Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, 1998, pp.137~166
9. Lucy, L., "A Numerical Approach to Testing The Fission Hypothesis", *The Astronomical Journal*, Vol. 82, 1977, pp.1013~1024
10. Monaghan, J. J., "An Introduction to SPH", *Computer Physics Communications*, Vol. 48, 1988, pp.89~96
11. Liu, W. K., Jun, S., Sihling, D. T., Chen, Y. and Hao, W., "Multiresolution Reproducing Kernel Particle Method for Computational Fluid Dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 25, 1997, pp.1391~1415
12. Liu, W. K., Chen, Y., Jun, S., Chen, J. S., Belytschko, T., Pan, C., Uras, R. A. and Chang, C. T., "Overview and Application of the Reproducing Kernel Particle Methods", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 3, 1996, pp.3~80
13. Liu, W. K. and Jun, S., "Multiple Scale Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, 1998, pp.1339~1362
14. Jun, S. and Im, S., "Multiple-Scale Mesh-free Adaptivity for The Simulation of Adiabatic Shear Band", *accepted for publication in Computational Mechanics*, 1999
15. Timoshenko, S. P. and Goodier, I. N., *Theory of Elasticity*, 3rd. edition, McGraw-Hill, 1970, p.53~60

(접수일자 : 1999. 9. 30)