

大韓造船學會論文集
 第 36 卷 第 3 號 1999 年 8 月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 36, No. 3, August 1998

흡인영역과 끌개의 해석을 통한 선박의 비선형 횡동요운동에 관한 연구

이희성*, 권순홍**

A Study on the Nonlinear Rolling Motion of Ship Using Basins of Attraction and Attractors

by

H. S. Lee*, S. H. Kwon**

요 약

비선형 동역학계의 불규칙한 운동은 그 계가 가지는 고유한 특성에 의해 생기는 현상이므로 때로는 예측할 수 없는 큰 운동이 발생한다. 해상 운행중인 선박의 경우 이러한 예측치 못한 큰 운동으로 인해 전복이 일어나기도 하므로, 비선형 선박 운동은 안전성 확보라는 관점에서 중요하게 다루어져야 한다.

본 연구에서는, 첫째로 임의의 구간 안에 있는 모든 초기 조건에 대해 선박 운동의 안정성을 파악하여 안정과 불안정으로 영역 구분을 시켜 주는 흡인 영역(basins of attraction)을 외력 변화에 따라 그려 봄으로써 선박 운동에 대한 안정 영역의 정성적인 변화 과정을 파악하고자 하였다. 둘째로 전복이 일어나지 않는 안정 영역상을 초기 조건으로 한 선박 운동이 최종적으로 어떤 운동이 되는지 알아 보았다. 마지막으로 외력 변화에 따른 비선형 선박 운동 중 혼돈적 현상이 일어나는 운동에 대해서는 이를 상세히 분석하고자 과도상태가 지난 운동의 주기적 변화를 외력 변화에 따라 살펴보는 분기도(bifurcation diagram)를 이용하여 연구해 보았다.

Abstract

Irregular motions of nonlinear dynamic system are the result of an intrinsic characteristics that the system have, and sometimes occur unpredictable large

발 표 : 1997년도 대한조선학회 추계연구발표회('97. 11. 14)

접수일자 : 1999년 4월 20일, 재접수일자 : 1999년 6월 23일

* 부산대학교 대학원 조선공학과 박사과정

** 정회원, 부산대학교 공과대학 조선·해양공학과, 기계기술연구소 연구원

motion. For a ship in a regular seaway, the capsizing occur because of this unexpectable motion. So, from the safety's point of view, nonlinear ship motions should be treated carefully.

In this study, stable and unstable regions are investigated firstly under the variation of a control external force. Secondly, we consider the attractors to know how ship motions of the stable region that does not undergo capsizing changed. Thirdly, bifurcation diagram is considered to study the range in detail where nonlinear chaotic motions are occurred.

1. 서 론

비선형 선박 운동에 대한 연구는 근래에 들어 그 중요성이 인식되면서 활발히 연구가 진행되는 분야이다. 이 연구에서는 비선형항을 아예 고려치 않거나 아주 작은 값이라고 가정하여 무시하던 종래의 계산에서 벗어나 비선형항이 포함된 원래의 식 그대로를 계산하고 그 결과를 봄으로써 계수 변화에 따른 운동의 진행이 어떻게 변화하는가를 관찰하게 된다. 이러한 비선형 동역학계는 선형계와는 매우 다른 여러 특징을 가지고 있다. 이 중 계수 구간의 변화에 따른 운동 형태의 급격한 변화는 선박의 안전성이란 문제에 있어 관심의 대상이 되어왔다 [1][2][3].

본 논문에서는 복원력항이 횡동요변위에 대해 3차나 5차까지로 구성된 비선형 방정식을 이용하여 선박 운동 중 전복이 가장 쉽게 발생하는 횡동요운동을 관찰하였다. 먼저 여러 초기 조건에 대한 운동 결과를 관찰할 수 있는 흡인 영역을 조사함으로써 과도 상태를 지난 선박의 안정성 여부를 알고자 하였다. 그리고 초기 조건의 변화에 대한 전복 여부를 분석함으로써 운동의 안정성을 판단해 보는 쉬운 자료를 만들고자 하였다. 다음으로 흡인 영역을 통해 안정된 초기조건이라 밝혀진 값들이 최종적으로는 어떤 운동으로 수렴하는지도 알아보하고자 하였다. 그리하여 주기적 운동뿐만 아니라 불규칙하고 예측 불가능한 운동 결과도 파악함으로써 비선형 운동의 특성을 살펴보았다. 마지막으로 혼돈 운동을 보이는 동역학계에 대해서는 분기도를 그려서 계의 운동 특성을 연구해 보았다.

2. 운동 방정식

2.1 단순형태의 전복방정식

이 방정식은 복원 모멘트에 대한 표현을 횡동요변위에 대한 비선형 3차항으로 나타내어 가장 간단하게 전복을 표현할 수 있게 한 횡동요에 대한 운동 방정식으로 그 형태는 다음과 같다 [4].

$$(I+J)\frac{d^2\phi}{dt^2} + N\frac{d\phi}{dt} + \Delta GM\phi[1 - (\frac{\phi}{\phi_c})^2] = M_0 + M\cos(\omega t + \delta) \quad (1)$$

여기서 ϕ 는 횡동요운동 변위, ϕ_c 는 복원력 소실각, I는 횡동요에 대한 고유질량 모멘트, J는 횡동요에 대한 부가질량 모멘트, N는 감쇠 계수, Δ 는 배수량, GM은 경심(metacenter)높이, M_0 는 평형경사(steady heel) 모멘트, M은 외력에 대한 횡동요모멘트의 크기, ω 는 파랑 주파수, t는 시간, δ 는 외력에 대한 모멘트의 위상각이다.

다음식을 이용하여 변수 변환을 하고,

$$\psi = \frac{\phi}{\phi_c}, \quad s = \omega_0 t \quad (2)$$

$\omega_0 = (\Delta \cdot GM/I)^{1/2}$ 는 고유횡동요 진동수임을 이용하여 운동 방정식을 바꾸면,

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + K\frac{d\psi}{ds} + \psi - \psi^3 = B_0 + B\cos(\Omega s + \delta) \quad (3)$$

위 식에서 $K=N/I\omega_0$ 이고, $B_0=M_0/I\omega_0^2 \phi_c$, $B=M/I\omega_0^2 \phi_c$, 그리고 $\Omega=\omega/\omega_0$ 가 된다. 위의 운동 방정식에서, 복원력항의 GZ 곡선은 전형적

으로 비선형 현상을 잘 표현해 주는 형태이다 [5][6]. 이 운동방정식의 계수들은 M. Kan의 논문에 따라 B_0 와 δ 는 $B_0 = \delta = 0$ 로 두고, Ω 와 K 는 각각 $\Omega = 0.905$, $K = 0.04455$ 로 둔다 [4]

2.2 Mathieu 형태의 전복방정식
선박이 준규칙적인 파중을 항해할 경우, 복원모멘트를 나타내는 GZ는 규칙적으로 변하게 된다. 즉, 임의의 횡동요 변위에 대한 GZ의 값이 주기적으로 그 크기가 변화하게 된다는 것이다. 그러므로 횡동요운동에 대한 방정식은 다음과 같은 가진 Mathieu 방정식으로 표현되어야 한다 [7]

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + K \frac{d\psi}{ds} + (1 - e \sin \Omega s)(\psi - \psi^3) = B \cos \Omega s \quad (4)$$

GZ의 변화가 조금 다른 방정식의 형태를 보면,

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + K \frac{d\psi}{ds} + (1 - e \sin \Omega s)\psi - \psi^3 = B \cos \Omega s \quad (5)$$

일반적으로 첫번째 식 (4)는 복원력 소실각이 고정된 상태에서 GZ의 값이 주기적으로 변화하는 형태로, N 형태의 Mathieu 전복 방정식이라 한다. 두번째 식 (5)는 복원력 소실각과 GZ의 크기가 동시에 주기적으로 변화하는 형태로, L 형태의 Mathieu 전복 방정식이라 한다. 좀더 일반적인 표현을 하면 임의의 위상각과 외력 등을 포함시킬 수 있지만 본 논문에서는 위의 형태 중 식 (4)만을 일단 다루기로 하며, 여기서는 $\Omega = 0.905$, $e = 0.2$, 그리고 $K = 0.04455$ 를 택하였다 [4].

2.3 Loll 형태의 전복방정식

선박이 손상을 입어서 물이 안으로 들어오거나 파도 등으로 인해 갑판 위로 물이 올라왔을 때 중중음의 GZ값을 가지게 된다. 이러한 경우 작은 횡동요변위에 대해서는 음의 GZ값을 가지나 변위가 커짐에 따라 양의 GZ값으로 변화를 가지고, 여기서부터는 일반적인 GZ 곡선의 형태를 이루게 되어 복원력 소실각까지 이르게 된다. 이 때에는 바

로 떠 있을 수 없고 약간의 횡경사각을 가지면 안정한 상태가 된다. 이를 선박의 횡동요운동 방정식으로 표현해 보면 [11],

$$(I+J) \frac{d^2\phi}{dt^2} + N \frac{d\phi}{dt} + \Delta GM\phi [1 - (\frac{\phi}{\phi_0})^2] [1 - (\frac{\phi}{\phi_c})^2] = M \cos \omega t \quad (6)$$

여기서 ϕ_0 는 초기 음의 GZ값을 가지는 최대 각이다.

변수 변환을 하게 되면,

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + K \frac{d\psi}{ds} - \psi(1 - \psi^2)(1 - r^2\psi^2) = B \cos \Omega s \quad (7)$$

여기서 $r = \phi_v / \phi_0$ 를 의미한다. 그리고 위 식(7)을 Loll 형태의 전복방정식이라 부른다. 위의 방정식에 대한 계수값은 $\Omega = 1.20$, $r = 3.00$, 그리고 $K = 0.04455$ 를 택하였다 [4].

3. 운동해석법

3.1 위상공간(Phase Space)

동역학계의 위상 공간이란 계의 순간 상태를 명확히 나타낼 수 있는 변수들로 각 축이 구성된 수학적 공간을 말한다 [8]. 일반적인 운동계에서는 변위와 속도로 각 축이 이루어진 위상 평면(phase plane)으로 운동 특성을 파악한다. 이 위상 평면은 시간 변화에 따라 변위와 속도가 변화하게 되는데 이러한 그림을 위상 평면도(phase plane diagram)라 하고, 그림상에서 이 둘의 변화로 인해 이루어는 궤도를 위상 궤적(phase trajectory)이라 한다 [8][9].

위상 궤적은 중요한 두 가지 성질을 가지는데, 첫째는 비슷한 에너지를 가지는 두 궤적은 서로에게 아주 가까이 위치하여 지나가나 두 궤적은 서로 교차하지는 않는다는 것이다 [8]. 이 교차하지 않는다는 성질은 결정론적인 동역학 계에서 그 과거와 미래의 상태가, 주어진 임의의 시간에 대해 계의 상태에 의해 유일하게 정해진다는 사실로부터 유도된 것이다. 만약 시간 t 에서 궤적의 교

차가 일어난다면 과거와 미래의 상태에 모호성이 생기게 되고 그로 인해 이 계는 결정론적인 상태가 될 수 없다. 즉, 궤적의 교차로 인해 그 다음 상태가 어느 궤적을 따라야 할지, 그 전에는 어느 궤적을 따르고 있었는지 알 수 없게 된다는 것이다. 이러한 비결정론성은 궤적의 유일성이라는 가정에 위배된다.

둘째는 에너지 보존 법칙이 성립되는 위상 공간의 면적이 유지된다는 것이다 [8]. 이는 임의의 어느 시간에 대한 위상 공간의 주어진 면적에서 찾아진 모든 점들은 시간이 지난 후에도 동일한 크기의 면적에서 찾아진다는 것이다. 즉, 면적의 유지가 곧 에너지 보존을 의미한다.

이러한 위상 공간과 위상 궤적은 혼돈 해석에서 근의 움직임과 전반적인 특성을 파악하는데 가장 중요하고 널리 쓰이는 방법이 된다.

3.2 Poincaré 단면(Poincaré Section)

운동의 안정성 여부뿐만 아니라 운동 특성을 간단히 파악할 수 있는 방법으로 Poincaré 단면이 있다 [8]. 이는 복잡한 계들의 위상 공간도를 단순화하고 간략화 시키는 도구로써, 위상 공간도의 주기적인 상태 변화만을 표시하여 그 계의 운동 성질을 전체적으로 관측하는 방법이다. 이러한 Poincaré 단면상에 만약 하나의 점만 나타난다면 이는 이 계의 운동이 주기적이라는 것을 알게 해 준다. 또한 점이 많아져서 선이나 단순한 일정 형태를 띄게 된다면 준주기적인 운동을 하고 있음을 알 수 있게 해 준다. 하지만 그 형태가 아주 복잡해지기 시작하면 이는 예측이 어려운 혼돈스런 운동을 하고 있다고 보아야 한다.

주기적 가진을 일으키는 항이 있는 동역학계에 대해 Poincaré 단면은 동역학 운동이 띄는 중요한 형상을 내포하고서 위상 공간을 단순하게 표현한다. 그러므로 이 단면을 컴퓨터 계산에 의해 방대한 양으로 구성한다면 단면상에 나타난 점들의 분포는 혼돈 현상을 연구하는데 있어 이상적인 수단이 될 것이다.

3.3 흡인영역(Basins of Attraction)

일반적인 감쇠계의 위상 공간도를 보면, 안정된

위상 궤적의 경우 임계점(critical point)을 향하여 움직이고, 불안정한 위상 궤적의 경우는 이 점에서 멀어지는 방향으로 움직임을 볼 수 있다. 그리고 이러한 임계점을 새들점(saddle point)이라 한다. 만약 새들점이 한 위상도(phase diagram)에 여러 개가 존재한다면 각각의 새들점 사이에는 안정과 불안정 궤적 곡선으로 나누어진 위상 공간상의 한 부분이 생기게 되는데, 이를 영역(basin)이라 부른다 [8]. 그리고 이 같은 영역을 나누는 곡선을 분리면(separatrix)이라 부른다. 이렇게 나누어진 영역 안의 모든 점들은 이 점들을 초기치로 운동을 하게 되면 그 점들이 위치한 공간상에서 수렴하는 운동을 하게 된다.

하지만 어떤 계에서는 그 계의 고유 특성상 아무리 시간이 흘러도 수렴하지 못하고 임의의 불규칙한 운동을 계속 하거나 발산하는 경우가 생기는데, 이것 또한 결정론적 계에서 생길 수 있는 현상이며 결코 계산상의 오차가 아님을 인식해야 한다. 그리고 이러한 현상의 세밀한 연구가 운동의 안정성 여부를 판가름하는데 있어 절실히 필요하다.

3.4 끌개(Attractor)

끌개란 위상 공간의 한 영역으로서 어떤 계에 자석처럼 끌어당기는 효과를 나타내서 그 계를 일정 영역으로 끌어들이는 것처럼 나타난다. 다시 말해, 마찰과 같은 에너지 손실을 수반하는 일반적인 계에서 우리가 정상적으로 안정된 상태에서 장시간 관측을 계속할 수 있는 상태이다. 이 개념을 부연해서 설명하고자 가운데가 움푹 패인 형태의 지형을 도입해 보면, 초기에 이 지형에서 한 물체가 초기에 얼마나 빨리, 얼마나 높이 있었느냐에 관계없이 결국은 밑바닥으로 떨어지게 된다는 것으로 설명할 수 있다 [10]. 여기서 물체가 초기에 위치하게 되는 영역은 크게 끌개 쪽으로 수렴하는 영역과 시간에 따라 더욱더 발산하는 영역으로 나눌 수 있다. 그리고 끌개에 끌어 당겨지는 상태의 집합은 그 끌개의 영역이 된다. 또한 초기 상태에서 끌개에 이르기까지의 중간의 상태를 과도 상태라 부른다.

끌개에는 여러 가지 종류가 있는데, 혼돈 이론의 연구가 활발하게 이루어지기 이전에는 평형점, 한계 순환(limit cycle), 토러스(torus)라는 3가지 끌개만이 알려져 있었다 [9].

어떤 계가 나타내는 끌개를 알고 싶은 때에는 그 계의 상태 변수의 값(계의 시시 각각의 상태를 나타내는 숫자의 조합)을 평면 또는 입체, 일반적으로는 다차원 다양체(수학적 용어로는 상태 공간이라고 한다)상에 표시하고 작업을 하면 된다. 그렇게 하면, 과도 상태 경과 후 시스템의 정상 상태를 나타내는 점의 움직임이 계의 끌개의 궤적을 그려서 그 궤적의 형태나 시간 파형을 보는 것만으로는 알아보기 힘든 시스템 행동의 전체적인 기하학적 특징과 규칙성을 분명히 보여준다.

평형점이란 구체적으로는 마찰이 있는 진자의 운동 등이 이 끌개에 해당한다. 다시 말해서 처음에 어떤 초기 상태에서 출발하더라도 최종적으로 정지 상태로 귀결되어 일정한 값을 유지하게 되는 계가 이 끌개에 해당한다. 그리고 이러한 의미에서 최종적으로 어느 한 점으로 수렴하는 형태를 점끌개라 부른다.

한계 순환이란 전기 에너지나 기계 에너지의 공급을 받아 멈추지 않고 일정한 주기의 추시계나 수정시계의 움직임 등이 이 끌개를 묘사한다. 다시 말해서 완전히 같은 주기 운동의 반복을 계속하는 계가 이 끌개를 그리는 것이다. 이 끌개는 궤적이 닫혀진 1차원 사이클(폐곡선)상에 수렴하기 때문에 한계 순환 또는 주기 끌개라 불린다.

토러스(준주기 끌개)는 마치 가운데가 비어 있는 도넛스 같은 모습을 한 끌개인데, 두 개의 한계 순환이 각기 독립성을 유지한 상태에서 운동을 계속했을 때 이 끌개를 그린다. 구체적인 예로는 두 개의 주파수가 공존하는 준주기 운동을 들 수 있는데, 이 두 개의 주파수는 도넛스의 긴 축에서 크게 회전하는 낮은 쪽의 주파수와 도넛스 단면을 도는 높은 쪽의 주파수이다. 준주기 진동의 경우, 그 해의 궤도는 이 도넛스의 표면 위를 휘감듯 회전하는데 그때 아주 조금씩 궤도가 어긋나기 때문에 두번 다시 같은 곳으로 돌아오지 않고 회전을 계속한다. 그리고 그 궤적은 최종적으로

로 토러스 표면 전체를 덮게 된다.

여기서 혼돈 이론이 널리 알려지게 되자 끌개의 종류에는 혼돈 현상을 나타내는 기묘한 끌개(strange attractor)라 불리는 종류가 새로이 추가되었다. 이것은 평형점도 한계 순환도 토러스도 아닌 초기값에 예민하게 의존하는 혼돈 현상이 그려내는 기묘한 형태를 지닌 끌개로서, 기존의 끌개와는 그 형태가 전혀 다른 생소한 모습일 뿐 아니라 초기값에 대해 예민한 의존성을 보이는 불안정성을 내포한 끌개라는 점에서 기묘한 끌개라 불린다 [10].

혼돈 현상은 매우 복잡한 행동을 하는 현상이지만, 전혀 터무니없는 행동을 보이는 것이 아니어서 어떤 결정론적 법칙에 따라 빈틈없는 행동을 나타낸다. 그 법칙성이 묘사해 내는 미세한 질서 구조가 기묘한 끌개인 것이다. 이러한 기묘한 끌개는 어떤 복잡한 행동을 나타내는 계가 있을 경우 그것이 혼돈 현상인지의 여부를 판단하기 위해 복잡성 안에 숨어있는 법칙성의 유무를 조사할 때 중요한 개념으로 이용된다[9].

3.5 분기도(Bifurcation Diagram)

동역학적 운동은 어떤 임의의 변수(parameter) 영역 안에서 그 변수의 변화에 따라 근의 움직임을 전체적으로 볼 필요성이 있으며, 이를 통해 주기적 운동과 혼돈적 운동간의 비교를 동시에 할 수 있다. 분기도란 계수 변화에 따른 Poincaré 단면의 형태 변화를 한번에 알 수 있도록 만들어 놓은 것이다. 이러한 분기도는 동역학 운동의 주요한 형태를 전체적으로 나타내고 있으며, 그러므로 운동의 전체적인 특성 파악시에 유용한 방법으로 쓰인다. 여기서 분기란 변수(parameter)가 변화함에 따라 그 변수로써 구성된 미분방정식에서 나오는 해의 갯수가 변하는 것을 말한다 [8].

비선형 동역학과 이 분기를 계산해 보면 전형적인 비선형 동역학계의 움직임 상에서 질적인 변화가 일어나는 묘사를 표현할 수 있다. 분기를 구분하는 주요한 개념은 연속과 불연속 사이의 구분, 그리고 국부적 분기와 전체적 분기의 차이이다.

위상 공간상에서 행하는 기하학적 분석은 이러한 개념을 정확하게 만드는데 중요한 의미를 제공한다.

어떤 동역학계는 정확히 분기는 아니지만 분기인 것 같은 움직임으로 갑작스런 변화가 일어남을 주의해야 한다. 이러한 걸보기 분기는 위상 궤적이 변수(parameter)에 연속적으로 의존하나 조종된 값의 극히 좁은 영역 상에서 아주 급히 변할 때 일어난다. 이러한 현상은 최근에 연구되어 졌고, 커널드(canards)로 불린다 [9].

가진 되는 동역학계의 국부적 분기는 위상 공간 상에서 한 점 근처에 특징지어질 수 있는 위상 궤적상의 질적 변화이다. 접힘(fold)과 쇠스랑(pitchfork) 같은 평형점 분기들은 명백히 포함되게 된다. Poincaré 사상이라는 방법으로써, 주기적 접힘(fold)과 플립(flip) 같은 한계 순환의 분기도 또한 Poincaré 단면상에서 한 점 근처에서 특징지어 진다. 그래서 이들 역시 국부적 분기로 고려될 수 있다.

혼돈 현상이 일어나는 영역 상에 주기적인 근의 움직임이 보이는 구간이 생기기도 하는데 이를 주기적 창(periodic windows)이라 한다. 이 주기적 창의 안에서는 주기적 궤도가 생기고 이들은 다시 분기가 되기도 하는데 이러한 일련의 근계적 운동이 모두 분기도에서만 관측되는 특징이다[8].

3.6 주기배가(Period Doubling)

분기도에서 볼 수 있는 중요한 형상 중 하나는 주기배가의 연속적 발생을 통한 혼돈으로의 변화이다. 이러한 주기배가가 일어나는 분기를 쇠스랑 분기(pitchfork bifurcation)라 부르는데 그 이유는 이러한 현상이 일어나는 분기도의 일부분이 쇠스랑과 비슷하기 때문이다.

주기배가 메카니즘은 많은 일반 동역학계에서 널리 연구된 혼돈에 이르는 하나의 경로(route)이다. 이러한 경로가 특별히 관심을 끄는 이유는 이것이 지도의 고유한 성질과는 무관하게 일정수로 발생 간격간의 관계를 특정 지을 수 있기 때문이다. 이 일정수가 바로 Feigenbaum 수(Feigenbaum number)라 부르는 보편적

(universal) 상수이다. 만약 첫번째 분기가 μ_1 에서 일어난다면, 두번째는 μ_2 에서 일어난다고 보아서 결국은 보편적 상수가 다음과 같이 정의 내려지게 된다 [5]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = \delta = 4.6692016091029909 \dots \quad (8)$$

이 수는 분기도를 엄밀히 관찰함으로써 확인할 수 있다. 추가로 처음 몇 개의 값만을 고른 분기도를 이용한 수열 μ_k 를 만드는 데도 이 수가 이용될 수 있다.

Feigenbaum 수는 혼돈상에서 주기배가 현상(route)이 가지는 보편적인 성질이다 [5]. 여기서 보편성(universality)이란 비선형 지도의 어떠한 특성이 그 지도만의 특별한 형상이나 형태에 독립적이라는 것을 의미한다. 이러한 보편성의 파악으로 혼돈 그 자체의 특성을 파악하고자 한다.

3.7 Melnikov 분석(Melnikov Analysis)

Melnikov법은 안정한 다양체(manifolds) W_s 와 불안정한 다양체 W_u 사이에 접촉이 일어나기 시작하는 계수값을 찾아내는데 쓰인다 [9][12]. 여기서 Melnikov 함수(Melnikov function)는 안정과 불안정 다양체들 사이의 거리가 가까울 때 이 거리를 측정하고자 이용된다. 만약 다양체들간의 교차점이 생긴다면 이는 혼돈적 동역학이 생기는 충분한 조건이 된다. Melnikov 함수로 찾아진 계수값보다 더 큰 값으로 가면 다양체는 교차가 일어나고 이로 인해 transverse homoclinic 또는 heteroclinic 점이 존재하게 된다. 여기서, 다양체란 Poincare 지도에서 디지털한 점들이 이루는 곡선으로써 [12][13], 가진 감쇠 운동시 힘이 증가되면 불안정해지고 이 불안정한 두 다양체는 위에서도 언급하듯 교차가 생긴다.

이제 Melnikov법에 의해 나오게 되는 안정과 불안정 영역의 경계값을 계산하면, 다음과 같이 구할 수 있다 [13][14].

$$B_M = \frac{2ks \sin h(\pi \Omega / \sqrt{2})}{3\pi \Omega} \quad (9)$$

위 식은 Kan의 논문에서 발취한 단순 형태의 전복 방정식에 대한 것으로, 이 식을 이용하여 안

정에서 불안정으로 변하는 위상 평면의 특성을 파악해 보기로 한다.

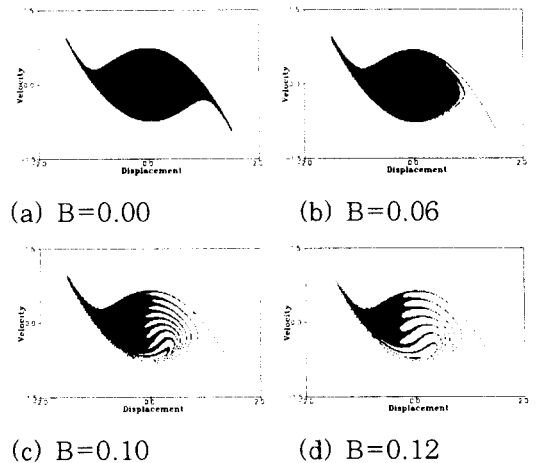
4. 운동해석 결과

본 논문에서는 초기치 변화에 따른 선박 횡동요 운동의 안정성 판별을 하고자 횡동요각과 횡동요 속도가 -1.5에서 1.5사이에 있는 모든 초기치에서 운동의 전복 여부를 계산하였다. 전복을 조사해 보는 모델로는 앞에서 제시한 2계 미분방정식 형태의 복원력항이 서로 다른 3가지 운동방정식을 이용하였으며, 각각은 Runge-kutta 방법 (Runge-Kutta Method)을 사용하여 수치계산하였다. 계산 결과를 나타낸 그림들은 횡동요각과 횡동요속도의 범위를 -1.5에서 1.5까지로 하여 각각 150등분한, 총 22500개의 초기치에서 계산된 형태로 구성되었다. 그리고 계산 수행 시간은 2000초까지로 하여, 이 시간 안에 횡동요각이 -1.5와 1.5 사이를 벗어나면 선박이 전복된 것으로 간주하여 흰색으로, 위의 범위를 벗어나지 않고 계속 운동을 하고 있으면 선박이 전복되지 않은 것으로 간주하여 검은색으로 영역표시가 되도록 하였다. 본 논문에서는 2000초이면 충분히 과도 상태를 지나 운동의 특성을 나타내는 시간으로 보았다.

먼저 단순 형태의 전복방정식에 대한 결과인 Fig. 1을 살펴보면, (a)의 경우 분리면으로 구분된 영역 안쪽은 안정을, 바깥쪽은 불안정을 나타낸다. 하지만 외력이 생기고 이의 크기가 커짐에 따라 이러한 구분은 깨어지기 시작한다. (b)에서 보여주듯이 분리면 안쪽도 불안정 영역이 생기기 시작하여 (c)에서 (j)로 외력이 더욱 커짐에 따라 불안정 영역은 계속적인 증가를 하게 된다. 그리고 이러한 증가에는 일정한 선형적인 관계를 찾을 수 없다. 즉, 횡동요각이나 횡동요 속도가 큰 분리면 근처부터 안쪽으로 안정 영역이 줄어들거나 어느 특정한 방향에서부터 안정영역이 줄어들지는 않는다는 것이다. Fig. 1의 그림들을 통해서 보여주듯이 침식이 되듯 날카롭게 깎여져 가는 모습은 불규칙 영역의 증가가 예측 불가능함을 알 수 있

게 해준다. 다음으로 외력이 큰 경우의 안정과 불안정 영역을 자세히 보면 그 경계가 아주 모호함을 발견할 수 있다. 그래서 두 영역의 경계가 언뜻 보기에는 확실해 보이는 부분이라도 이를 확대해 보면 다시 영역 구분이 모호해짐을 알 수 있다. 이러한 사실은 Fig. 2를 통해서 확인할 수 있다. Fig. 2의 (a)는 Fig. 1의 (e)에 한 경계부분을 확대한 것이고 Fig. 2의 (b)는 Fig. 2의 (a)에 한 경계부분을 확대한 것이다. 이처럼 외력이 큰 경우 영역간의 경계 근처에서는 프락탈 구조를 형성하여 아무리 근접한 초기치라 할지라도 안정이나 불안정에 대해 확실히 단정할 수 없음을 알 수 있다. 그리고 프락탈 구조로 변하기 시작하는 외력의 크기는 Melnikov 분석을 통하여 얻어질 수 있다.

다음으로 Fig. 3의 Mathieu 형태에 대한 전복방정식을 보면, 단순 형태의 전복방정식과 비슷한 침식 진행과 변화 과정을 거치는 것 같아 보인다. 하지만 안정 영역이 불안정 영역에 의해 침식되는 형태는 다르게 진행되고 있음을 알 수 있다. 다시 말해, 전자의 경우는 침식이 층을 형성하듯 진행되는 반면, 후자의 경우는 굽은 가지 형태로 침식이 진행되어짐을 보게 된다. 하지만 침식이 예측 불가능하고 안정과 불안정 영역의 경계부에서는 아무리 근접한 초기치라도 그 영역이 속한 위치가 어디인지를 단정할 수 없다는 것은 전자와 동일함을 Fig. 3의 관측을 통해 알 수 있다.



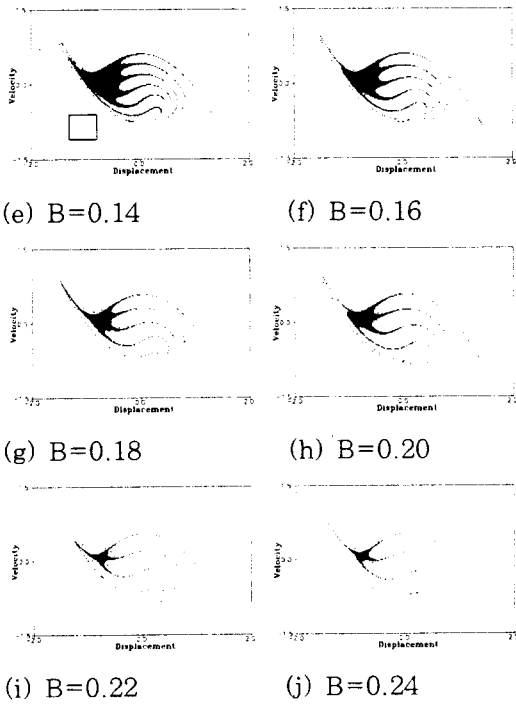


Fig. 1 Basin of Attraction of Simple Caps Equation

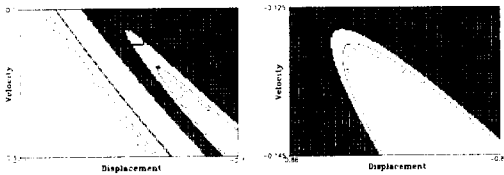


Fig. 2 Magnification of Basin Boundary

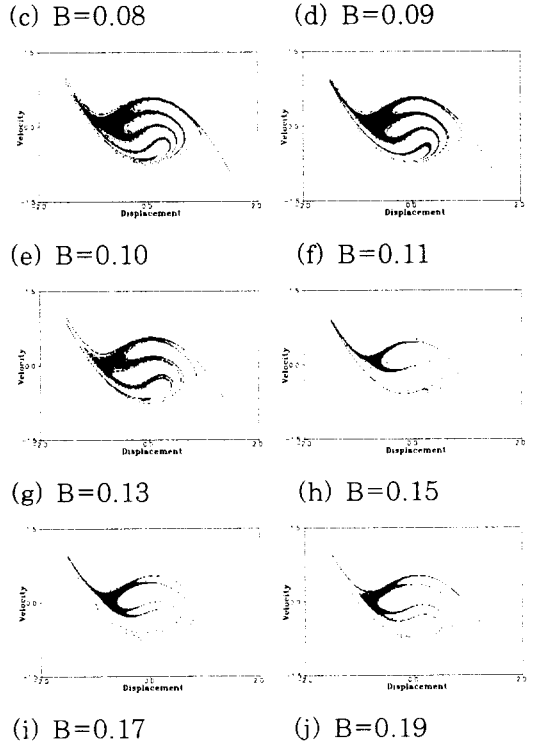
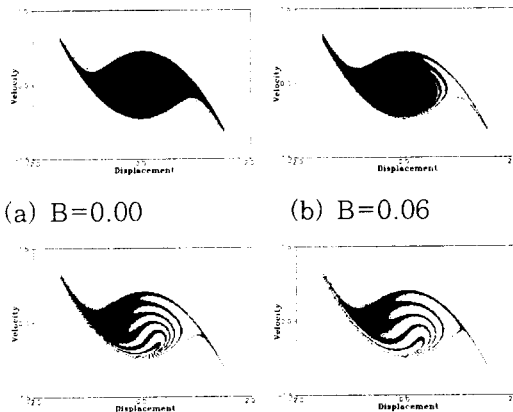


Fig. 3 Basin of Attraction of Mathieu Ty Capsizing Equation

이제 복원력항의 형태가 5차항까지 되고 초기 횡동요각을 가지는 Fig. 4의 Loll 형태에 대한 전복방정식을 살펴보면, 그 영역의 형태와 외력에 따른 변화 과정이 상당히 다르게 진행되고 있음을 관측하게 된다. 일단 Fig. 4의 (a)로부터 외력이 작용치 않는 경우의 분리면 형태부터 다르기 시작하여 외력의 증가로 인한 불안정 영역의 확대 형태도 다른 두 방정식과 다르다는 점, 안정·불안정 영역간의 경계가 눈에 두드러지게 모호해지는 점, 그리고 외력의 변화에 아주 민감하고 급속하게 영역이 변한다는 점 등을 알 수 있다. 먼저 분리면의 형태를 보면, 이 방정식이 가지는 안정적 수렴점이 복원력항의 특성상 두군데이기 때문에 생기게 된 형태라고 볼 수 있다. 다음으로 불안정 영역의 침식 형태를 보면, 앞의 두 방정식에서 계산된 형태는 외부에서부터 불규칙하게 깎아지듯 침식해 들어오는 모습을 보이나 이 방정식에서 계산된 형태는 군데군데가 불안정 영역으로 되면서

그 공간이 더 많아지고 넓어지는 침식의 진행을 보이고 있다. 이는 더욱 안정과 불안정에 대한 판단을 정확히 못하게 하는 결정적 요인이 되고 이로 인해 이제는 하나하나의 초기치에 대해 계산해보지 않고는 전복여부를 예측조차 할 수 없는 상황이 되었음을 알 수 있을 것이다. 또한 각 영역의 경계가 불확실해 지는 것도 앞서서와 동일한 이유로써 불안정한 영역이 군데군데서 침식해 들어오는데에 그 이유가 있다고 볼 수 있다. 그래서 특별히 안정·불안정 영역간의 경계가 존재하는 것이 아니라 안정 영역 안에 불안정 영역이, 그리고 불안정 영역 안에 안정 영역이 있어서 임의의 초기치로 그림을 통해 선박 운동을 예측한다는 것이 불가능하다는 것을 Fig. 4의 (b)에서 (j)까지를 통해 확인할 수 있다. 끝으로 외력의 변화에 아주 민감하게 영역 형태의 변화가 일어나는 것은 이 결정론적인 방정식이 가지는 하나의 고유한 성질로 이해해야 된다.

일반적인 선박이 그러하듯 실제 선박의 운동을 관측할 시 정확한 초기치와 외력의 파악은 상당히 어렵고 그 정확성을 제대로 보증할 수도 없다. 이러한 이유로 본 논문에서 모델로 쓴 결정론적인 선박의 운동조차도 사실 그 전체적인 운동 형태나 운동 특징, 그리고 외적인 위험 수위를 어느 정도 예측할 뿐 정확하게 운동의 결과를 판단할 수는 없다는 것을 알게 되었다. 이는 비선형성이 그 주된 원인일 것이며, 이러한 비선형성을 정량적으로 파악하기보다는 정성적으로 파악하려 한 것이 지금까지 제시된 본 논문의 결과와 그림들이다. 참고로 본 논문에서 고려한 외력의 크기보다 더 큰 외력에 대해서는 불안정 영역만이 존재함을 수치적 계산을 통해서 관찰할 수 있었다.

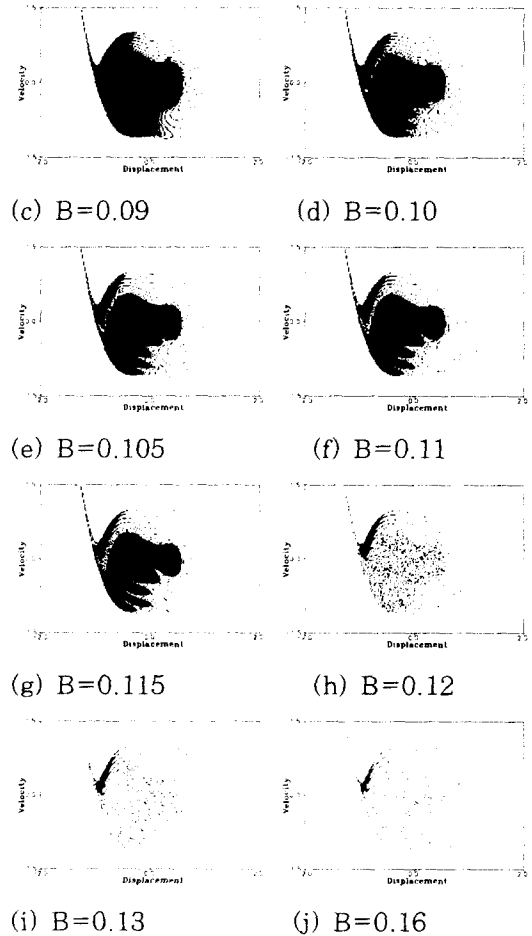
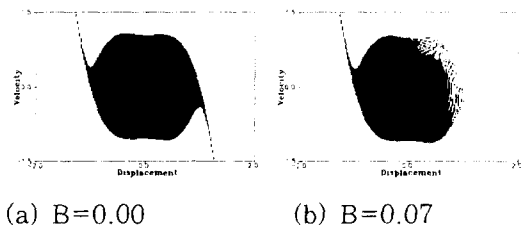


Fig. 4 Basin of Attraction of Loll Type Capsizing Equation

본 논문에서 다루어 본 또하나의 수치 계산은 안정 영역상의 임의점을 초기치로 하여 계산된 횡동요운동이 어떻게 수렴하는가를 Poincaré 단면상에서 관찰해 보는 것이다. 즉 외력에 대한 각 운동방정식의 끌개를 관찰함으로써 운동 특성을 파악하고자 한다. 여기서의 수치적 계산은 그 초기조건이 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ 인 경우에만 수행하였고, 계산 수행 시간은 안정적으로 수렴한 운동의 데이터를 좀 더 많이 구하여 결과를 보고자 10000초까지 수행하였다. 그리고 단순 형태의 전복방정식과 Mathieu 형태의 전복방정식은 수렴시의 결과가 항상 하나의 점으로만 나타나므로 주

기적 운동으로 수렴한다고 보고 본 논문에서는 더 이상 언급하지 않았다.

이제 Loll 형태의 전복방정식을 고려해 보면, 아주 작은 외력상에서는 Fig. 5의 (a), (b)에서 보 여주듯 하나의 점으로 수렴하는 주기적 운동을 보 인다. 하지만 외력이 좀더 커진 (c)에서 (f)까지 는 끌개의 형태가 수렴했다고 볼 수 없을 정도로 일정 영역 안에서 혼란스럽게 나타나는 특이한 수 령 형태를 보인다. 이것이 바로 혼돈 끌개로서, 운동이 일어날 만한 범위나 안정성 여부는 판단할 수 있으나 결정론적인 계임에도 불구하고 운동을 예측할 수는 없다는 특성을 띤다. 또한 이 구간에 서는 초기치에 아주 민감하여 아무리 근접한 초기 치에서 시작한다 할지라도 그 결과는 엄청난 차이 를 보일 수 있다. 마지막으로 이렇게 혼돈스러운 끌개도 하나의 질서(법칙성)를 가지는데, 이는 아 무리 많은 시간을 관측해 보아도 운동에 대한 변 위와 속도가 한정된 위상 공간안에서만 계속 머 무르면서 불규칙하고 무질서한 운동을 한다는 것이 다.

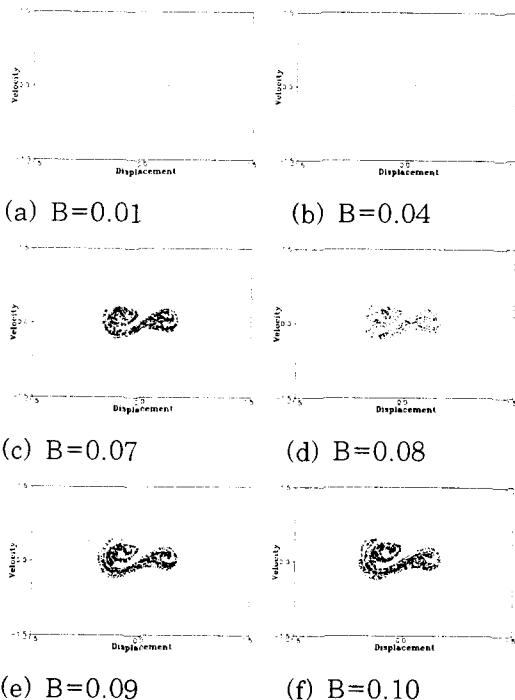


Fig. 5 Attractor of Loll Type Capsizing Equ

이상을 통해, 안정 영역상에서 출발한 운동이 그 계의 특성에 따라서는 주기적 운동 뿐만 아니 라 혼돈적 운동도 할 수 있음을 알 수 있게 되었 다.

마지막으로 혼돈 운동을 하는 동역학계에 대한 상세한 분석을 하고자 분기도를 구성하고 이를 분 석해 보았다. 즉 세 번째 방정식인 Loll 형태의 전복방정식을 이용하여 혼돈 구간을 정확히 파악 하고 운동의 변위가 어떠한 범위를 가지고 예측할 수 없게 변화해 가는지를 파악해 보았다. 그리고 분기도에서 나타내고 있는 결과를 확인해 보고자 위상 평면과 시계열(Time history)를 구성하여 보았다. Fig. 6은 초기의 횡동요각과 횡동요속도 를 모두 0.001로 한 것으로서, 처음 몇 초간의 점들은 불안정한 과도기적 상태이므로 그 계산치 를 버리고 정상 상태에 접어들었다고 보는 시간부 터의 결과치를 받아서 표시한 것이다. 계산 수행 시간은 25000초까지로 하였고, 변수가 되는 외력 의 크기는 0.00에서 0.15까지 0.0003의 단위로 변화시키면서 계산을 수행하였다. Fig. 7은 임의 로 잡은 다섯가지의 외력을 통하여 시간 변화에 따른 운동 변화 과정을 나타낸 것이다. 여기서 적 용된 수치적 방법과 초기치는 분기도 구성과 동일 하며 그림으로 나타내어진 시간대는 과도 상태가 지났다고 보여지는 구간에서 임의로 뽑은 것이다.

이 Fig. 6의 분기도는 크게 네 구간으로 나누 어 볼 수 있다. 첫째로 맨 앞부분인 계수가 0.0에 서 0.0597까지의 구간을 살펴보면, 갑자기 수렴 치의 변화가 일어나 점프현상 같은 것이 보이고, 수렴치가 두 개로 된 듯한 구간이 나타나기도 한 다. 하지만 실제로는 안정된 운동을 하고 있으며, 계수값에 민감하게 수렴값이 변할 뿐 하나의 계수 값에 대해서는 하나의 수렴점만을 갖는 구간이다.

둘째로 앞구간의 끝부터 0.0651까지의 계수 구간을 살펴보면, 비선형계의 특성 중 하나인 분 기가 발생한다. 즉 수렴치가 둘로 나누어지는 현 상이 연속적으로 일어나서 결국은 혼돈적 현상을 일으킨다. 이렇게 둘로 나누어지는 주기배가 현상 은 이처럼 특별한 계수 구간값에서만 나타나고 운

동을 복잡하게 만드는 하나의 경로이다.

셋째로 둘째 구간의 끝부터 0.1092까지의 구간을 보면, 예측이 불가능한 혼돈적 운동이 발생하는 구간임을 알 수 있다. 하지만 여기서 특이한 점은 그 혼돈적인 운동 변위가 무한대에 걸쳐 있는 것이 아니라 전복이 발생치 않는 안전한 범위 내에서만 이루어진다는 것이다. 그리고 이 구간 사이에서 주기적 창도 발생하고 있음을 관찰할 수 있다.

마지막으로 계수가 0.1092보다 큰 구간을 보게 되면, 아예 수렴치가 없거나 띄엄띄엄 생기는 것을 볼 수 있다. 수렴치가 없는 것은 발산을 나타내는 것으로, 전복을 의미한다. 그리고 띄엄띄엄 나타나는 수렴치는 전복 구간 안에서도 안정 운동이 생기는 계수값이 있음을 의미한다.

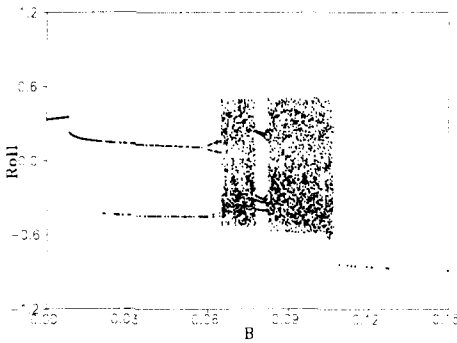


Fig. 6 Bifurcation Diagram of Loll Type Capsizing Equation

이제 임의로 정한 다섯가지 외력에서의 위상 평면과 시계열을 나타낸 Fig. 7을 살펴 보면, 그 형태가 모두 분기도에서 예측된대로 진행되고 있음을 확인할 수 있다. 즉, 안정된 구간은 단순 반복을 수행하고, 분기가 일어나기 시작하는 구간은 몇가지 눈에 띄는 주기를 보이며 운동을 진행한다. 또 혼돈적 운동 구간은 전혀 주기성을 찾아볼 수 없는 복잡한 운동을 계속하고, 전복 구간을 점점 운동이 커지더니 결국 전복을 하게 된다. 이처럼 혼돈 현상을 보이는 동역학계는 선박의 경우도 다른 비선형 동역학계와 마찬가지로 분기도

가 정성적 해석을 수행하는데 있어 상당히 도움이 된다는 것을 알게 되었다.

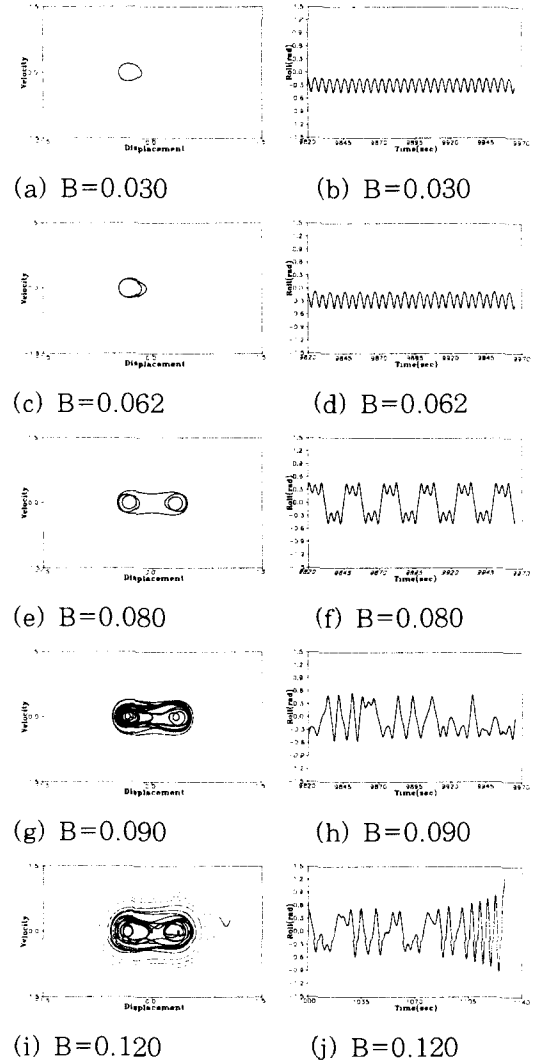


Fig.7 Phase Plane & Time History of Loll Type Capsizing Equation

5. 결 론

본 논문에서는 초기치 변화에 따른 선박 운동의 안정성 여부를 정성적으로 판단하는 방법에 대해 연구하였고, 전복이 되지 않는 선박 운동이 과도적 상태 후에는 어떤 운동으로 수렴하는가에 대해서도 연구하였다. 이를 통해 결정론적 계인 선박

운동이 안정된 운동 결과를 주는 초기치의 근처에서 출발하여도 불안정 운동, 즉 전복이 일어날 수 있으며 이는 안정과 불안정 영역의 경계 근처에서 더욱 두드러짐을 알게 되었다. 또한 전복이 되지 않고 일정범위 안에서의 운동이 계속된다 하더라도 계의 특성에 따라서는 초기치에 아주 민감하고 예측 불가능한 운동이 일어날 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 혼돈적 운동은 선박에서도 분기도 등을 통하여 쉽게 해석하고 파악할 수 있음을 입증할 수 있었다.

이러한 결과들은 통해 볼 때, 선박 운동은 그 해석에 있어 임의의 초기치에 대한 정량적인 분석만큼이나 위상 평면, 분기도 등을 통한 정성적인 분석이 필요하다고 본다.

참고문헌

- [1] M. S. Soliman and J. M. T. Thompson, "Integrity Measures Quantifying the Erosion of Smooth and Fractal Basins of Attraction", *Journal of Sound and Vibration*, 135(3), 1989, pp. 453-475.
- [2] A. N. Lansbury, J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, "Basin Erosion in the Twin-Well Duffing Oscillator: Two Distinct Bifurcation Scenarios", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.2, No.2, 1992, pp. 505-532.
- [3] J. M. T. Thompson, "Designing Against Capsize in Beam Seas: Recent Advances and New Insights", *Appl. Mech. Rev.* Vol50..No 5, May, 1997.
- [4] Makoto KAN, "Chaotic Capsizing", *Ship Research Institute, Japan*.
- [5] Kan, M. and Taguchi, H., "Capsizing of a Ship in Quartering Seas (Part 2. Chaos and Fractal in Capsizing Phenomenon)", *Journal of Society of Naval Architects of Japan*, Vol. 168, 1990, pp. 213-222(in Japanese).
- [6] Kan, M. and Taguchi, H., "Fractal of Capsizing Boundary of a Ship in Control Space", *Transactions of the West-Japan Society of Naval Architects*, No. 81, 1991, pp. 143-151(in Japanese).
- [7] Kan, M. and Taguchi, H., "Capsizing of a ship in Quartering Seas (Part 4. Chaos and Fractals in Forced Mathieu Type Capsizing Equation)", *Journal of Society of Naval Architects of Japan*, Vol. 171, 1992, pp. 229-244(in Japanese).
- [8] Gregory, L. Baker and Jerry, P. Gollub, "Chaotic Dynamics", *Cambridge University Press*, 1990.
- [9] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", *John Wiley and Sons*, 1983.
- [10] John, Briggs and F. David, Peat, "Turbulent Mirror", *Harper & Row, Publishers*, New York, 1989, 번역서 "혼돈의 과학", 김광태·조혁 옮김, 범양사, 1990.
- [11] Kan, M. and Taguchi, H., "Chaos and Fractals in Loll Type Capsizing Equation", *Transactions of the West-Japan Society of Naval Architects*, No. 83, 1992, pp. 131-149(in Japanese).
- [12] Francis, C. Moon, "Chaotic Vibrations (An Introduction for Applied Scientists and engineers)", *John Wiley and Sons*, 1987.
- [13] S. Wiggins, "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", *Springer-Verlag*, 1990.
- [14] Holmes, P. J., "Nonlinear Oscillations and the Smale Horseshoe", in *Chaos and Graphics*, Devany and Keen, *American Mathematical Society*.