

3D NURBS 곡선의 해석적 및 이산적 순정[†]

홍충성*, 홍석용*, 이현찬**

Analytic and Discrete Fairing of 3D NURBS Curves

Chung Seong Hong*, Seok Young Hong* and Hyun Chan Lee**

ABSTRACT

For reverse engineering, curves and surfaces are modeled for new products by interpolating the digitized data points. But there are many measuring or deviation errors. Therefore, it is important to handle errors during the curve or surface modeling. If the errors are ignored, designer could get undesirable results. For this reason, fairing procedure with the aesthetics criteria is necessary in computer modeling. This paper presents methods of 3D NURBS curve fairing. The techniques are based on automatic repositioning of the digitized data points or the NURBS curve control points by a constrained nonlinear optimization algorithm. The objective function is derived variously by derived curves. Constraints are distance measures between the original and the modified digitized data points. Changes in curve shape are analyzed by illustrations of curve shapes, and continuous plotting of curvature and torsion.

Key words : Reverse engineering, NURBS, Curve fairing, Constrained nonlinear optimization problem, Derived curve, Fairness metric

1. 서 론

컴퓨터 그래픽스 환경 하에서 곡선이나 곡면의 모델링은 자동차 차체나 비행기 동체, 그리고 배의 선체 디자인과 같은 많은 응용분야를 가지고 있다. 이러한 응용분야에 적용하기 위하여 CAD(Computer Aided Design) 시스템이 갖추어야 할 가장 기본적인 기능중의 하나가 주어진 점 데이터를 지나는 부드러운 곡선이나 곡면을 모델링하는 것이다. 곡선 모델링이란 설계자가 생각한 정성적인 곡선을 실제 수학적으로 정의된 곡선으로 만드는 작업을 의미한다. 그러나 매우 효과적인 곡선 모델링 방법을 사용하여 곡선을 형성하더라도, 점 데이터 자체에 포함된 오차나 편향성에 의하여 설계자가 원하지 않는 시각적

혹은 공학적으로 부드럽지 않은 결과가 생성되기도 한다. 따라서 이러한 오류를 보정하여 설계자가 원하는 부드러운 곡선을 모델링하기 위하여 곡선을 순정하는 과정이 필요하다.

곡선을 순정하는 방법에는 설계자가 반복적으로 곡선의 순정 과정에 참여하는 방법과 설계자가 곡선의 순정 과정에 참여하지 않고 자동적으로 곡선의 모양을 변하게 하는 방법이 있다. 설계자가 순정 과정에 반복적으로 참여하는 방법에서, 설계자는 곡선의 모양을 변화시키기 위하여 이동 가능한 조정점을 분별해내고 이를 적절히 이동시킴으로써 변경된 곡선을 모델링하게 된다. 이 작업은 변경된 곡선과 이에 대응되는 곡률이나 토션분포를 실제 그려봄으로써 설계자가 만족할 만큼 부드럽게 될 때까지 반복이 된다. 그러나 이러한 방법은 설계자의 높은 기술이 요구되어지며 비슷한 작업이 반복되어지기 때문에, 시간과 비용 측면에서 매우 비효율적이다.

현재까지 모델링된 곡선을 자동적으로 순정하여 주는 방법은 실질적으로 존재하지 않는다. 설계자가

[†] 이 논문은 1996년도 공업기반 기술 연구과제의 위탁과제 연구비에 의하여 연구되었음.

*학생회원, 홍익대학교 산업공학과

**중신회원, 홍익대학교 정보산업공학과 부교수

직접적으로 곡선의 순정 중간 단계에 참여하지 않는다 하여도 변화할 수 있는 조정점 혹은 곡선 모델링 요소들을 결정하는 문제, 이것들이 실제 이동할 수 있는 범위를 결정하는 문제, 그리고 변경된 곡선이 어떠한 모양을 유지하여야 하는지에 대한 순정 기준을 결정하는 문제는 여전히 설계자의 몫으로 남겨된다. 특히 곡선 순정 기준(fairness criteria)의 결정과 이에 따른 순정 척도(fairness metric)의 유도는 순정 후 곡선의 모양을 결정하는 가장 중요한 요소가 된다.

자동적인 곡선의 순정을 위하여 많은 연구자들은 측정점으로부터 부드러운 곡선을 모델링하는 방법과 이미 모델링된 곡선의 요소를 변경하여 곡선의 순정을 행하는 방법에 대하여 연구하여 왔다.

Nowacki *et al.*는 보간 조건(interpolation conditions), 양끝 조건(end conditions), 적분 조건(integral condition)을 순정 척도와 함께 사용하여 곡선 모델링 문제를 비선형 방정식의 형태로 표현하고 해를 구함으로써, 주어진 측정점을 지나는 부드러운 베지에르(Bezier) 곡선과 합성 다항식(composite polynomial) 곡선을 모델링하는 방법을 제안하였다^[1]. Kaklis와 Sapidis는 C^2 연속을 보장하는 2D 곡선을 자동적으로 모델링하는 알고리즘을 제시하였으며^[2], Goodman *et al.*은 볼록포 조건(convexity conditions)과 토션 조건(torsion conditions)을 고려하여, 주어진 측정점의 모양을 보전하면서 G^2 연속성을 가지는 유리 3차 곡선을 모델링하는 방법을 제안하였다^[4].

모델링된 곡선을 순정하는 방법으로는 주로 NURBS(Non-Uniform Rational B-splines) 곡선의 모양을 변경시키는 방법이 연구되어졌다. NURBS 곡선의 모양을 변경시키는 방법은 크게 네 가지로 분류되는데^[5] NURBS 곡선의 조정점(control points)을 이동시키는 방법, 절점 벡터(knot vector)를 변경시키는 방법, B-스플라인(B-spline) 기저함수(basis function)의 차수를 변경시키는 방법, 그리고 조정점이 NURBS 곡선에 영향을 미치는 가중치(weights)를 변경시키는 방법이 있다.

Farin과 Sapidis, Pigounakis와 Kaklis는 NURBS 곡선의 절점 벡터를 제거하고 재 삽입하는 과정을 통하여 NURBS 곡선을 순정하는 방법들을 각각 제안하였으며^[6,8], Piegl, Au와 Yeun, Rando와 Roulier는 NURBS 곡선의 조정점과 가중치를 동시에 변경시켜 곡선을 순정하는 방법들을 제안하였다.^[9,11] 또한 Hohenberger와 Reuding은 NURBS 곡선의 가중치만을 변경시킴으로써 곡선의 순정을 행하는 방법에 대하여 제안하였다^[12].

Table 1. Researches on fairing curves and surfaces

순정 대상	입력 데이터	변경 요소	참고 문헌
곡선	측정점	측정점 보간	1, 2, 3, 4
		절점 벡터	6, 7, 8
	NURBS	가중치	9, 10, 11, 12
		조정점	9, 10, 11
곡면	측정점	측정점 보간	13
		절점 벡터	14
	NURBS	조정점	10, 15, 16, 17
		베지에르	10, 18
	기타	19, 20, 21	

자동적인 곡선의 순정 방법은 또한 곡면 순정으로 확장되어 연구되어졌다. 이러한 곡면 순정에 대한 연구는 곡선 순정 방법과 마찬가지로 측정점으로부터 부드러운 곡면을 모델링하는 방법과 이미 모델링된 곡면의 요소들을 변경하여 곡면의 순정을 행하는 방법으로 나눌 수 있다. Table 1은 이러한 곡선 순정과 곡면 순정에 대한 기존 연구들을 입력 데이터 및 변경 요소별로 정리한 것이다.

본 연구는 자동적인 NURBS 곡선의 순정에 대하여 다루고 있다. 곡선 순정 알고리즘은 주어진 측정점으로부터 NURBS 곡선을 모델링한 후 조정점을 이동시킴으로써 곡선의 순정을 행하는 해석적 곡선 순정(analytic curve fairing) 방법과 측정점에 대한 순정을 수행한 후 NURBS 곡선을 모델링하는 이산적인 곡선 순정(discrete curve fairing) 방법이 사용되었으며, 이는 기존의 많은 연구들과 같이 제약식이 있는 비선형 최적화 문제(constrained nonlinear optimization problem)의 해를 구하는 알고리즘에 적용되었다^[3,10-12,13,16-18]. 비선형 최적화 문제의 목적함수는 곡선의 곡률(curvature), 곡률 반경(radius of curvature), 접선 벡터(tangent vector), 법선 벡터(normal vector) 등의 기하학적 불변요소(geometric invariants)를 이용하여 다양하게 유도된 순정 척도가 사용되어졌으며, 제약식으로는 주어진 측정점과 이들이 변경된 점과의 거리 차를 제한하는 조건이 사용되어졌다. 두 가지 곡선 순정 알고리즘을 사용하여 순정된 곡선의 결과는 곡선의 모양 변화 추이를 살펴보고 각각의 결과에서의 곡률과 토션분포를 그려봄으로써 분석되어졌다. 본 연구의 초점은 NURBS 곡선의 순정시, 사용된 순정 척도와 순정 알고리즘에 따른 곡선의 모양 변화를 비교하는데 있다.

2절에서는 본 연구에서 사용된 측정점으로부터 NURBS 곡선을 모델링하는 방법 대하여 기술한다.

3절에서는 곡선 순정사 비선형 최적화 문제의 목적 함수로 사용된 다양한 곡선 순정 척도를 유도한 방법에 대하여 기술하며, 4절에서는 본 연구에서 사용된 두 가지 곡선 순정 알고리즘에 대하여 기술한다. 5절에서는 실제 곡선 순정의 수행과 결과를 기술하고 분석하며, 6절에서는 본 연구의 결론 및 추후 연구과제에 대하여 설명한다.

2. NURBS 곡선 모델링 방법

2.1 NURBS 곡선의 개요

3차원 공간상에서 NURBS 곡선은 다음과 같이 정의되어 진다^[5].

$$R(u) = R_{p,w,U}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (1)$$

여기서 $P=(P_0, P_1, \dots, P_n)$ 는 NURBS 곡선을 표현하는 조정점의 집합이며 $W=(w_0, w_1, \dots, w_n)$ 는 각 조정점이 NURBS 곡선에 영향을 미치는 가중치의 집합이다. 또한 $N_{i,p}(u)$ 는 첫 절점과 마지막 절점이 각각 $p+1$ 개의 중복을 갖는 절점의 집합인 절점 벡터 $U=(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \dots)$ 로 정의되는 B-스플라인 기저함수이다.

NURBS 곡선에서 B-스플라인 기저함수는 매개변수(parameter) u 의 변화에 따라 각 조정점에 대응되는 기저함수 값이 유동적으로 변할 수 있도록 정의되어진다. 절점 벡터를 구성하고 있는 절점들이 오름차순으로 정리되어 있다면, 차수 p 의 i 번째 B-스플라인 기저함수는 다음과 같이 정의된다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

2.2 측정점을 지나는 3차 NURBS곡선 모델링

주어진 측정점을 지나는 곡선은, 곡선을 모델링하는 방법에 따라 다양하게 나타내어진다. 다항식, 베지에르, B-스플라인과 같은 곡선의 종류뿐만 아니라 곡선의 차수, 주어진 측정점에 대응되는 매개변수

값의 결정, 그리고 절점 벡터의 설정에 따라서 같은 측정점을 이용하여 곡선을 모델링하여도 다른 형태의 곡선이 생성된다.

본 연구에서는 NURBS 곡선의 형성 방법을 이용하여 측정점으로부터 곡선을 모델링하였다^[6]. 주어진 측정점의 집합을 $Q=(Q_0, \dots, Q_k)$ 라 하였을 때 이들을 이용하여 곡선을 생성하기 위한 계산을 하게 되는데, 측정점을 NURBS 곡선의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$Q_j = R(u_j) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u_j) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u_j) w_i} \quad (j=0, \dots, k) \quad (3)$$

초기에 주어지는 자료는 측정점의 집합 Q 와 측정점 양끝에서의 접선벡터인 D_0 와 D_k , 차수 p , 그리고 각 조정점의 가중치 집합인 W 이다.

NURBS 곡선을 모델링하기 위하여 먼저 측정점에 대응되는 매개변수 값을 구하여야 하는데, 본 연구에서는 코드 길이 방법(chord length method)을 사용하였다.

$$d = \sum_{i=1}^k |Q_i - Q_{i-1}|$$

$$\bar{u}_0 = 0, \bar{u}_k = 1$$

$$\bar{u}_j = \bar{u}_{j-1} + \frac{|Q_j - Q_{j-1}|}{d} \quad (j=1, \dots, k) \quad (4)$$

다음으로 NURBS 곡선의 절점들은 측정점에 대응되는 매개변수 값 주변에 있는 p 개의 매개변수 값들의 평균으로 설정되었다.

$$u_0 = \dots = u_p = 0$$

$$u_{m-p} = \dots = u_m = 1$$

$$u_{i+p+1} = \frac{1}{p} \sum_{j=i}^{i+p-1} \bar{u}_j \quad (j=0, \dots, k-p+1) \quad (5)$$

NURBS 곡선의 조정점의 양 끝은 측정점과 같아야 하므로 다음의 식을 유도할 수 있으며,

$$P_0 = Q_0 \quad (6)$$

$$P_{k+2} = Q_k \quad (7)$$

양 끝점에서의 접선벡터가 주어졌으므로 이를 고정시키기 위하여 다음과 같은 식이 만족되어야 한다.

$$-P_0 + P_1 = \frac{u_{p+1}}{p} D_0 \quad (8)$$

$$-P_{k+1} + P_{k+2} = \frac{1-u_{m-p-1}}{p} D_k \quad (9)$$

또한 양 끝점을 제외한 측정점은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$Q_j = C(\bar{u}_j) = \frac{\sum_{i=0}^{k+2} N_{i,p}(\bar{u}_j) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{k+2} N_{i,p}(\bar{u}_j) w_i} \quad (10)$$

($j=1, \dots, k-1$)

결국 식 (10)은 $k-1$ 개의 식과 $k-1$ 개의 미지수인 조정점으로 표현되는 방정식이므로, 이는 방정식의 해를 구함으로써 모델링하고자 하는 측정점을 지나는 NURBS 곡선의 조정점을 구할 수 있게 된다.

3. 곡선 순정 척도의 유도

3.1 곡선 순정 기준과 곡선 순정 척도

곡선의 모양은 많은 경우에 설계자뿐만 아니라 곡선의 최종 사용자에게도 매우 중요한 요소가 된다. 설계자가 원하는 곡선의 모양에 대한 제약은 곡선을 표현하는 매개변수의 특정 위치에서의 접선 벡터와 법선 벡터, 일정 구간에서의 블록포 유지와 곡물의 점진적인 변화 등에 의하여 결정되어 질 수 있다. 그러나 이러한 곡선의 모양에 대한 요구사항이 만족된다 하여도 최종적인 곡선의 모양에 대한 결정이 남게 된다. 이 단계에서 필요한 것이 곡선 순정시 설계자가 원하는 곡선에 대한 순정 기준이다.

곡선 순정 기준을 결정하는 것은 매우 어려운 문제이다. 곡선의 부드러움에 대한 기준은 설계자에 따라 주관적이며 모호할 뿐만 아니라 모든 문제에 있어서 하나로 정의되지는 않는다. 또한 설계자가 정한 순정 기준을 만족했다고 하여도, 곡선의 일부 분에서 날카롭게 휘어지거나 부분적으로 평평한 점들이 생기는 것과 같은 원하지 않는 곡선의 모양이 생성될 수 있다. 따라서 곡선의 순정시 순정 수준을 식별할 수 있는 방법이 개발되어야 할 필요가 있다.

곡선 순정 척도는 곡선의 순정 수준을 수리적으로 측정하는 방법이다. 곡선 순정 척도를 만들 때에는 순정 기준이 설계자와 순정하고자 하는 곡선에 따라 다양하게 변해간다는 점이 고려되어야 한다. 결국 하나의 곡선 순정 척도가 모든 상황에서 곡선을 시각적 혹은 공학적으로 부드럽게 변경시키지는 못하며 설계자의 의도를 고려하여 개발되고 선택되어야

야 한다. 그럼에도 불구하고 곡선 순정 척도는 컴퓨터 그래픽스 환경 하에서 많은 CAGD(Computer Aided Geometric Design) 연구자들에 의하여 연구되어져 왔다. 이는 다양한 순정 척도가 설계자에게 제공이 되고 각 순정 척도마다 순정시 곡선의 기하학적인 변화에 대한 묘사가 신뢰할만한 수준이라면, 설계자는 순정하기를 원하는 곡선에 사용될 순정 척도를 쉽게 결정할 수 있기 때문이다.

3.2 파생곡선을 이용한 곡선 순정 척도 유도

일반적으로 곡선 순정 척도의 수준은 곡선을 표현하는 매개변수에 영향을 받아서는 안된다. 즉, 두개의 다른 매개변수를 사용하여 같은 곡선이 표현되었을 때, 두 곡선에서의 순정 척도는 같은 수준이어야 한다. 따라서 곡선 순정 척도는 곡선의 기하학적인 불변요소로만 구성되어야 하며, 이 경우 설계자는 가장 사용하기 편리한 매개변수화 된 곡선을 이용하여 순정 척도의 수준을 계산할 수 있다.

본 연구에서는 파생곡선(derived curve)을 이용하여 곡선 순정 척도를 유도하였다^[11]. 파생곡선이란 순정하고자 하는 매개변수 곡선을 디자인곡선(design curve)라 하였을 때, 디자인곡선의 불변요소로 이루어지는 곡선을 의미한다. 곡선 순정 척도(μ)는 식 (11)과 같이 파생곡선의 호 길이(S_c)로 정의된다.

$$\mu = S_c = \int_0^S |c'| ds \quad (11)$$

여기서, c : 파생곡선

r : 디자인곡선

예를 들어 파생곡선이 디자인곡선의 곡률 중심을 지나가는 곡선이라 하자. 디자인곡선이 매개변수 곡선 $r(u)$ 로 주어졌다면, 파생곡선은 디자인곡선의 불변요소로 이루어진 $c(u)=r(u)+\rho(u)n(u)$ 로 표현될 수 있다. 이를 Frenet-Serret 공식^[22]을 이용하여 곡선 순정 척도인 식 (12)에 적용하면 다음과 같은 결과가 나오게 된다.

$$\mu = \int_0^S [\rho^2 r^2 + (\rho')^2]^{1/2} ds \quad (12)$$

이 경우 곡선 순정 척도인 μ 를 최소화하였을 때의 디자인곡선은 디자인곡선의 곡률중심으로 이루어진 곡선의 호를 최소화하는 방향으로 변하게 된다. 즉, 디자인곡선의 곡률중심은 최소한 작은 지역 안에서 분포하도록 잡아당겨지고, 결과적으로 순정하고자 하는 디자인곡선은 가능한 원에 가까운 모양으로 변하게 된다.

위와 같이 디자인곡선의 곡률 중심을 지나는 파생곡선과는 달리, 대부분 경우의 파생곡선의 기하학적인 모양은 직관적으로 인지하기가 어렵다. 그러나 파생곡선으로부터 실제 곡선 순정 척도가 구하여진다면, 순정 척도를 구성하는 곡선의 불변요소 최소화 될 때 디자인곡선에 미치는 영향을 분석함으로써 디자인곡선의 모양 변화 예측이 가능하다. 식 (12)에서 구하여진 순정 척도가 최소화된다는 것은, 디자인곡선에서의 ρ , τ , ρ' 가 최소화된다는 것을 의미한다. 따라서 디자인곡선은 ρ^2 에 의해 직선보다는 원호에 가깝게 변하게되며, $(\rho)^2$ 에 의해 날카롭게 휘어지거나 원하지 않게 직선이 되는 부분이 생기지 않으며, τ^2 에 의해 가능한 특정 평면상에 위치한 곡선에 가깝게 변하는 경향을 갖게될 것이다. Table 2는 곡선 순정 척도를 구성하는 디자인곡선의 기하학적 불변요소가 실제 곡선 순정시 디자인곡선을 어떻게 변화시키는데에 대하여 보여주고 있다.

본 연구에서는 파생곡선을 이용하여 곡선 순정 척도 4가지가 유도되었다. 유도된 순정 척도를 이용하여 5절에서는 실제 곡선을 순정하고 변경된 곡선의 모양뿐만 아니라 곡률과 토선분포를 순정 전의 곡선과 비교해 봄으로써 디자인 곡선의 변화에 미치는 영향이 분석된다. Table 3은 본 연구에서 유도된 곡

선 순정 척도와 곡선 순정시 디자인곡선에 미치는 영향을 예측한 것이다.

3.3 곡선 순정 척도를 구성하는 기하학적 불변요소의 유도

파생곡선으로부터 유도된 곡선 순정 척도를 실제 곡선 순정 과정에 사용하기 위하여는 디자인곡선의 곡률, 곡률반경, 토선, 그리고 곡률과 곡률반경의 1차 미분에 대한 식이 선행되어 구하여야 한다.

주어진 측정점으로부터 NURBS 곡선을 모델링한 후 해석적으로 곡선의 순정을 행하는 알고리즘에서는, 이러한 식들을 쉽게 유도할 수 있었다. 식 (13)에서 식 (17)은 곡선 순정 척도를 구성하는 요소에 관한 식을 유도하기 위하여 정의된 식이다.

$$\begin{aligned}
 KU &= |r'(u) \times r''(u)|^2 \\
 &= (r'_y(u)r''_z(u) - r'_z(u)r''_y(u))^2 \\
 &\quad + (r'_x(u)r''_z(u) - r'_z(u)r''_x(u))^2 \\
 &\quad + (r'_x(u)r''_y(u) - r'_y(u)r''_x(u))^2
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 KU' &= 2(r'_y(u)r''_z(u) - r'_z(u)r''_y(u)) \\
 &\quad (r''_y(u)r'''_z(u) - r''_z(u)r'''_y(u)) \\
 &\quad + 2(r'_x(u)r''_z(u) - r'_z(u)r''_x(u)) \\
 &\quad (r''_x(u)r'''_z(u) - r''_z(u)r'''_x(u)) \\
 &\quad + 2(r'_x(u)r''_y(u) - r'_y(u)r''_x(u)) \\
 &\quad (r''_x(u)r'''_y(u) - r''_y(u)r'''_x(u))
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 KB &= |r'(u)|^2 = r'_x(u)^2 + r'_y(u)^2 + r'_z(u)^2 \\
 KB' &= 2r'_x(u)r''_x(u) + 2r'_y(u)r''_y(u) + 2r'_z(u)r''_z(u)
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 TU &= \det |r'(u) \ r''(u) \ r'''(u)| \\
 &= r'_x(u)(r''_y(u)r'''_z(u) - r'''_y(u)r''_z(u)) \\
 &\quad - r''_x(u)(r'_y(u)r'''_z(u) - r'''_y(u)r'_z(u)) \\
 &\quad + r'''_x(u)(r'_y(u)r''_z(u) - r''_y(u)r'_z(u))
 \end{aligned} \tag{17}$$

위에서 정의된 식과 chain-rule을 이용하면 순정 척도의 기하학적 불변요소는 식 (18)에서 식 (24)과 같이 구해진다.

$$\kappa(u) = \frac{|r'(u) \times r''(u)|}{|r'(u)|^3} = KU^{1/2} KB^{-3/2} \tag{18}$$

$$\frac{d\kappa(u)}{du} = \frac{1}{2} KU^{-1/2} KU' KB^{-3/2} - \frac{3}{2} KU^{1/2} KB^{-5/2} KB' \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa' &= \frac{d\kappa(u)}{ds} = \frac{d\kappa(u)}{du} \frac{ds}{du} = \frac{\kappa'(u)}{|r'(u)|} = \frac{\kappa'(u)}{KB^{1/2}} \\
 &= \frac{1}{2} KU^{-1/2} KU' KB^{-2} - \frac{3}{2} KU^{1/2} KB^{-3} KB'
 \end{aligned} \tag{20}$$

Table 2. Geometric invariants and effects to be minimized during fairing procedures

기하학적 불변요소	최소화시 디자인곡선에 미치는 영향		
	R^2	R^3	설명
κ', ρ'	Smooths	Smooths	곡선의 곡률변화 최소화
$\kappa^2, \kappa^4, \kappa^6$	Straightens	Flattens	곡률의 크기를
τ^2		Flattens	3차원 곡선의 뒤틀림 최소화
ρ^2, ρ^4, ρ^6	Rounds	Rounds	곡률반경을 작게함

Table 3. Fairness metrics and effects to be minimized during fairing procedures

곡선순 파생정척도 곡선	순정 척도	R^3
1 χb	$\int_0^s \{\kappa^2 \tau^2 + (\kappa')^2\}^{1/2} ds$	Smooths Flattens
2 κn	$\int_0^s \{\kappa^2 \tau^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4\}^{1/2} ds$	Smooths Flattens
3 κ	$\int_0^s \{\kappa^2 \tau^2\}^{1/2} ds$	Flattens
4 $r+ \rho n$	$\int_0^s \{\rho^2 \tau^2 + (\rho')^2\}^{1/2} ds$	Smooths Rounds

$$\rho(u) = \frac{|r'(u)|^3}{|r'(u) \times r''(u)|} = KU^{-1/2}KB^{3/2} \quad (21)$$

$$\frac{d\rho(u)}{du} = -\frac{1}{2}KU^{-3/2}KU'KB^{3/2} + \frac{3}{2}KU^{-1/2}KB^{1/2}KB' \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{d\rho(u)}{ds} = \frac{d\rho(u)}{du} \cdot \frac{ds}{|r'(u)|} = \frac{\rho'(u)}{KB^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2}KU^{-3/2}KU'KB + \frac{3}{2}KU^{-1/2}KB' \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tau(u) = \frac{\det[R'(u) \ R''(u) \ R'''(u)]}{|R'(u) \times R''(u)|^2} = \frac{TU}{KU} \quad (24)$$

NURBS 곡선을 이산적으로 순정하는 알고리즘에서는, 순정을 수행하기 위하여 주어진 정보는 측정 점에 대한 정보밖에 없으므로 순정 평가 척도를 구성하는 요소들은 이산적으로 구하여야 한다^[23].

이산적인 곡률은 다음과 같이 구하여질 수 있다. 만일 N+1개의 점들로 구성된 점군이 있다면, 양 끝 점을 제외한 내부의 N-1개의 점들에 대해서 각각 이산적인 Frenet 프레임을 할당시킬 수가 있고, 이것을 매개변수의 변화에 따라 이동시킴으로 이산적인 Frenet-Serret 공식을 구하게 된다^[24]. 그리고 나면 이산적인 Frenet-Serret 공식의 계수를 이루고 있는 이산적 곡률과 이산적 토션을 구할 수가 있으며 각각의 구체적인 계산과정을 보면 다음과 같다.

이산적 곡률은 세 개의 점을 지나는 원을 정의하고 나서 그 원의 반지름에 대하여 역수를 취함으로써 구할 수가 있는데, 이것은 Fig. 1에 나타나 있다.

주어진 점군은 공간상의 임의의 점들이므로 이산적 곡률을 K_i 라고 하면, 이것은 언제나 양의 값을 가지게 되고 다음과 같이 구하여진다.

$$K_i = \frac{2\sin(\alpha_i)}{Q_i} \quad (25)$$

여기서,

$$Q_i = ||\vec{Q}||, \quad \vec{Q} = P_{i+1} - P_{i-1}$$

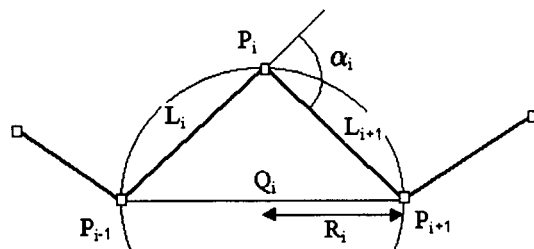


Fig. 1. Discrete curvature.

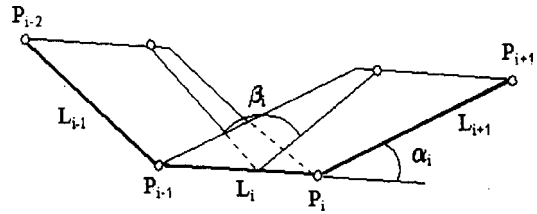


Fig. 2. Discrete torsion.

$$\cos(\alpha_i) = \frac{\vec{L}_i \cdot \vec{K}_{i+1}}{L_i L_{i+1}}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq \pi$$

다음으로 특정한 점 P_i 에서의 이산적 토션을 구하기 위하여는 기본적으로 다섯 개의 점을 필요로 한다. 결과적으로 이산적 토션 t_i 와 t_{i+1} 에 대해 선형 보간을 함으로써 구하게 되는데 t_i 는 식 (26)와 같이 구하여지며 Fig. 2에 이에 대한 내용이 나와 있다.

$$t_i = \frac{\bar{\Delta}_i}{V_{i-1}V_i} = \text{sign}(\bar{\Delta}_i) \frac{\sin(\beta_i)}{L_i} \quad (26)$$

여기서,

$$\cos(\beta_i) = \bar{N}_{i-1} \cdot \bar{N}_i, \quad 0 \leq \beta_i \leq \pi$$

$$\bar{N}_i = \frac{\vec{V}_i}{V_i}, \quad \vec{V}_i = \vec{L}_i \times \vec{L}_{i+1} \neq 0$$

$$V_i = ||\vec{V}_i||,$$

$$\bar{\Delta}_i = \det(\vec{L}_{i-1}, \vec{L}_i, \vec{L}_{i+1})$$

위에서 $\bar{\Delta}_i$ 는 네 점 $P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$ 간의 상대적인 위치관계를 계산해주며, $\text{sign}(\bar{\Delta}_i)$ 는 네 점을 지나는 곡선에 있어서 바이노말 벡터의 방향이 어느 쪽으로 변해나가는가를 나타내는 것으로 토션의 부호가 된다. 식 (26)에서 구한 t_i 와 t_{i+1} 을 가지고 식 (27)과 같이 선형 보간을 함으로써 점 P_i 에서의 이산적 토션을 구할 수 있게 된다.

$$T_i = \frac{L_i t_{i+1} + L_{i+1} t_i}{L_i + L_{i+1}} \quad (27)$$

그리고 t_i 와 t_{i+1} 에 대한 매개변수 값을 코드 길이 방법에 의해 $u_i L_{i/2}$ 와 $u_i + L_{i+1}/2$ 라고 설정하면 토션에 대한 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} T(u) &= t_i \\ &+ \frac{2}{L_i + L_{i+1}} (t_{i+1} - t_i) \left(u - u_i + \frac{L_i}{2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

또한 점 P_i 에서의 이산적 토션의 일차 미분 T'_i 는 다음과 같이 구해진다.

$$T_i = \dot{T}(u_i) = \frac{2}{L_i + L_{i+1}} (t_{i+1} - t_i) \quad (29)$$

마찬가지로 코드 길이 방법 매개변수화를 가정하고 이산적 곡률 K_{i+1} , K_i , K_{i+1} 과 2차 보간 방법을 사용하면 이산적 곡률 K_i 에 대한 미분 값을 다음과 같이 구해진다.

$$K'_i = K'(u_i) = \frac{1}{L_i + L_{i+1}} \times \left(L_i \frac{K_{i+1} - K_i}{L_{i+1}} + L_{i+1} \frac{K_i - K_{i-1}}{L_i} \right) \quad (30)$$

곡률 반경은 곡률의 역수를 취하므로 곡률 반경과 그의 1차 미분 값은 다음과 같이 전개된다.

$$\rho_i = \frac{1}{K_i} \quad (31)$$

$$\rho'_i = -\frac{K'_i}{K_i^2} \quad (32)$$

4. 곡선 순정 알고리즘

4.1 제약식이 있는 비선형 최적화 문제로의 적용

NURBS 곡선의 순정에 사용되는 제약식이 있는 비선형 최적화 문제는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{subject to } \begin{cases} c_i(x) = 0, & i = 1, \dots, k \\ c_i(x) \geq 0, & i = k+1, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 목적함수 $f(x)$ 와 제약식 $c_i(x)$ 는 비선형 함수이다. 제약식이 있는 비선형 최적화 문제인 식 (33)의 해를 구하기 위하여 반복적인 수리적 최적화 방법이 사용되어진다. 각각의 단계에서 최적화 방법은 목적함수와 제약식으로 구성된 단순화된 모델을 만들게 된다. 각 단계의 모델에서는 현재의 해가 새로운 점으로 이동됨으로써 해가 구하여지고 현재의 해는 새로운 해로 개선되어진다.

NURBS 곡선 순정 문제를 제약식이 있는 비선형 최적화 문제로 적용하기 위해서는 목적함수와 제약식이 결정되어야 한다. 본 연구에서는 3절에서 유도된 곡선 순정 척도들이 목적함수로, 설계자가 결정하게 되는 이동 가능한 측정점들과 이동 가능한

범위들이 제약식으로 사용되었다. 제약식이 있는 비선형 최적화 문제의 해를 구하는 알고리즘으로는 GAMS(the acronym stand for General Algebraic Modeling System) 코드가 사용되었다.

4.2 해석적 NURBS 곡선 순정

해석적 NURBS 곡선 순정에서는 측정점으로부터 모델링된 NURBS 곡선의 조정점을 이동시킴으로써 곡선의 순정을 행하게 된다. 조정점을 이동시키는 방법을 사용할 경우, 절점 벡터나 조정점들의 가중치를 변경시키는 것과는 달리 NURBS 곡선의 근본적인 모양이 변화된다. 이는 NURBS 곡선에서 조정점은 일정구간의 곡선을 조정점 방향으로 끌어당기는 것과 같은 역할을 하기 때문이다.

조정점 이동을 통한 해석적 NURBS 곡선 순정 알고리즘의 순서는 다음과 같다.

- step 1. 주어진 측정점을 지나는 NURBS 곡선 $r_0 = r_{p_0}$ 을 모델링한다.
- step 2. 곡선 순정 척도를 목적함수로, 주어진 측정점에서의 매개변수 값들과 대응되는 곡선 r_0 의 좌표들이 움직일 수 있는 범위를 제약식으로 놓고 비선형 최적화 문제에 적용, 해를 구한다.
- step 3. step 2에서 얻어진 새로운 조정점의 집합 P 를 이용하여, 순정 후의 NURBS 곡선 $r = r_{p,w,U}$ 를 모델링한다.

4.3 이산적 NURBS 곡선 순정

주어진 측정점의 변경을 통한 이산적 NURBS 곡선 순정 알고리즘에서는 지역적인(local) 순정 과정을 반복함으로써 결과적으로 전역적인(global) 순정 효과를 내게 되는 알고리즘을 사용하였다^[7]. 이는 한 번에 한 개의 측정점을 이동시키는 문제를 식 (33)의 비선형 최적화 문제에 적용시킴으로써 새로운 측정점을 구하게 되고, 이러한 과정을 자동적으로 반복하여 이동 가능한 모든 측정점에 적용시킴으로써 결국 측정점으로부터 모델링되는 NURBS 곡선을 순정하게 된다.

이산적 NURBS 곡선 순정에서는 하나의 측정점 위치에서의 순정 평가 척도 값을 나타내는 지역적 순정 함수와 모든 측정점에서의 지역적 순정 함수 값을 누적시켜 얻은 전역적 순정 함수가 사용된다^[23]. 이 때, 양 끝 두 점씩에 대한 지역적 함수 값은 이산적 곡률의 일차 미분 및 토션을 구하는 식의 특성상 계산할 수 없으므로 고정되어 있다고 가정한다. 본 연구에서

사용된 이산적 NURBS 곡선 순정 알고리즘의 순서는 다음과 같다.

- step 1. 초기 지역적 순정 함수 값과 전역적 순정함수 값을 계산한다.
- step 2. 지역적 순정 함수 값이 가장 큰 측정점을 선택한다.
- step 3. 선택된 측정점의 지역적 순정 함수를 목적함수로, 선택된 측정점이 이동할 수 있는 범위를 제약조건으로 하여 비선형 최적화 문제에 적용하고 새로운 측정점의 위치의 해를 구한다.
- step 4. 새로 구한 측정점 위치의 해를 이용하여 전역적 순정함수 값을 다시 계산한다.
- step 4-1. 전역적 순정 함수 값의 개선이 있으면, step 3에서 구한 해를 선택된 측정점의 새로운 위치로 채택하고 step 1로 돌아간다.
- step 4-2. 이동 가능한 측정점 중에서, 현재 선택한 측정점 다음으로 지역적 순정 함수 값이 큰 측정점이 있다면 이를 선택하고 step 3으로 돌아간다.
- step 4-3. 이동 가능한 측정점 중에서 더 이상 작은 지역적 순정 함수 값이 없다면 step 5로 간다.
- step 5. step 1-4를 통하여 얻어진 순정된 측정점을 지나는 NURBS 곡선을 모델링한다.

5. NURBS 곡선 순정의 수행 및 결과

5.1 NURBS 곡선 순정의 수행

본 절에서는 NURBS 곡선 순정 예를 통하여 두 가지 곡선 순정 알고리즘의 결과를 비교하였다. 곡선이 지나야 하는 측정점과 측정점 양끝에서의 접선 벡터가 입력 값으로 주어졌으며, 이를 이용하여 각 조정점의 가중치가 1인 3차 NURBS 곡선이 모델링되었다. 곡선 순정은 4절에서 제시된 두 개의 알고리즘을 통하여 수행되었으며, 양 끝 두 개씩의 측정점은 이산적인 곡률의 일차 미분과 토선을 구하는 식의 특성상 계산 불가능하므로 고정되어졌다. 곡선 순정 척도로는 3절에서 제시된 네 개의 순정 척도가 각각 사용되었으며, 이동 가능한 측정점들이 움직일 수 있는 범위는 주어진 측정점들의 거리차 중에서 최소 거리의 10%로 설정되었다.

5.2 곡선 순정 척도별 순정 결과 분석

예제 1은 13개의 측정점을 지나는 NURBS 곡선을 순정한 예제이다. Fig. 3, Fig. 6, Fig. 9는 예제 1에서 주어진 측정점들을 지나는 초기 NURBS 곡선이 곡

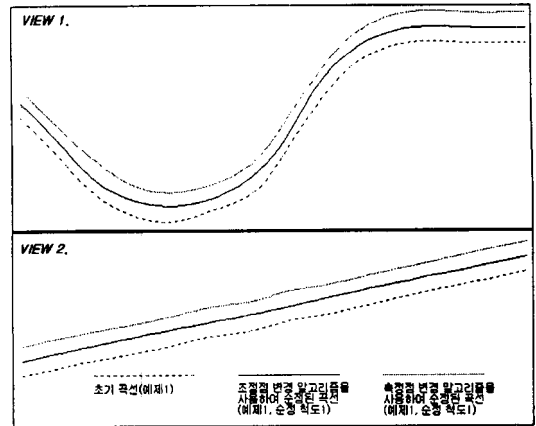


Fig. 3. Fairing results with fairness metric 1 (example 1).

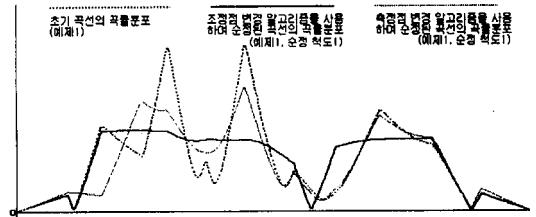


Fig. 4. Curvature graphs for fairing results with fairness metric 1 (example 1).

선 순정 척도 1, 2, 3을 각각 목적함수로 채택하여 해석적 및 이산적 순정을 행한 후에 어떻게 모양이 변화하는가를 보여주고 있다. VIEW 1과 VIEW 2는 3차원 곡선을 각기 다른 방향에서 본 모습이며 각각의 곡선은 식별의 편의성을 위하여 평행 이동되어 그려졌다.

Fig. 3에서 Fig. 5는 예제 1을 곡선 순정 척도 1을 사용하여 순정한 결과를 보여주고 있다. Table 3에서

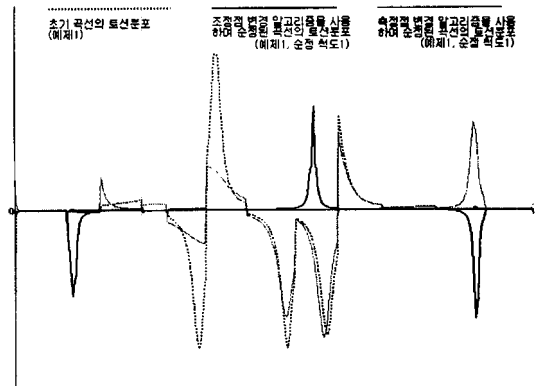


Fig. 5. Torsion graphs for fairing results with fairness metric 1 (example 1).

와 같이 Fig. 3의 VIEW 1에서 순정 후의 곡선은 초기 곡선의 아래쪽 굴곡 부분이 부드럽게 펴지는 Smooths 효과가 나타났음을 알 수 있다. 또한 VIEW 2에서 곡선은 하나의 평면상에 위치하도록 하는 Flattens 효과가 나타나는 방향으로 순정되었음을 알 수 있다.

이러한 곡선 순정의 결과는 곡선의 모양보다 곡률과 토션분포를 살펴봄으로써 더욱 자세히 알 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5는 순정 전과 순정 후의 곡선의 곡률과 토션분포를 보여주고 있다. Fig. 4에서 순정 후 곡선의 곡률은, 순정 척도 1을 구성하는 요소인 χ^2 과 $(\chi')^2$ 으로 인하여 곡률과 곡률의 변화량이 작은 쪽으로 곡선이 순정되었음을 알 수 있다. 또한 Fig. 5에서 순정 후 곡선의 토션 역시 t^2 의 영향으로 크기가 초기 곡선보다 작아졌음을 알 수 있다. 토션의 경우 양 끝과 중간 부분에서 곡선 순정 후 급격히 커짐을 알 수 있는데, 이는 곡선에서 변곡이 일어나는 부분으로 이때의 곡률은 0에 가까워지고 결국 토션의 값이 커지더라도 곡선 순정 척도를 구성하는 χ^2 t^2 은 0에 가까워지게 된다.

Fig. 6에서 Fig. 8은 예제 1을 곡선 순정 척도 2를 사용하여 순정한 결과를 보여주고 있다. 순정 결과

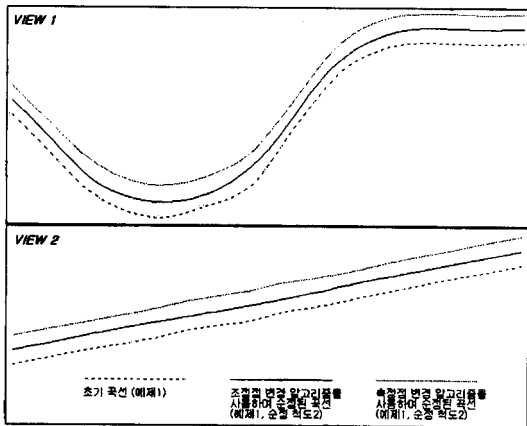


Fig. 6. Fairing results with fairness metric 2 (example 1).

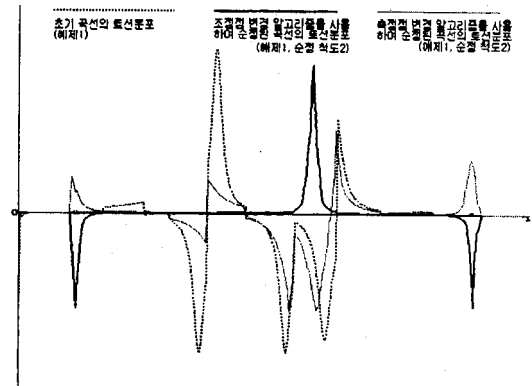


Fig. 8. Torsion graphs for fairing results with fairness metric 2 (example 1).

는 곡선 순정 척도 1을 사용하였을 때와 유사하게 나타났다. 곡률 분포의 경우에 순정 척도 2를 구성하는 χ^2 의 영향으로 곡률 변화량보다 곡률 자체의 크기가 줄어드는 방향으로 곡선이 순정되었으며, 토션은 순정 척도 안에서 영향력 감소로 인하여 Fig. 5와 비교하여 약간 커졌음을 알 수 있다.

Fig. 9에서 Fig. 11은 예제 1을 곡선 순정 척도 3을

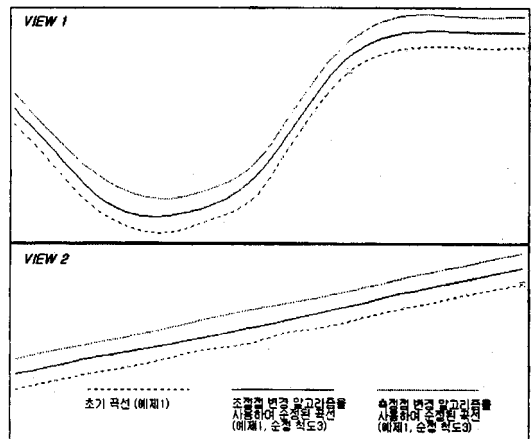


Fig. 9. Fairing results with fairness metric 3 (example 1).

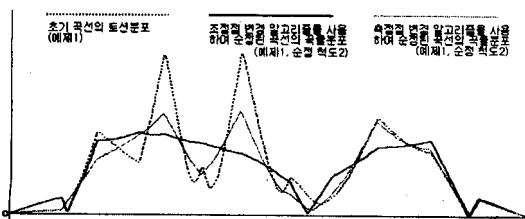


Fig. 7. Curvature graphs for fairing results with fairness metric 2 (example 1).

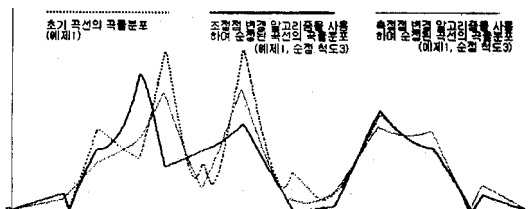


Fig. 10. Curvature graphs for fairing results with fairness metric 3 (example 1).

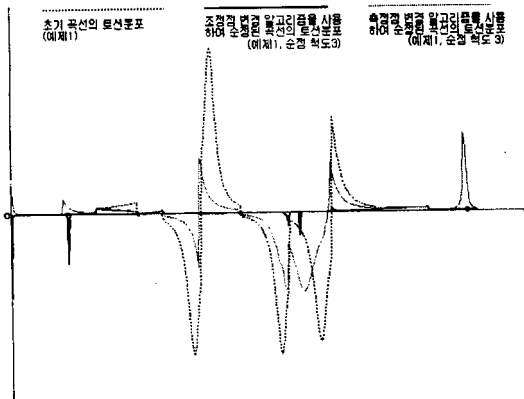


Fig. 11. Torsion graphs for fairing results with fairness metric 3 (example 1).

사용하여 순정한 결과를 보여주고 있다. Fig. 9의 VIEW 1에서 순정 후의 곡선은 초기 곡선의 굴곡 부분은 없어졌으나 Fig. 3, Fig. 6과는 다르게 원에 가까운 곡선보다는 부분적으로 직선이 포함되어 있는 듯한 곡선으로 순정되었다. 이는 곡선 순정 척도 안에 곡률의 미분이 포함되어 있지 않기 때문인데 Fig. 10과 Fig. 11의 곡률과 토션분포를 살펴보면 더 자세히 알 수 있다. Fig. 10의 곡률분포에서 알 수 있듯이 순정 후의 곡선은 곡률의 변화에 상관없이 곡률 자체의 크기가 감소하는 방향으로 변화하였음을 알 수 있다. 또한 토션분포는 Fig. 5와 Fig. 8과는 달리 곡선의 양끝과 중간 부분에서 크게 나타나지 않고 전체적인 크기를 줄이는 방향으로 순정되었음을 알 수 있는데, 이는 순정 척도 2와 3에서는 $\chi^2 r^2$ 의 형태로 곡선 순정시 토션이 영향을 미쳤으나 순정 척도 3에서는 r^2 단독으로 사용되었기 때문이다.

Fig. 12에서 Fig. 14는 예제 2를 곡선 순정 척도 4를 사용하여 순정한 결과를 보여주고 있다. 예제 2는 12개의 측정점과 양 끝점에서의 접선벡터가 입력 값으로 주어졌다. 곡선은 Fig. 12 VIEW 2의 오른쪽 부분에서 알 수 있듯이 급격하게 곡선의 모양이 변한 부분이 부드럽게 변하였다. 이 때 순정된 곡선의 곡률은 ρ^2 의 영향으로 초기 곡선의 곡률보다 커졌으며(ρ^2 의 영향으로) 곡률의 변화량은 작아졌다. 또한 토션은 $\rho^2 r^2$ 의 형태로 곡선 순정에 영향을 미쳐, 결국 토션이 0에 가깝게 되도록 곡선이 순정되었음을 알 수 있다.

5.3 곡선 순정 알고리즘간의 순정 결과 분석

곡선 순정 알고리즘간의 순정 효과 차이는 곡선의 모양 변화보다는 곡률과 토션분포를 살펴봄으로써

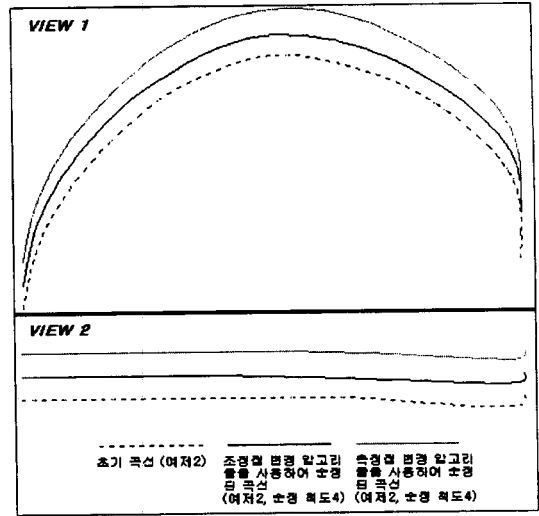


Fig. 12. Fairing results with fairness metric 4 (example 2).

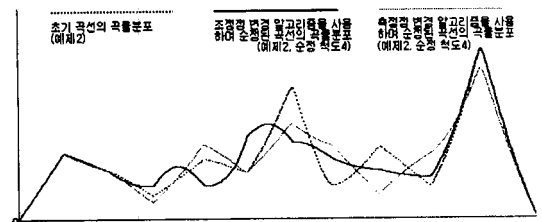


Fig. 13. Curvature graphs for fairing results with fairness metric 4 (example 2).

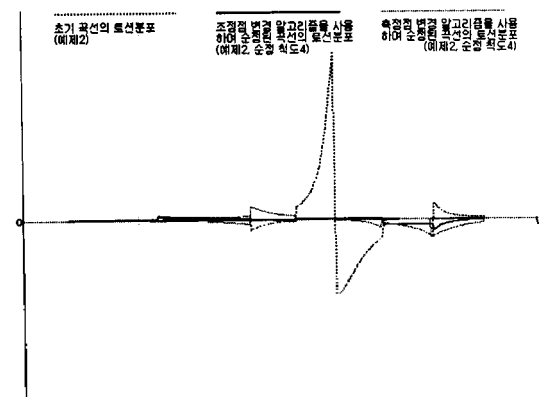


Fig. 14. Torsion graphs for fairing results with fairness metric 4 (example 2).

정확히 알 수 있었는데, 결과적으로 해석적 곡선 순정 알고리즘을 사용한 곡선 순정 결과가 이산적 곡선 순정 알고리즘을 사용한 것 보다 순정 효과가 더욱 크게 나타났다.

곡선 순정 알고리즘간의 곡선 순정 효과의 차이가

나타나는 이유는 해석적 NURBS 곡선 순정 알고리즘의 경우, 곡선 순정 척도를 최소화하기 위하여 곡선의 전체적인 모양을 변화시키는 전역적인 곡선 순정임에 비하여 측정점 이동을 통한 이산적 NURBS 곡선 순정 알고리즘은 지역적인 곡선 순정이기 때문이다. 또한 이산적 NURBS 곡선 순정 알고리즘의 경우 지역적인 곡선 순정의 반복을 통한 전역적인 곡선 순정 효과를 시도하였으나, 지역적인 곡선 순정의 최적해를 찾는 과정에서 전역적인 곡선 순정의 부분 최적해를 구하는 결과가 나타났다. 마지막으로 곡선 순정 척도를 구성하는 요소들의 식을 유도하는 과정에서 이산적 NURBS 곡선 순정 알고리즘의 경우, NURBS 곡선식이 순정 과정에 반영되지 못한 것도 순정 결과 차이의 원인으로 분석되었다.

6. 결 론

본 연구에서는 NURBS 곡선 순정 알고리즘에 대하여 알아보았다. NURBS 곡선 순정은 제약식이 있는 비선형 최적화 문제의 해를 구하는 알고리즘에 적용되었다. 이 때 목적함수는 파생곡선을 이용하여 다양하게 유도되었으며 제약식으로는 측정점 혹은 측정점에 대응되는 매개변수 값의 NURBS 곡선의 위치가 움직일 수 있는 범위에 제한을 두는 것이 사용되었다. 곡선 순정 알고리즘은 해석적 곡선 순정과 이산적 곡선 순정의 두가지로 제시되었으며, 두가지 알고리즘의 곡선 순정 결과는 순정 후 곡선의 모양 변화와 곡률과 토션 분포를 살펴봄으로써 곡선 순정 척도와 순정 알고리즘별로 분석되어졌다.

곡선 순정은 곡선 모델링시 측정점에 포함된 오차나 편향성을 제거하여 설계자가 원하는 곡선을 만들기 위하여 반드시 필요한 과정이다. 그러나 기존의 곡선 순정 방법은, 설계자가 곡선의 순정과정에 반복적으로 참여함으로써 매우 비효율적으로 이루어져 왔다. 본 연구에서는 자동적인 NURBS 곡선 순정을 행하는 두 개의 알고리즘을 제시하고, 제시된 알고리즘을 실제 예제를 통하여 곡선 순정에 적용, 분석함으로써 설계자가 이를 이용하여 자동적인 곡선 순정을 행할 수 있도록 하였다. 두 개의 곡선 순정 알고리즘 중, 해석적 NURBS 곡선 순정 알고리즘을 사용하였을 때 곡선의 순정 효과가 더 큰 것으로 나타났다. 그러나 실제 곡선의 모양만을 보았을 때에는, 이산적 NURBS 곡선 순정 알고리즘 역시 곡선 순정 효과가 비슷하게 나타남을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서 제시한 두가지의 NURBS 곡선 순정

알고리즘은 주어진 측정점의 수에 따른 계산량과 원하는 순정 결과 곡선의 품질을 고려하여 적절하게 선택되어 사용되어질 수 있을 것이다.

향후 연구 과제로는 본 연구의 곡선 순정 알고리즘을 확장하여 곡면 순정 알고리즘에 적용하는 것이다. 이를 위하여 곡면 순정 척도를 유도하는 방법과 순정 척도를 구성하는 곡면의 기하학적 불변요소를 유도하는 방법에 대한 연구가 선행되어 이루어져야 하며 순정 알고리즘 역시 곡선과는 달리 복잡한 형태로 나타나게 될 것이다.

참고문헌

1. Nowacki, H., Liu, D. and Lu, X., "Fairing Bezier Curves with Constraints", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, No. 1-4, pp. 43-55, 1990.
2. Nowacki, H. and Lu, X., "Fairing Composite Polynomial Curves with Constraints", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 11, No. 1, pp. 1-15, 1994.
3. Kaklis, P.D. and Sapidis, N.S., "Convexity-preserving Interpolatory Parametric Splines of Non-uniform Polynomial degree", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, No. 1, 1995.
4. Goodman, T.N.T., Ong, B.H. and Sampoli, M.L., "Automatic Interpolation by Fair, Shape-preserving, G^2 Space Curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 10, pp. 813-822, 1998.
5. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer, 1995.
6. Farin, G., Rein, G., Sapidis, N.S. and Worsely, A.J., "Fairing cubic B-spline Curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, No. 1-2, pp. 91-103, 1987.
7. Sapidis, N.S. and Farin, G., "Automatic Fairing Algorithm for B-spline Curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 22, No. 2, pp. 121-129, 1990.
8. Pigounakis, K.G. and Kaklis, P.D., "Convexity-preserving Fairing", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 12, pp. 981-994, 1996.
9. Piegl, L., "Modifying the shape of rational B-splines. Part 1:curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 21, No. 8, pp. 509-518, 1989.
10. Au, C.K. and Yeun, M.M.F., "Unified Approach to NURBS Curve Shape Modification", *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 2, pp. 85-94, 1995.
11. Rando, T. and Roulier, J.A., "Measures of Fairness for Curves and Surfaces", *Designing Fair Curves and Surfaces*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
12. Hohenberger, W. and Reuding, T., "Smoothing Rational B-spline Curves Using the Weights in an Op-

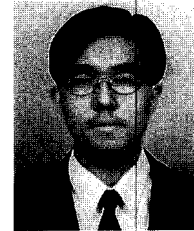
- timization Procedure", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, No. 8, pp. 837-848, 1995.
13. Hagen, H. and Schulze, G., "Automatic Smoothing with Geometric Surface Patches", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, No. 3, pp. 231-235, 1987.
 14. Hahmann, S. and Konz, S., "Knot-removal Surface Fairing Using Search Strategies", *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 2, pp. 131-138, 1998.
 15. Kaufmann, E. and Klass, R., "Smoothing Surfaces Using Reflection Lines for Families of Splines", *Computer-Aided Design*, Vol. 20, No. 6, pp. 341-346, 1988.
 16. Lott, N.J. and Pullin, D.I., "Method for fairing B-spline Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 20, No. 10, pp. 597-604, 1988.
 17. Ferguson, D.R., Frank, P.D. and Jones, A.K., "Surface Shape Control Using Constrained Optimization on the B-spline Representation", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, No. 2, pp. 87-103, 1988.
 18. Rando, T. and Roulier, J.A., "Designing Fair Parametric Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 23, No. 7, pp. 492-497, 1991.
 19. Liden, G. and Westberg, S.K.E., "Fairing of Surfaces with Optimization Techniques Using FANGA Curves as the Quality Criteria", *Computer-Aided Design*, Vol. 25, No. 7, pp. 411-420, 1993.
 20. Ishida, J., "The General B-spline Interpolation Method and its Application to the Modification of Curves and Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 29, No. 11, pp. 779-790, 1997.
 21. Guillet, S. and Leon, J.C., "Parametrically Deformed Free-form Surfaces as Part of a Variation Model", *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 8, pp. 621-630, 1998.
 22. Faux, I.D. and Pratt, M.J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood, 1979.
 23. Eck, M. and Jaspers, R., "Automatic Fairing of Point Sets", *Designing Fair Curves and Surfaces*, Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 45-60, 1994.

24. Sauer, R., *Differenzengometric*, Springer-Verlag, New York, 1970.



홍 충 성

1998년 홍익대학교 산업공학과 학사
 1998년~현재 홍익대학교 산업공학과 석사과정
 관심분야: Geometric Modeling, Computer Graphics, Concurrent Engineering



홍 석 용

1996년 홍익대학교 산업공학과 학사
 1998년 홍익대학교 산업공학과 석사
 1998년~현재 홍익대학교 산업공학과 박사과정
 관심분야: Geometric Modeling, Rapid Prototyping, Intelligent CAD



이 현 찬

1978년 서울대학교 산업공학과 학사
 1980년 한국과학기술원 산업공학과 석사
 1988년 The University of Michigan 산업공학과 박사
 1980년~1983년 세아제강 기획실
 1988년~1991년 전자통신연구원 자동설계연구실 실장
 1991년~현재 홍익대학교 정보산업공학과 부교수
 관심분야: Geometric Modeling, Computer Graphics, Engineering Database, Information Systems