The Korean Communications
in Statistics Vol. 6, No. 2, 1999
pp. 423-432

Accelerated Life Testings for System based on a Bivariate Exponential Model[1)]

Byung-Gu Park[2)] and Sang-Chul Yoon[3)]

Abstract

Accelerated life testing of product is commonly used to reduced test time and costs. In this papers is considered when the product is a two component system with lifetimes following the bivariate exponential distribution of Sarkar (1987) using inverse power rule model. Also, we derived the maximum likelihood estimators of parameters for asymptotic normality. We compare the mean square error of the proposed estimator for the life distribution under use conditions stress through Monte Carlo simulation.

1. 서론

제품의 가속수명시험은 일반적으로 비용과 시험시간을 줄이기 위하여 사용된다. 가속수명시험은 스트레스 수준을 실제보다 열악한 수준으로 시험하여 빠른 시간내에 제품의 고장자료를 얻어 이를 실제 사용 조건으로 외삽하여 실제 정상조건에서의 수명 관련 품질특성값을 평가한다. 이런 문제에 대한 모수적 추론은 Mann외 (1974), Nelson (1972)등이 많이 연구하였고, Klein과 Basu (1981, 1982), 그리고 Nelson (1990)등은 관찰값이 다중고장자료인 경우로 확장하였다. 그리고 Basu와 Ebrahimi (1982)는 비모수적인 방법으로 가속수명시험의 자료를 분석하였다.

대부분의 추론에서 부품들의 수명분포가 서로 독립이면서 동일한 분포를 갖는다는 가정에서 신뢰도를 추정하였다. 그러나 현실적으로 부품들의 수명이 서로 상관관계가 있으면서 서로 동일한 분포가 아닌 확률변수를 갖는 경우가 많다. 서로 종속관계가 있는 두 부품의 수명모형으로서 Marshall과 Olkin (1967)은 이변량 지수분포를 따르는 충격모형을 제안하였다. 그러나 이 모형은 절대연속인 분포가 아니어서 Block과 Basu (1974)는 절대 연속이고 비기억성(loss of memory property)을 가지는 이변량 지수분포를 제안하였지만 이것은 각각의 주변분포가 지수족에 속하지 않는다. 따라서 Sarkar (1987)은 Block과 Basu (1974) 모형을 보완하여 각각의 주변분포가 지수족을 가지는 절대연속 이변량 지수분포를 제안하였다.

서로 종속관계가 있는 두 부품에 대한 가속수명시험으로 Basu와 Ebrahimi (1987)가 Block과 Basu (1974)의 이변량 지수모형을 이용하여 실제 사용조건에서 모수의 추론문제를 다루었다. 또한 이 석훈등 (1992)이 Block과 Basu (1974)의 모형을 단계적 충격방법으로 직렬 시스템에서 최적시점 설정을 연구하였다.

---

1) This paper was partially supported by Basic Science Research Institute Programs, Ministry of Education, 1997, Project No. BSRI-97-1403.
2) Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea.
3) Part-time Lecturer, Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea.

이 논문에서는 Sarkar (1987)의 이변량 지수분포를 기초로 가속수명시험모형을 제안하고 모수의 추정과 점근적 성질을 연구한다. 제 2절에서는 가속함수의 모수들 c_1, c_2, c_3와 P의 최우추정량과 근사분포를 구하고, 제 3절에서는 제안된 모수의 추정량을 모의실험을 통하여 정상조건에서 평균제곱오차 관점에서 논의한다.

2. 모형과 모수 추정

이 절에서는 관찰값 단위가 두 개의 고장시간을 가질 때 자료의 분석에 관심이 있다. 즉, 두 개의 서로 종속적인 부품을 가지는 시스템에서 X, Y을 부품수명이라 하고 K개의 스트레스를 $V_1, V_2, \cdots, V_K$라 하자.

정상 스트레스 수준 V_0에서 두 부품의 수명 X, Y가 모수 $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}$를 가지는 Sarkar (1987)의 이변량 지수분포를 따른다고 가정하자. 스트레스 수준 $V_k, k=1,2,\cdots,K$에서 모수 $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}, k=1,2,\cdots,K$ 를 갖는 이변량 지수분포에서 (X, Y)의 결합확률밀도함수는

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \frac{\lambda_{1k}\lambda_k}{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})^2}\exp(-\lambda_{1k}x-(\lambda_{2k}+\lambda_{3k})y)\{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})(\lambda_{2k}+\lambda_{3k}) \\ & -\lambda_{2k}\lambda_k\exp(-\lambda_{1k}y)\}(A(\lambda_{1k}x))^{\gamma}(A(\lambda_{1k}y))^{-(1+\gamma)} \quad 0<x<y \text{ 인 경우} \\ = & \frac{\lambda_{2k}\lambda_k}{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})^2}\exp(-\lambda_{2k}y-(\lambda_{1k}+\lambda_{3k})x)\{(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})(\lambda_{1k}+\lambda_{3k}) \\ & -\lambda_{1k}\lambda_k\exp(-\lambda_{2k}x)\}(A(\lambda_{2k}y))^{\gamma}(A(\lambda_{2k}x))^{-(1+\gamma)} \quad 0<y<x \text{ 인 경우} \end{aligned} \tag{2.1}$$

으로 나타낼 수 있다. X, Y의 상관계수는

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) = & \frac{\lambda_{3k}}{\lambda_k}+\frac{\lambda_{3k}}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j!}{\lambda_k+(\lambda_{1k}+\lambda_{2k})j} \\ & \times\left(\lambda_1^j\prod_{l=1}^{j}(\lambda_k+l\lambda_{1k})^{-1}+\lambda_{2k}^j\prod_{l=1}^{j}(\lambda_k+l\lambda_{2k})^{-1}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

이다. 여기서 $A(z)=1-\exp(-z)$, $\gamma=(\lambda_{3k}/\lambda_{1k}+\lambda_{2k})$ 이고 $\lambda_k=\lambda_{1k}+\lambda_{2k}+\lambda_{3k}$ 이다.

실제적인 문제에서 더 강한 스트레스를 주더라도 부품의 의존 구조에 영향을 미치지 못할 때가 있다. 예를 들면, 크랭크축과 피스톤으로 이루어진 자동차의 엔진을 생각해 보면 스트레스가 변화하더라도 그 의존 구조는 변화하지 않는다. 즉 X와 Y 사이의 상관계수 $\rho(X,Y)$는 스트레스에 의존하지 않는다. 식(2.2)이 스트레스에 의존하지 않을 조건은

$$\lambda_{ik}=c_iV_k^P, \quad i=1,2,3; \quad k=0,1,\cdots,K \tag{2.3}$$

이며(Basu와 Ebrahimi (1987)) c_1, c_2, c_3 그리고 P는 자료로부터 추정되어야 할 상수이다. 이를 승법 가속함수라고 한다.

가속수명시험에서 n_k는 스트레스 수준 V_k에서의 시험횟수라 하고 두 개의 부품이 고장날 때까지 시스템을 시험한다. 스트레스 수준 V_k에서 m번째 시스템의 부품의 수명을 (X_{km}, Y_{km})이라

하자. 여기서 $m=1,2,\cdots,n_k$과 $k=1,2,\cdots,K$이다.

스트레스 수준 V_k에서 $(X_{k1}, Y_{k1}),\cdots,(X_{kn_k}, Y_{kn_k})$는 식(2.1)의 모수 λ_{1k}, λ_{2k}와 λ_{3k}을 갖는 이변량 지수분포를 따르며 서로 독립이고 동일한 분포를 갖는 확률벡터이다.

먼저 c_1, c_2, c_3와 P의 최우추정량을 구해보자. 식(2.1)에 의해서 c_1, c_2, c_3와 P에 대한 대수 우도함수는

$$\begin{aligned}\log \mathrm{L} = & -\sum_{k=1}^{K} n_{1k}\log\frac{c_1 c}{c_{12}^2} - \sum_{k=1}^{K} n_{1k}[c_1 x_k + (c_2+c_3)y_k]V_k^P \\ & + \sum_{k=1}^{K} n_{1k}\log\{c_{12}c_{23} - c_2 c\exp(-c_1 V_k^P y_k)\}V_k^{2P} \\ & + \frac{c_3}{c_{12}}\sum_{k=1}^{K} n_{1k}\log\{1-\exp(-c_1 V_k^P x_k)\} \\ & - \frac{c}{c_{12}}\sum_{k=1}^{K} n_{1k}\log\{1-\exp(-c_1 V_k^P y_k)\} \\ & - \sum_{k=1}^{K} n_{2k}\log\frac{c_2 c}{c_{12}^2} - \sum_{k=1}^{K} n_{2k}[c_2 y_k + (c_1+c_3)x_k]V_k^P \\ & + \sum_{k=1}^{K} n_{2k}\log\{c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2 V_k^P x_k)\}V_k^{2P} \\ & + \frac{c_3}{c_{12}}\sum_{k=1}^{K} n_{2k}\log\{1-\exp(-c_2 V_k^P y_k)\} \\ & - \frac{c}{c_{12}}\sum_{k=1}^{K} n_{2k}\log\{1-\exp(-c_2 V_k^P x_k)\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

으로 표현된다. 여기서 n_{1k} 과 n_{2k}는 영역 $\{Y_{km} > X_{km}\}$ 와 $\{Y_{km} < X_{km}\}$에서 관찰되는 관찰값의 개수이다. c_1, c_2, c_3 와 P에 대한 대수 우도함수의 일차 편미분 방정식은

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial c_1} = & -n_1.\alpha + n_1.\left\{\frac{c_{23}-c_2\exp(-c_1\beta)[1-c\beta]}{c_{12}c_{23}-c_2 c\exp(-c_1\beta)}\right\} \\ & + n_2.\left\{\frac{(c_1+c)\{1-\exp(-c_2\alpha)\}}{c_{12}c_{13}-c_1 c\exp(-c_2\alpha)}\right\} - \frac{c_3}{c_{12}^2}\left[n_1.\log\left\{\frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c\beta)}\right\}\right. \\ & \left. - n_2.\log\left\{\frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)}\right\}\right] + \frac{1}{c_{12}}n_1.\left\{\frac{c_3\alpha\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)}\right. \\ & \left. - \frac{c\beta\exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)}\right\} + n.\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{c_{12}}\right) - n_1.\left(\frac{1}{c_1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial c_2} = & -n.\beta + n_1.\left\{\frac{(c_2+c)\{1-\exp(-c_1\beta)\}}{c_{12}c_{23}-c_2 c\exp(-c_1\beta)}\right\} \\ & + n_2.\left\{\frac{c_{13}-c_1\exp(-c_2\alpha)[1-c\alpha]}{c_{12}c_{13}-c_1 c\exp(-c_2\alpha)}\right\} - \frac{c_3}{c_{12}^2}\left[n_1.\log\left\{\frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\beta)}\right\}\right. \\ & \left. - n_2.\log\left\{\frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)}\right\}\right] - \frac{1}{c_{12}}n_2.\left\{\frac{c\alpha\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{c_3 \exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} \Big\} + n \cdot \left(\frac{1}{c} - \frac{2}{c_{12}} \right) - n_2 \cdot \left(\frac{1}{c_2} \right) \\
\frac{\partial \log L}{\partial c_3} = & -n_1 . \alpha - n_2 . \beta + n_1 \cdot \left\{ \frac{c_{12} - c_2 \exp(-c_1\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right\} \\
& + n_2 \cdot \left\{ \frac{c_{12} - c_1 \exp(-c_2\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\beta)} \right\} + \frac{1}{c_{12}} \left\{ n_1 . \log \left(\frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right) \right. \\
& \left. - n_2 . \log \left(\frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right) \right\} + n \cdot \left(\frac{1}{c} \right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial P} = & -(n_1 . [c_1\alpha + (c_2+c_3)\beta] + n_2 . [c_2\beta + (c_1+c_3)\alpha]) \log(V_k) \\
& + n_1 \cdot \left\{ \frac{c_1 c_2 c \beta \log(V_k) \exp(-c_1\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} + 2\log(V_k) \right\} \\
& + n_2 \cdot \left\{ \frac{c_1 c_2 c \alpha \log(V_k) \exp(-c_2\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)} + 2\log(V_k) \right\} \\
& - \frac{c_3}{c_{12}} \left\{ n_1 . \frac{c_1\alpha \log(V_k) \exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} + n_2 . \frac{c_2\beta \log(V_k) \exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right\} \\
& - \frac{c}{c_{12}} \left\{ n_1 . \frac{c_1\beta \log(V_k) \exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} + n_2 . \frac{c_2\alpha \log(V_k) \exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right\}
\end{aligned}
$$

의 비선형 방정식으로 표현된다. 여기서 $c = c_1 + c_2 + c_3$, $c_{12} = c_1 + c_2$, $c_{13} = c_1 + c_3$, $c_{23} = c_2 + c_3$, $\alpha = x_k V_k^P$, $\beta = y_k V_k^P$, $n_1 . = \Sigma_{k=1}^K n_{1k}$와 $n_2 . = \Sigma_{k=1}^K n_{2k}$이며 $n . = n_1 . + n_2 .$ 이다.

모수 c_1, c_2, c_3 와 P에 대한 최우추정량 $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$ 와 $\hat{P}$는 비선형 방정식 식(2.5)으로부터 Newton-Raphson 방법에 의해 구할 수 있다. 따라서 최우추정량의 불변성(invariance propertity)에 의해 $\sqrt{n}((\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{P}) - (c_1, c_2, c_3, P))$는 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬 $nB^{-1}(c_1, c_2, c_3, P)$인 근사정규분포임을 알 수 있다. 즉,

$$
\sqrt{n}((\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{P}) - (c_1, c_2, c_3, P)) \xrightarrow{d} N(\underline{0}, nB^{-1}(c_1, c_2, c_3, P))
$$

이다. 여기서 $\xrightarrow{d}$은 분포수렴을 의미하고 그리고 피셔의 정보행렬은

$$
B(c_1, c_2, c_3, P) = E(-\Lambda(c_1, c_2, c_3, P)) = (I_{ik}), \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \tag{2.6}
$$

이다. 여기서 $\Lambda(c_1, c_2, c_3, P)$는 부록에 있는 $\log L$의 이차편미분으로 이루어진 행렬이며 피셔 정보행렬의 원소 I_{ik}, $i = 1,2,3,4$, $k = 1,2,3,4$ 는

$$
I_{11} = E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_1^2} \right), \quad I_{22} = E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_2^2} \right),
$$

$$
I_{33} = E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_3^2} \right), \quad I_{44} = E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial P^2} \right),
$$

$$I_{12}=E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_1 \partial c_2}\right),\quad I_{13}=E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_1 \partial c_3}\right) \tag{2.7}$$
$$I_{23}=E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_2 \partial c_3}\right),\quad I_{41}=E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial P \partial c_1}\right)$$
$$I_{42}=E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial P \partial c_2}\right),\quad I_{43}=E\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial P \partial c_3}\right)$$

으로 표현된다.

한편 $E(\Sigma_{k=1}^{K} n_{1k} x_k)=E(n_{1.})E(X)$, $E(\Sigma_{k=1}^{K} n_{1k} y_k)=E(n_{1.})E(Y)$, $E(\Sigma_{k=1}^{K} n_{2k} x_k)=E(n_{2.})E(X)$, $E(\Sigma_{k=1}^{K} n_{2k} y_k)=E(n_{2.})E(Y)$ 이므로

$$E(n_{1.})=\frac{n_k c_1}{c_{12}},\quad E(n_{2.})=\frac{n_k c_2}{c_{12}} \tag{2.8}$$

이고 스트레스 수준 k에서 X와 Y의 각각의 기대값은

$$E(X)=\left(\frac{1}{c_{13}}\right)V_k^{-P}$$

와

$$E(Y)=\left(\frac{1}{c_{23}}\right)V_k^{-P} \tag{2.9}$$

이다. 식(2.8)과 식(2.9)을 식(2.7)에 적용하면 I_{ik}를 구할 수 있다.

마지막으로 인위적인 자료를 이용한 모의시험에서 P의 추정을 간편하게 하기 위하여 다음과 같은 사실을 사용하여 $B(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{P})$로 부터 $B(c_1, c_2, c_3, P)$ 을 추정할 수 있다.

$$P=\frac{\log(\lambda_k)-\log(\lambda_m)}{\log(V_k)-\log(V_m)},\quad k\neq m.$$

여기서 $\lambda_k=\lambda_{1k}+\lambda_{2k}+\lambda_{3k}$, $\lambda_m=\lambda_{1m}+\lambda_{2m}+\lambda_{3m}$ 이다.

Block과 Basu (1974)의 식(7.5)와 Sarkar (1987)의 식(4.1)으로 부터 P을 추정하기 위하여 다음의 추정량을 사용하여 P대신 P^*을 추정하고자 한다.

$$P^*=\frac{1}{K(K-1)}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K}\left(\log\frac{n_m}{w_m}-\log\frac{n_k}{w_k}\right)\left(\frac{1}{\log(V_m/V_k)}\right). \tag{2.10}$$

여기서 $w_k=\sum_{i=1}^{n_k}\min(x_{ki}, y_{ki})$ 이고 $k=1,2,\cdots,K$이다.

c_1, c_2, c_3 와 P의 최우추정량을 직접 얻기가 어려움이 있기 때문에 먼저, 제안된 P^*을 추정하여 P대신에 모의시험에서 시험 값으로 P^*을 사용하고, P대신에 P^*값에 대입하면 이미 풀어 논 미지의 모수 c_1, c_2, c_3을 갖는 네 개의 등식을 얻을 수 있다. 따라서 c_1, c_2, c_3의 추정값을 얻은 다음 P의 추정값을 다시 얻고자 한다.

3. 예제

이 절에서는 인위적인 자료를 이용하여 제안된 c_1, c_2, c_3와 P을 추정하고 검토하고자 한다. 우선 가속수명시험에서 3개의 스트레스 수준을 각각 $V_1=10$, $V_2=15$, $V_3=20$으로 구성하고 각 스트레스 수준에서 Sarkar (1987)의 이변량 지수분포에서 난수를 각각 생성하였으며, 승법 모형인 $\lambda_{ik}=c_{ik}V_k^P$, $k=1, 2, 3; i=1, 2, 3$을 사용한다. 여기서 사용된 모수는 $c_1=2\times10^{-3}$, $c_2=3\times10^{-3}$, $c_3=2.5\times10^{-3}$와 $P=2$로 하였다. Sarkar (1987)의 이변량 지수분포를 따르는 인위적인 자료들은 아래 표에 나타나 있다.

$V_1=10$		$V_2=15$		$V_3=20$	
(x_{1i}, y_{1i})		(x_{2i}, y_{2i})		(x_{3i}, y_{3i})	
3.777197	4.641794	3.733945	3.523503	3.252852	4.599267
3.019530	3.111590	2.234310	2.618575	2.537844	2.419471
1.836949	2.007491	1.897569	1.938485	1.694300	1.910448
1.140518	1.143156	1.371977	1.447774	1.504883	1.527898
8.526463	7.509086	0.160245	0.163625	1.209237	1.251873
5.317077	3.170473	4.345095	3.892927	0.135130	0.135789
3.559611	3.330916	2.918701	1.964655	2.881616	2.627272
2.342765	1.967302	2.137605	2.035963	2.079269	1.542618
1.411039	1.387827	1.596785	1.429912	1.639903	1.582729
9.638733	8.514034	1.182684	1.172368	1.335691	1.241825
5.967197	6.129990	5.283881	4.339571	1.102760	0.196957
4.064216	3.606515	3.207643	3.279996	3.409683	2.878508
2.708735	2.695950	2.361874	2.158451	2.241799	2.282498
1.625519	1.698158	1.759438	1.753756	1.766054	1.651629
9.011408	14.397070	1.278009	1.310292	1.427184	1.423988

정상 스트레스 V_0는 5로 가정하고, 각 스트레스 수준에서 시험횟수를 n_1, n_2, n_3라 하고 동일한 크기로 각각 15개씩 부여하고 $n_{11}=5$ $n_{21}=10$ $n_{12}=2$ $n_{22}=13$ $n_{13}=5$ $n_{23}=10$ $n_{1\cdot}=12$ $n_{2\cdot}=33$을 Basu와 Ebrahimi(1987)의 자료와 동일한 조건으로 만들어 이 자료를 이용하여 식(2.5)로부터 추정되는 P^*는1.94이고, c_1, c_2, c_3와 P에 대한 각각의 최우추정량은 $\widehat{c_1}=2.01\times10^{-3}$, $\widehat{c_2}=2.98\times10^{-3}$, $\widehat{c_3}=2.46\times10^{-3}$와 $\widehat{P}=1.96$이며 분산은 $\widehat{V}(\widehat{c_1})=5.41\times10^{-7}$, $\widehat{V}(c_2)=10.03\times10^{-7}$, $\widehat{V}(\widehat{c_3})=4.96\times10^{-7}$와 $\widehat{V}(\widehat{P})=3.37\times10^{-6}$이다. 또한 정상조건에서의 모수들의 최우추정량 즉, λ_{10}, λ_{20}, λ_{30}은 $\widehat{\lambda_{10}}=47.1\times10^{-3}$, $\widehat{\lambda_{20}}=69.8\times10^{-3}$, $\widehat{\lambda_{30}}=57.6\times10^{-3}$이다.

모형의 타당성을 알아보기 위하여 모의실험에서 얻은 인위적인 자료를 이용한 시험에서 총 반복 횟수을 500번 시행하여, Sarkar (1987)의 이변량 모형에서 $\widehat{\lambda_{k0}}$, $k=1, 2, 3$의 편의 추정값과 평균제곱오차를 구한 결과 각각 4.31×10^{-4}, 10.51×10^{-4}, 16.31×10^{-4}이고 13.51×10^{-8}, 5.86×10^{-8}, 25.41×10^{-8}로 나타났다.

부 록

식(2.7)에 있는 $\Lambda(c_1, c_2, c_3, P)$의 원소들은 식 (2.5)으로부터 이차 편미분한 결과는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_1^2} = & -n_1 \cdot \left\{ \left(\frac{c_{23} - c_2 \exp(-c_1\beta)(1-c\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right)^2 - \frac{c_2\beta \exp(-c_1\beta)(2-c\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right\} \\
& - n_2 \cdot \left\{ \left(\frac{(c_1+c)(1-\exp(-c_2\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)} \right)^2 - \frac{2\{1-\exp(-c_2\alpha)\}}{c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)} \right\} \\
& + \frac{2c_3}{c_{12}^3} n_1 \cdot \log\left\{ \frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\} - \frac{c_3}{c_{12}^2} n_1 \cdot \left\{ 2\left(\frac{\alpha \exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\beta \exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\} - \frac{1}{c_{12}^2} n_1 \cdot \left\{ \frac{c_3\alpha^2 \exp(-c_1\alpha)}{[1-\exp(-c_1\alpha)]^2} - \frac{c\beta^2 \exp(-c_1\beta)}{[1-\exp(-c_1\beta)]^2} \right\} \\
& + \frac{2c-1}{c_{12}^3} n_1 \cdot \left\{ \frac{\beta \exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\} - \frac{2c_3}{c_{12}^3} n_2 \cdot \log\left\{ \frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right\} \\
& - n \cdot \left(\frac{1}{c^2} - \frac{2}{c_{12}^2} \right) - n_1 \cdot \left(\frac{1}{c_{12}^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_2^2} = & -n_1 \cdot \left\{ \left(\frac{(c_2+c)(1-\exp(-c_1\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right)^2 - \frac{2\{1-\exp(-c_1\beta)\}}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right\} \\
& - n_2 \cdot \left\{ \left(\frac{c_{13} - c_1 \exp(-c_2\alpha)(1-c\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)} \right)^2 - \frac{c_1\alpha \exp(-c_2\alpha)(2-c\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)} \right\} \\
& - \frac{2c_3}{c_{12}^3} n_1 \cdot \log\{1-\exp(-c_1\alpha)\} - \frac{2c_3}{c_{12}^2} n_2 \cdot \log\{1-\exp(-c_2\beta)\} \\
& - \frac{c_3}{c_{12}^2} n_2 \cdot \left\{ \frac{\alpha \exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} + \frac{\beta \exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} - \frac{\alpha \exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right\} \\
& - \frac{1}{c_{12}} n_2 \cdot \left\{ \frac{c_3\beta^2 \exp(-c_2\beta)}{[1-\exp(-c_2\beta)]^2} - \frac{c c_3\alpha^2 \exp(-c_2\alpha)}{[1-\exp(-c_2\alpha)]^2} \right\} \\
& - n_2 \cdot \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{c_{12}^2} \right) - n_1 \cdot \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{2}{c_{12}^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_3^2} = & -n_1 \cdot \left\{ \frac{c_{23} - c_2 \exp(-c_1\beta)}{[c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)]^2} \right\} \\
& - n_2 \cdot \left\{ \frac{c_{12} - c \exp(-c_2\alpha)}{[c_{12}c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)]^2} \right\} - n \cdot \left(\frac{1}{c^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial P^2} = & -(n_1 \cdot [c_1\alpha + (c_2+c_3)\beta] + n_2 \cdot [c_2\beta + (c_1+c_3)\alpha])(\log V_k)^2 \\
& - n_1 \cdot \left\{ \left(\frac{c_1 c_2 c\beta \log(V_k) \exp(-c_1\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right)^2 - \frac{c_1 c_2 c\beta (\log V_k)^2 \exp(-c_1\beta)(1-c_1\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ n_2 \cdot \left\{ \left(\frac{c_1 c_2 c\alpha(\log V_k)\exp(-c_2\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2\alpha)} \right)^2 - \frac{c_1 c_2 c\alpha(\log V_k)^2 \exp(-c_2\alpha)(1-c_2\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2\alpha)} \right\}$$

$$- \frac{c_3}{c_{12}} \left\{ n_1 \cdot \left[\left(\frac{c_1\alpha(\log V_k)\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} \right)^2 - \frac{c_1\alpha\log(V_k)^2\exp(-c_1\alpha)(1-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} \right] \right.$$

$$\left. + \left[n_2 \cdot \left(\frac{c_2\beta(\log V_k)\exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right)^2 - \frac{c_2\beta(\log V_k)^2\exp(-c_2\beta)(1-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right] \right\}$$

$$+ \frac{c}{c_{12}} \left\{ n_1 \cdot \left[\left(\frac{c_1\beta(\log V_k)\exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right)^2 - \frac{c_1\beta\log(V_k)^2\exp(-c_1\beta)(1-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right] \right.$$

$$\left. + \left[n_2 \cdot \left(\frac{c_2\alpha(\log V_k)^2\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right)^2 - \frac{c_2\alpha(\log V_k)^2\exp(-c_2\alpha)(1-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_1 \partial c_2} = - n_1 \cdot \left\{ \frac{c_{23}^2 - \exp(-c_1\beta)[c_{12}c_{23} - (c_2+c) - c_1c_3(c_2+c)\beta]}{[c_{12}c_{23} - c_2 c\exp(-c_1\beta)]^2} \right\}$$

$$- n_2 \cdot \left\{ \frac{c_{13}^2 - \exp(-c_2\alpha)[c_{12}c_{13} - (c_1+c) - c_2c_3(c_1+c)\alpha]}{[c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2\alpha)]^2} \right\}$$

$$- \frac{2c_3}{c_{13}^3} \left\{ n_2 \cdot \log\left(\frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right) - n_1 \cdot \log\left(\frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right) \right\}$$

$$- \frac{1}{c_{12}^2} n_1 \cdot \left\{ \frac{c_3\alpha\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} - \frac{(c+c_3)\beta\exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\}$$

$$- \frac{c_3}{c_{12}^2} n_2 \cdot \left\{ \frac{\beta\exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} - \frac{\alpha\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right\} - n_1 \cdot \left(\frac{1}{c^2} - \frac{2}{c_{12}^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_1 \partial c_3} = - n_1 \cdot \left\{ \frac{[c_{23}^2 - c_2\exp(-c_1\beta)(1-c\beta)][c_{12} - c_2\exp(-c_1\beta)]}{[c_{12}c_{23} - c_2 c\exp(-c_1\beta)]^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1 - c_2\beta\exp(-c_1\beta)}{c_{12}c_{23} - c_2 c\exp(-c_1\beta)} \right\} - \frac{1}{c_{12}^2} n_1 \cdot \log\left\{ \frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\}$$

$$- n_2 \cdot \left\{ \frac{(c_1+c)(1-\exp(-c_2\alpha))[c_{12} - c_1\exp(-c_2\alpha)]}{[c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2\alpha)]^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2\alpha)} \right\} + \frac{1}{c_{12}^2} n_2 \cdot \log\left\{ \frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right\}$$

$$- \frac{1}{c_{12}^2} n_1 \cdot \left\{ \frac{\beta\exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} - \frac{\alpha\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} \right\} - n_1 \cdot \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial c_2 \partial c_3} = - n_1 \cdot \frac{[c_{12}^2 - \exp(-c_1\beta)[(c_1c_{12} - c_2c_3) - c_2(c_2+c)\exp(-c_1\beta)]}{[c_{12}c_{23} - c_2 c\exp(-c_1\beta)]^2}$$

$$- n_2 \cdot \frac{c_1\exp(-c_2\alpha)[c_2c_{12} + c + 3 - (c_{13} - c_1\exp(-c_2\alpha))}{[c_{12}c_{13} - c_1 c\exp(-c_2\alpha)]^2}$$

$$- \frac{1}{c_{12}^2} \left(n_1 \cdot \log\left\{ \frac{1-\exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\} + n_2 \cdot \log\left\{ \frac{1-\exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right\} \right)$$

$$- \frac{1}{c_{12}} \left\{ \frac{\alpha \exp(-c_2\alpha)}{1-\exp(-c_2\alpha)} - \frac{\beta \exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right\} - n \cdot \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial P \partial c_1} = & - n_1 . \alpha(\log V_k) + n_2 . \left\{ \frac{c_2 c_3 [c_{12}^2 c_3 (c_2 - c_1)] \alpha (\log V_k) \exp(-c_2\alpha)}{[c_{12} c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)]^2} \right\} \\
& + n_1 . \left\{ \frac{\beta(\log V_k) \exp(-c_1\beta) \{c_{23} [c_2 (c_{12}^2 + c_2 c_3) - c_{12} c_1 c_2 c\beta] - (c_2 c)^2 \exp(-c_1\beta)}{[c_{12} c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)]^2} \right\} \\
& - \frac{1}{c_{12}} n_1 . \left\{ \frac{c\beta(\log V_k) \exp(-c_1\beta)[1-\beta - \exp(-c_1\beta)]}{[1-\exp(-c_2\beta)]^2} \right. \\
& + \frac{c_1 c_3 \alpha (\log V_k) \exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} - \frac{c_3 \alpha (\log V_k) \exp(-c_1\alpha)[1-\alpha - \exp(-c_1\alpha)]}{[1-\exp(-c_1\alpha)]^2} \\
& \left. - \frac{c_1 c_3 \beta (\log V_k) \exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\} - \frac{c_1 c_3}{c_{12}^2} n_2 . \left\{ \frac{\beta(\log V_k) \exp(-c_2\beta)}{1-\exp(-c_2\beta)} \right. \\
& \left. - \frac{\alpha(\log V_k) \exp(-c_2\alpha\beta)}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial P \partial c_2} = & - n . \alpha(\log V_k) + n_1 . \left\{ \frac{c_1^2 c_3 (c_2 + c) \beta (\log V_k) \exp(-c_1\beta)}{[c_{12} c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)]^2} \right\} \\
& + n_2 . \left\{ \frac{c_1 c (\log V_k) \exp(-c_2\alpha)[c_{13}(c_{12}^2 + c_1 c_3)] - c(c_{12} c_{13} c_2 \alpha - c_1 c \exp(-c_2\alpha))]}{[c_{12} c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)]^2} \right\} \\
& - \frac{c_3}{c_{12}^2} n_1 . \left\{ \frac{c_1 \alpha (\log V_k) \exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} - \frac{c_1 \beta (\log V_k) \exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right\} \\
& - \frac{1}{c_{12}^2} n_2 . \left\{ \frac{c\alpha(\log V_k) \exp(-c_2\alpha)[1-c_2\alpha - \exp(-c_2\alpha)]}{[1-\exp(-c_2\alpha)]^2} \right. \\
& - \frac{c_3 \beta (\log V_k) \exp(-c_2\beta)[1-c_2\beta - \exp(-c_2\beta)]}{[1-\exp(-c_2\beta)]^2} \\
& \left. + \frac{c_3 c_2 \beta (\log V_k \exp(-c_2\beta))}{1-\exp(-c_2\beta)} - \frac{c_3 c_2 \alpha (\log V_k \exp(-c_2\alpha))}{1-\exp(-c_2\alpha)} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log L}{\partial P \partial c_3} = & - (n_1 . \beta + n_2 . \alpha)(\log V_k) - n_1 . \frac{c_1^2 c_2 c_{12} \beta (\log V_k) \exp(-c_1\beta)}{[c_{12} c_{23} - c_2 c \exp(-c_1\beta)]^2} \\
& - n_2 . \frac{c_1 c_2^2 c_{12} \alpha (\log V_k) \exp(-c_2\alpha)}{[c_{12} c_{13} - c_1 c \exp(-c_2\alpha)]^2} - \frac{1}{c_{12}} n_1 . \left\{ \frac{c_1 \beta (\log V_k) \exp(-c_1\beta)}{1-\exp(-c_1\beta)} \right. \\
& \left. - \frac{c_1 \alpha (\log V_k) \exp(-c_1\alpha)}{1-\exp(-c_1\alpha)} \right\}
\end{aligned}$$

참 고 문 헌

[1] 이 석훈, 박 래현 과 박 희창 (1992), 두 개의 부품으로 구성된 시스템의 단계적 충격생명검사에 관한 연구, 「응용통계연구」, 제 5권 2호, 193-209.

[2] Basu. A. P. and Ebrahimi. N. (1987), On A Bivariate Accelerated Life Test, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 16, 297-304.

[3] Block, H. and Basu. A. P. (1974), A continuous bivariate exponential extension, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, 1031-1036.

[4] Kelin, J. P. and Basu. A. P. (1981), Weibull accelerated life tests when there are competing cause of failure, *Communication Statistical Theory and Method*, A10, 2073-2100.

[5] Kelin, J. P. and Basu. A. P. (1982), Accelerated life tests under competing Weibull cause of failure, *Communication Statistical Theory and Method*, A11, 2271-2286.

[6] Mann. N. R., Shafer and Singpurwalla. N. D. (1974), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John wiley & Sons, New York.

[7] Marshall. W. B. and Okin. I. (1967), A mutivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 62, 30-44.

[8] Nelson. W. B. (1972), Graphical analysis of accelerated life test data with inverse power law model, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 21, 2-11.

[9] Nelson. W. B. (1990), *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*, Wiley, New York.

[10] Sarkar. S. K. (1987), A Continuous Bivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, 667-675.