

B-스플라인 고차패널법에 의한 2차원 수중익 문제 해석

조충호*, 김건도*, 이창섭**

Analysis of Two-dimensional Hydrofoil Problems Using Higher Order Panel Method based on B-Splines

by

Chung-Ho Cho*, Gun-Do Kim* and Chang-Sup Lee**

요 약

기하학적 형상과 유동의 해를 B-스플라인으로 표현하는 2차원 고차 패널법이 개발되어 수중익 문제의 해석에 적용되었다. 제어점이 패널내에 놓이는 경우, 고차의 다이폴과 소스에 의해 유기되는 자기 유기 포텐셜의 특이 거동을 제거하기 위하여 피적분 함수를 특이 부분과 비특이 부분으로 나누어, 특이 부분은 해석적인 적분으로 비특이 부분은 정도 높은 Gauss 구적법으로 계산함으로써 유기 포텐셜을 정도 높게 구할 수 있음을 보였다. 또한, 날개 뒷날에서의 압력 점프의 값이 명시적으로 영이 되도록 하는 동역학적 Kutta 조건식을 도입하고, 이의 적용이 안정된 해를 보장함을 확인하였다. 수치 실험을 통하여, 제안된 수치해석 기법이 안정적이고 정확한 해를 줌을 확인하였으며, 특히 저차 패널법과 비교하여 적은 수의 패널로 동일한 정도를 유지할 수 있음을 보였다.

Abstract

A higher order panel method based on B-spline representation for both the geometry and the velocity potential is developed for the solution of the flow around two-dimensional lifting bodies. The self-influence functions due to the normal dipole and the source are separated into the singular and nonsingular parts, and then the former is integrated analytically whereas the latter is integrated using Gaussian quadrature. A null pressure jump Kutta condition at the trailing edge is found to be effective in stabilizing the solution process and in predicting the correct solution. Numerical experiments indicate that the present method is robust and predicts the pressure distribution around lifting foils with much fewer panels than existing low order panel methods.

발 표 : 1999년도 대한조선학회 춘계연구발표회('99. 4. 22.)

접수일자 : 1999년 7월 15일, 재접수일자 : 1999년 9월 10일

*학생회원, 충남대학교 선박해양공학과

** 정회원, 충남대학교 선박해양공학과

1. 서 언

Hess/Smith[1] 이후로 패널법은 항공동역학이나 유체동역학적 설계 수행에서 매우 유용한 도구로 이용되어 왔으며, 지금까지 다양한 종류의 패널법들이 꾸준히 개발, 발전되어 왔다. Morino[2]는 포텐셜을 기저로한 패널법을 소개함으로써, 기존의 Hess/Smith 등에 의한 속도를 기저로한 패널법에 비해 수렴성과 해의 정도를 향상시켰으며, Lee[3]는 Morino 방법을 적용하여 공동이 발생하지 않은 정상 상태의 프로펠러 문제를 최초로 해석한 바 있다. 이어서, Hsin[4], 문일성 등[5]은 비정상 프로펠러의 성능의 추정에 패널법을 적용할 수 있음을 보여주었으며, 최근 김영기[6], Kim/Lee[7]에 의해 프로펠러 표면에 발생하는 비정상 공동의 거동을 추정하는 수준까지 발전되고 있다. 그러나, Morino, Lee 이래로 프로펠러 해석에 사용되고 있는 패널법은 단위 패널내에서 포텐셜의 값이 일정하다고 가정하는 저차패널법으로, 물체표면에서의 속도를 계산하기 위해서는 이웃하는 패널에서의 포텐셜값을 유한차분법을 사용하여 미분하기 때문에 근본적으로 수치적 오류를 피할 수 없는 단점이 있다. 이러한 수치적 오류는 특히 양력을 발생하는 물체의 뒷날과 날개끝 근처에서의 정확도를 떨어뜨리는 결과를 준다. 저차패널법의 이러한 단점을 극복할 수 있는 방법은 단위 패널내에서 포텐셜의 값을 정확하게 미분할 수 있는 능력을 확보하는 것이다. 이것을 가능하게 하기 위하여는 패널내에서의 물리량의 변화를 허용하는 고차 패널법으로의 이동이 필수적이다.

본 논문의 목적은 이 같이 속도와 압력을 보다 정확히 예측할 수 있는 고차패널법을 개발하는 데에 있다. 본 논문은 물체형상과 포텐셜을 표현하기 위해 B-스플라인 기저함수(Rogers and Adams[8], Piegl and Tiller[9])를 사용하고 있으며, 기저함수의 미분을 정확하게 해석적으로 구할 수 있기때문에, 더 이상 포텐셜로부터 속도를 계산하기 위해서 수치미분 방법을 이용할 필요가 없다. 또한, 물체와 포텐셜을 표현하기 위한

B-스플라인의 차수를 증가시키는 데에 제한이 없기 때문에, 어떠한 차수의 해도 구할 수가 있다.

B-스플라인을 기저로한 고차패널법은 Hsin 등[10]이 2차원 물체 주위의 유동을 해석함으로써 처음으로 소개되었으며, Maniar[11]에 의해서 3차원 고차패널법으로 확장된 바 있다. Hsin 등 및 Maniar는 영향함수(influence function)의 적분을 B-스플라인 기저함수로부터 유도된 계수들로 이루어진 다항식으로 표현하였는데 이는 대부분의 물체의 형상을 표현함에 있어서 적합하지만, 선형과 같은 복잡한 형상 표현에 이용되는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)곡면으로의 확장에는 적합하지 못하다.

본 논문의 궁극적인 목표는 NURBS에 의한 2차원 형상과 포텐셜 표현에 있으며, 영향함수를 적분하기 위한 보편화된 수치과정을 소개하고자 한다. 본 논문에서는 물체 표면에 분포되어 있는 법선 다이폴과 쏘오스에 의한 영향함수를 특이부분과 비특이부분으로 분리하여, 특이부분은 해석적으로 적분을 수행하고 비특이부분은 Gauss 구적법을 이용하였다.

B-스플라인은 원래 배나 자동차와 같은 물체의 형상을 표현하는 방법으로 발전되어 왔으며, 현재는 B-스플라인의 일종인 NURBS가 산업계의 표준으로 자리잡아 가고 있다. B-스플라인을 유동장의 표현에 적용하면, B-스플라인 기저함수의 선택에 따라 해석하고자 하는 유동장을 원하는 차수만큼 매끈하게 표현할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 우리가 해결해야할 문제는 다항식으로 표현되는 기저함수와 Green함수의 곱의 형태가 특이 거동을 보이므로 이를 적절히 처리하여 유기 포텐셜을 정확하게 계산할 수 있는 방법을 찾는 것이다.

본 논문에서 제시한 수치해석기법의 타당성을 확인하기 위하여 우리에게 잘 알려진 양력문제에 저차 패널법에 의한 수치해 또는 해석해와 비교하여 본 수치해석기법의 유효성을 입증하였다. 본 수치해법의 장점은 기존에 사용되어 온 저차 패널법에 비해 상당히 적은 수의 패널을 분포하여 좋은 결과를 얻을 수 있다는 것이다.

2. B-스플라인을 이용한 날개형상과 포텐셜의 표현

B-스플라인을 이용하여 기하학적 형상과 속도 포텐셜을 표현하기 위하여 우선 B-스플라인의 기저함수와 그의 미분을 살펴보기로 한다. 매개변수 u 의 함수로 정의되는 최고 차수가 p 인 기저함수(basis function) $N_i^p(u)$ 는 deBoor(Piegl and Tiller, 1996)(9)의 재귀공식에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$N_i^p(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_i^p(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \quad (1)$$

여기서, 집합 $\{u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}\}$ 는 모든 i 에 대하여 $u_i \leq u_{i+1}$ 의 특성을 갖는 매듭벡터이다. 식 (1)을 관찰하면, p -차의 기저함수는 $p-1$ -차의 기저함수를 이용하여 구할 수 있음을 알 수 있으며, 따라서 $N_i^p(u)$ 는 p -차의 다항식이 되며, $p-1$ -차까지 미분 가능함을 알 수 있다. Fig. 1은 $p=3$ 인 경우의 기저함수와 2차 미분까지의 형상을 보여준다. 그림으로부터 p -차의 기저함수는 최대 $p+1$ 개의 스패(매듭과 매듭 사이의 공간)에 걸쳐 영이 아닌 것을 관찰할 수 있으며, $p-1=2$ -차 미분까지 연속임을 알 수 있다. 본 논문에서는 특별한 언급이 없는 경우는 $p=3$ 을 의미하며, 기저함수의 표기에서 편의상 상첨자 p 를 빼고 표현하기로 한다.

B-스플라인에서 임의의 2차원 곡선은 매개변수를 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\vec{x}(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{x}_i^v \tilde{N}_i(u) \quad (2)$$

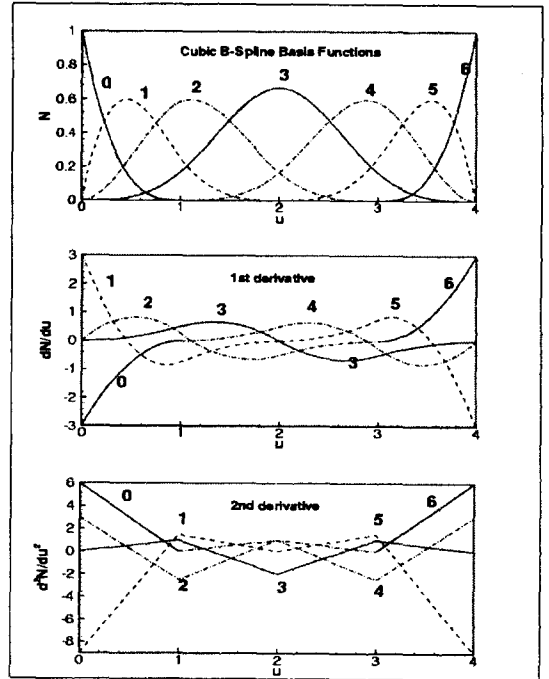


Fig. 1 B-spline basis functions and their derivatives

여기서, \tilde{N}^v 은 날개 형상을 표현하기 위한 제어꼭지점(control vertices)의 개수, \vec{x}_i^v 는 날개의 형상을 표현하기 위한 제어꼭지점의 좌표, $\tilde{N}_i(u)$ 는 식 (1)에 의해 정의되는 기저함수로 상첨자 p 를 생략하고 표기하기로 한다. Fig. 2는 $\tilde{N}^v=7$ 개의 꼭지점으로 표현된 날개 형상을 보여준다. 실제 2차원 날개의 경우 $\tilde{N}^v=22$ 정도가 적당하나, 여기서는 복잡성을 피하기 위하여 적은 꼭지점 수를 택하였다.

속도 포텐셜 ϕ 또한 B-스플라인을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i^v N_i(u) \quad (3)$$

여기서, N^v 는 속도 포텐셜을 표현하기 위한 제어꼭지점의 개수, ϕ_i^v 는 속도 포텐셜을 표현하

기 위한 포텐셜 제어꼭지점의 값, $N_i(u)$ 는 B-스플라인에서 사용되는 기저함수이다. Fig. 3 에서 보는 바와 같이 식 (3)에 의해 표현되는 포텐셜도 포텐셜 꼭지점을 이용하여 그림으로 표현하는 것이 가능하다. 그러나, 일반적으로 포텐셜과 기하학적 형상을 표현하는 꼭지점의 개수 N^v 와 \widehat{N}^v 가 다르므로 이와같이 그림으로 표현하는 것이 불가능함에 유의하여야 한다.

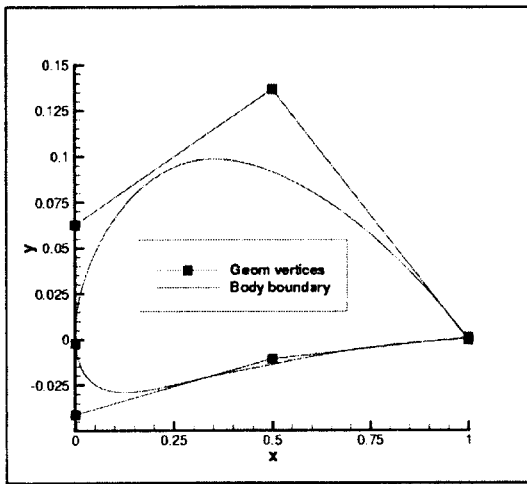


Fig. 2 Blade geometry represented by $\widehat{N}^v=7$ vertices

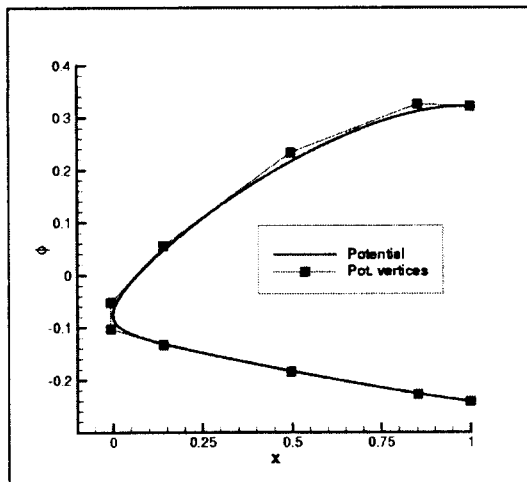


Fig. 3 Potential variation represented by $N^v=10$ vertices

3. 적분 방정식의 이산화

날개 표면에서의 속도 포텐셜은 Green 정리에 의해, 날개표면에 분포시킨 다이폴과 소오스에 의해 유기된 포텐셜을 적분함으로써 얻어질 수 있다. 따라서, 적분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\phi}{2} = \int_{S_s} (-\phi) \frac{\partial G}{\partial n} ds + \int_{S_s} \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds + \int_{S_w} (-\Delta \phi) \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (4)$$

여기서, ϕ 는 속도 포텐셜, \hat{n} 은 단위 법선벡터, G 는 Green함수, S_B 는 날개표면, S_w 는 후류면이다. 날개 표면에서의 운동학적 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\hat{n} \cdot \vec{U}_\infty \quad (5)$$

여기서, \vec{U}_∞ 는 유입유동이다. 적분방정식을 N^p 개의 패널로 이산화하면, 식 (4)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{2} + \sum_{j=0}^{N^p-1} \int_j \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds + (\Delta \phi) \int_{S_w} \frac{\partial G}{\partial n} ds \\ = \sum_{j=0}^{N^p-1} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds \end{aligned} \quad (6)$$

Fig. 1에서 관찰할 수 있듯이, 임의의 u 값 위치에서 볼 때, 영이 아닌 기저함수의 개수는 $p+1$ 인 것을 알 수 있다. 따라서, $u \in [u_s, u_{s+1}]$ 을 만족하는 스펙지수 s 를 이용하면, 식 (3)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\phi(u) = \sum_{a=0}^p \phi_{s-p+a}^v N_{s-p+a}(u) \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)을 이용하면, 제 i -번째 패널 위에 있는 제어점에 대해 이산화된 적분방정식은

다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{a=0}^N \phi_{s,-\rho+a}^v N_{s,-\rho+a}(u) \right\} \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \int_j \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v N_{s,-\rho+a}(u) \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (8) \\ & + (\Delta\phi) \int_{S_w} \frac{\partial G}{\partial n} ds = \sum_{j=0}^{N-1} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds \end{aligned}$$

4. 다이폴과 소오스에 의한 포텐셜 계산

이산화된 적분방정식 식 (8)은 기존의 저차패널법과 비교할 때, 유기 속도나 포텐셜을 계산할 때 제어점이 자기 패널 위에 올 경우 피적분 함수가 특이 거동을 보이는 것은 기존의 저차패널법과 유사하나, B-스플라인 기저함수의 존재로 피적분함수에 매개변수 u 의 다항식이 포함된 점이 크게 다르다. 다항식의 여러 항 중에서도 피적분 함수의 특이거동에 가장 큰 영향을 주는 것은 가장 낮은 차수인 상수항이다. 이 경우 저차 패널법에서는 패널의 평균 평면에서의 적분을 해석적으로 수행할 수 있는 방법들이 알려져 있으나 (Newman[12], 이창섭/서정천[13]), 적분 표면이 임의의 차수의 곡면이고 피적분함수가 고차가 되면 해석적 적분이 쉽지 않아 수치적 적분을 수행하여야 한다. 수치적분의 수행에서 가장 유의하여야 할 점은 피적분함수의 특이 거동이다. 우선은 특이 거동에 적합한 Gauss 구적법을 쓰는 것이 한 방법이 될 수도 있으나, 본 논문에서는 Lee/Kerwin[13]에 의해 제안된 특이점을 제거하는 방법을 사용하기로 한다. 일단 특이점이 제거되어 정규화된 피적분함수는 원하는 정도에 맞는 Gauss 구적법을 사용하면, 쉽게 수치적인 계산이 가능하다.

4.1 다이폴에 의한 자기유기 포텐셜

Lee/Kerwin[13]에 의하면, 제어점이 자기 패널안에 있을 경우, 다이폴에 의해 유기되는 포텐셜은 제어점에 의해 양분된 패널의 양쪽에 있는 피적분함수는 특이 거동이 제거된 정규화된 부분과 해석적 적분을 통하여 구의 분할각(subtended

angle) 2π 가 되는 부분으로 나뉜다. 이중에서 후자는 이미 Cauchy 주치적분에 포함된 값으로 식 (8)의 첫 항으로 나타난 부분이며, 정규화된 부분을 양쪽의 구간으로 나누어 적분으로 표현하면 다음과 같다. 즉, 다이폴에 의한 자기 유기 포텐셜 I_{self}^D 는

$$\begin{aligned} I_{self}^D &= \left(\int_{s_L}^0 + \int_0^{s_R} \right) \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds \\ &= \left(\int_{u_L}^{u_i} + \int_{u_i}^{u_R} \right) \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v N_{s,-\rho+a}(u) \frac{\partial G}{\partial n} \frac{ds}{du} du \\ &\equiv I_{self,L}^D + I_{self,R}^D \quad (9) \end{aligned}$$

식 (9)의 두 번째 적분은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{self,R}^D &= \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v \int_{u_i}^{u_R} N_{s,-\rho+a}(u) \frac{\partial G}{\partial n} \frac{ds}{du} du \\ &= \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v \int_{u_i}^{u_R} N_{s,-\rho+a}(u) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log r \frac{ds}{du} du \quad (10) \end{aligned}$$

위 식에서 특이점이 제거된 피적분함수는 적절한 구적법에 의해 원하는 정도의 수치적분 수행이 가능하다.

4.2 다이폴에 의해 유기된 포텐셜의 원장근사 제어점이 특이점이 분포된 패널에서 멀리 떨어져 있는 경우는 특이 거동이 없으므로, 수치적분에 문제가 있을 수 없다. 제어점이 패널로부터 일정한 거리가 떨어져있다고 가정하면, 유기 속도 포텐셜 I_{far}^D 는

$$\begin{aligned} I_{far}^D &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_j \left\{ \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v N_{s,-\rho+a}(u) \right\} \frac{\partial G}{\partial n} \frac{ds}{du} du \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v \int_j N_{s,-\rho+a}(u) \frac{\partial G}{\partial n} \frac{ds}{du} du \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{a=0}^1 \phi_{s,-\rho+a}^v \int_j N_{s,-\rho+a}(u) \frac{1}{2\pi} \frac{-\hat{n} \cdot \vec{r}}{r^2} \frac{ds}{du} du \quad (11) \end{aligned}$$

특히 제어점이 패널에서 가까이 있을 경우에는

Lee/Kerwin[13], Maniar[11]에 의해 제안된 패널을 연속부분분할하는 기법(subsection technique)을 써서 계산할 수 있다. 이 경우 패널의 기하학적 형상은 이미 B-스플라인에 의해 정밀한 계산이 가능하므로 추가적인 오차를 주지 않는 장점이 있다.

4.3 쏘오스의 자기유기 포텐셜

식 (8)의 우변에 있는, 쏘오스에 의한 유기 포텐셜의 계산도 제어점이 패널내에 있는 경우 피적분함수의 특이성을 분리하여 처리함으로써 가능하다. 우선 다이폴의 경우와 마찬가지로 적분 구간을 제어점을 중심으로 둘로 나누기로 한다. 쏘오스에 의한 자기 유기 포텐셜 I_{self}^S 는

$$\begin{aligned} I_{self}^S &= \left(\int_{s_l}^0 + \int_0^{s_R} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds \\ &= \left(\int_{s_l}^0 + \int_0^{s_R} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \log r ds \quad (12) \\ &= I_{self,L}^S + I_{self,R}^S \end{aligned}$$

식 (12)에 나타나는 $\partial \phi / \partial n$ 인자는 식 (5)에 의해 매끈하게 변하는(특이거동이 없는) 함수임을 알 수 있다. 따라서 $\partial \phi / \partial n$ 는 국소 곡선 좌표계(s)에서 급수를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \approx \sum_{b=0}^b \alpha_{j,b}^* s^b \quad (13)$$

여기서 편의상 최고차수는 p 를 선택하였으나, 패널수가 증가하면 p 의 값의 선택이 결과에 큰 영향을 주지 않는다. 다항식으로 표현된 식 (13)을 사용하여 식 (12)의 두번째 항을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{self,R}^S &= \int_0^{s_R} \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \log r ds \\ &\approx \sum_{b=0}^b \alpha_{j,b}^* \int_0^{s_R} s^b \frac{1}{2\pi} \log r ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{b=0}^b \alpha_{j,b}^* \int_0^{s_R} s^b \frac{1}{2\pi} \left\{ \log s + \log \frac{r}{s} \right\} ds \\ &= \sum_{b=0}^b \alpha_{j,b}^* \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{s_R^{b+1}}{b+1} \log s_R - \frac{s_R^{b+1}}{(b+1)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{s_R} s^b \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{s} ds \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

위의 식 전개과정에서 $\log r = \log s + \log(r/s)$ 로 치환한 것은 우변의 첫째항은 쏘오스세기의 다항식과 곱해져서 해석적 적분을 가능하게 할 수 있다는 점에 착안한 것이며, 둘째항은 $s \rightarrow 0$ 의 경우 $r/s \rightarrow 1$ 에 근사함으로써 특이거동이 없는 정규화된 인자가 되므로 수치적인 적분에 문제가 없기 때문이다.

4.4 쏘오스에 의해 유기된 포텐셜의 원장근사 다이폴의 경우와 마찬가지로 제어점이 쏘오스 패널에서 멀리 떨어진 경우에 쏘오스에 의해 유기되는 포텐셜 I_{far}^S 는

$$I_{far}^S = \sum_{j=0}^{N_c-1} \int_j \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \log r \frac{ds}{du} du \quad (15)$$

제어점이 쏘오스 패널에 가까이 오는 경우에는 연속 부분분할법을 사용하여 계산한다.

5. Kutta 조건

수학적으로 양력 문제가 유일하게 정의되기 위하여는 날개 뒷날에서의 속도가 유한하여야 한다. 포텐셜을 기저로하는 Morino의 정식화에서는 날개 뒷날에서의 포텐셜의 점프 $\Delta \phi$ 를 고려함으로써 Kutta 조건이 만족되는 것으로 되어 있으나 실제로 수치적인 문제 등에 의해 날개 뒷날에서의 압력 점프의 값이 영이되지 않아 반복적인 기법에 의해 해결하는 것으로 보고되고 있다(Hsin 등 [10]). 이러한 현상을 피하기 위하여 본 논문에서는 명시적으로 압력 점프의 값이 영이 되도록 하는 조건을 사용한다. 이 조건은 다시 Bernoulli

의 방정식에 의해 날개 뒷날의 상하면에서 속도의 크기가 같다는 조건으로 바꾸어 말할 수 있다. 즉,

$$\left(\hat{i} \cdot \vec{U}_\infty + \frac{d\phi}{ds} \right)^+ = - \left(\hat{i} \cdot \vec{U}_\infty + \frac{d\phi}{ds} \right)^- \quad (16)$$

여기서 \hat{i} 는 날개 뒷날에서의 접선방향 단위벡터이며, 상첨자 +, - 는 각각 날개의 윗면, 아랫면을 나타낸다. 본 논문에서는 포텐셜을 식 (7)에 의해 표현하고 있고, B-스플라인 기저함수의 미분이 해석적으로 수행되는 것이 가능하므로 식 (16)은 다시 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^p \phi_a^v N^{p-1+a} \left\{ \frac{N'_{N^*-1+a}(u^+_{TE})}{(ds/du)^+} \right\} \\ & + \sum_{a=0}^p \phi_a^v \left\{ \frac{N'_a(u^-_{TE})}{(ds/du)^-} \right\} \\ & = - (\hat{i}^+ + \hat{i}^-)_{TE} \cdot \vec{U}_{TE} \end{aligned} \quad (17)$$

명시적 압력 Kutta 조건 식인 식 (17)의 가장 큰 장점은 선형이라는 점이다. 따라서, Hsin 등 [10]이 경험한 반복 계산의 필요가 없다는 큰 장점을 갖는다.

6. 구속조건이 있는 최소자승해법

적분 방정식 식(8)의 각 항을 식(9)-식 (15)로 대치하면, 미지수 $\phi_i^v, i = 0, \dots, N^p - 1$ 를 결정하기 위한 선형 방정식이 얻어진다. 그러나, 패널의 수 N^p 와 미지수 사이에는 다음 관계식에 의해 p 만큼 차이가 있다.

$$N^e = N^p + p \quad (18)$$

즉, 저차 패널법의 경우와는 달리 각 패널에 한 개 만의 제어점을 놓아 가지고는 ϕ^v 를 결정하기에 충분한 수의 방정식을 확보할 수 없다는 것이다. 이를 극복하기 위하여 Hsin 등[10]은 Galerkin법을 채택하였고, 본 연구에서는 각 패

널에 두개의 제어점을 두어 제어점의 수 $N^{CP} = 2 \times N^p > N^e$ 가 되도록 하여 최소자승법에 의해 해석하고자 한다. 각 제어점에 식 (8)을 적용하면 다음과 같은 연립 방정식이 얻어진다.

$$A \phi^v = B \quad (19)$$

여기서, A 는 $N^{CP} \times N^e$ 행렬이고, ϕ^v 는 미지의 포텐셜 제어꼭지점 세기 벡터, B 는 N^{CP} 개의 요소를 갖는 벡터이다. 또한 식 (17)을 행렬로 나타내면,

$$S \phi^v = T \quad (20)$$

여기서, S 는 $1 \times N^e$ 행렬이고, T 는 1×1 행렬이다. 여기서 Lagrange 승수 L 을 도입하면, 식 (20)을 구속조건으로 하고 식 (19)를 최소자승법으로 해석하여 다음과 같이 Lagrange 승수의 값을 구할 수 있다.

$$L = (S(A^T A)^{-1} S^T)^{-1} (S(A^T A)^{-1} A^T B - T) \quad (21)$$

결과적으로, 포텐셜 제어꼭지점의 값 벡터 ϕ^v 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi^v = (A^T A)^{-1} (A^T B - S^T L) \quad (22)$$

7. 결과 및 고찰

본 논문에서 제시한 수치해법의 정확성과 효율성을 확인하기 위하여 2차원 원주, NACA 4412 단면, 프로펠러에 가장 널리 쓰이고 있는 NACA a=0.8 캠버선을 갖는 단면 및 해석해가 있는 Karman-Trefftz 단면을 선택하여 수치 계산을 수행하였다. 또한 특별한 언급이 없는 경우 B-스플라인 기저함수 차수, $p=3$ 으로 계산을 수행하였다. 우선 명시적 압력 Kutta 조건의 효과를 입증하기 위하여, 이 구속조건을 적용한 경우와 적용하지 않은 경우에 대하여 최소자승법으로 해석한 결과를 Fig. 4에 보인다.

Fig. 4는 구속조건을 적용하지 않은 경우에 날개 뒷날에서의 압력 점프가 영이 아닌 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 Hsin 등[10]의 논문에서도 이미 알려졌던 내용으로 Hsin 등[10]은 반복계산법을 도입하여 날개 뒷날에서의 압력점프의 값이 영이 되도록 하고 있다. Lee/Kerwin[14]에 의해 제안된 이 명시적인 압력 Kutta 조건은 반복 해법을 피함으로써 계산시간을 줄일 수 있는 아주 효과적인 조건이라는 것을 알 수 있다. Fig. 5는 2차원 원주에 대한 압력분포를 엄밀해와 비교하였다. 그림에서와 같이 적은 패널수로도 완전 일치되는 결과를 보임을 확인할 수 있다. 2차원 원주의 한쪽끝에 정체점을 강제로 위치시킴으로써 양력이 발생하는 경우의 계산도 가능하다. 이 계산은 2차원 원주같이 기하학적 형상이 잘 정의된 물체에 대하여 양력 문제의 해석 정도를 판단하는데 이용될 수 있다.

Fig. 6은 받음각 $\alpha=5.73^\circ$ 에서 2차원 원주 주위의 유동을 원주 주위에 순환을 중첩하여 얻은 해와 비교한 것이다. 이상의 비교로 부터 2차원 원주 주위의 유동 해석의 정확성을 확인할 수 있다.

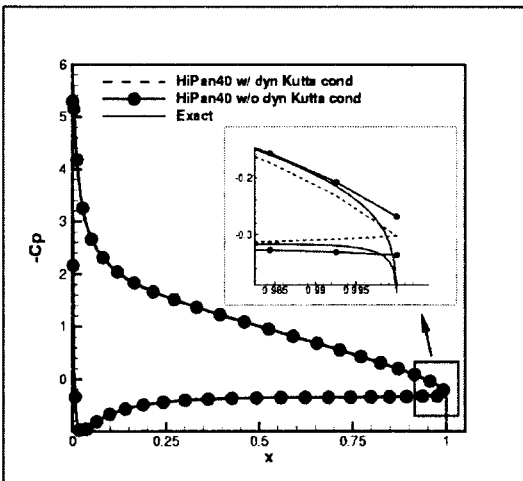


Fig. 4 Pressure distribution obtained by Lee and Kerwin[14] method with and without applying explicit dynamic Kutta condition: Comparison with exact solution

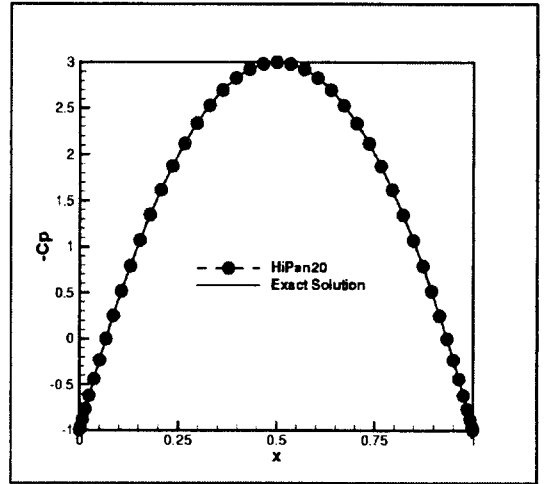


Fig. 5 Pressure distribution around a circle at 0° angle of attack with $N^s=20$: Comparison with exact solution

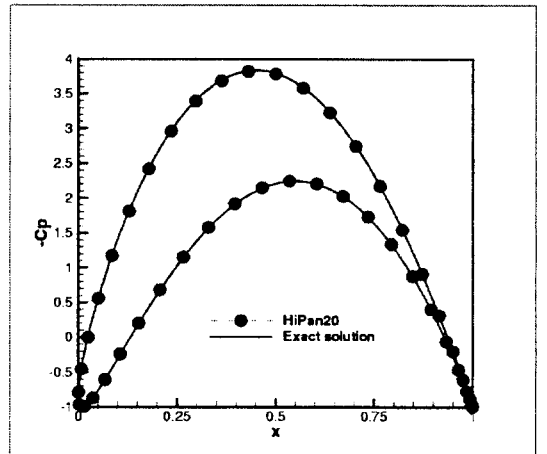


Fig. 6 Pressure distribution around a circle at 5.73° angle of attack with $N^s=20$: Comparison with exact solution

Fig.7은 B-스플라인을 이용하여 생성한 NACA 4412 날개단면의 기하학적 제어꼭지점, 포텐셜 패널 경계, 경계조건을 적용시킬 제어점등을 보여주고 있다. 매개변수 공간에서 균일하게 나누었지만 실제 물리적인 공간에서 패널의 크기가 계속적으로 변함을 관찰할 수 있고, 특히 제어

점이 각 패널에 2개씩 놓여 있으며, 간격이 불균일하다는 것을 볼 수 있다.

Fig. 8은 NACA 4412 날개단면을 $N^p=20$ 으로 계산한 B-스플라인 고차 패널법의 압력 분포와 200개의 패널로 계산한 저차패널법의 압력

분포를 비교하여 보여주고 있다. B-스플라인 고차 패널법의 경우 적은 수의 패널로도 동일한 정도의 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

Table 1은 Fig. 8에 대하여 양력과 항력을 본 논문의 수치해법과 저차 패널법을 사용하여 계산한 결과들을 비교하여 보여주고 있다. 미소한 계산 결과들의 차이로부터 고차 패널법의 정확성을 확인할 수 있다.

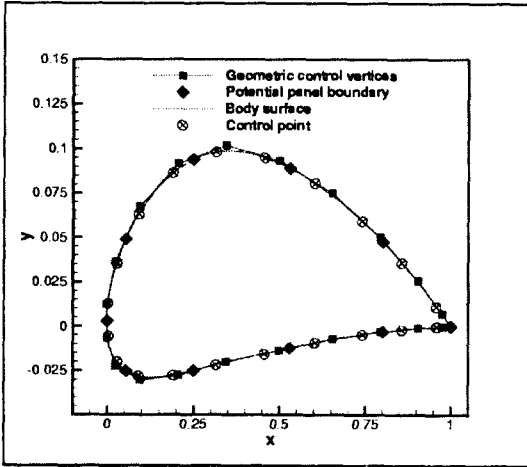


Fig. 7 Typical arrangement of the geometric control vertices, potential panel boundary, the body surface with $p=3$, $N^p=10$

Table 1 Lift and drag coefficient computed by the present method and the low order panel method for an NACA 4412 airfoil

N^p	C_L		C_D	
	Present	Lopan	Present	Lopan
$\oint(-p\hat{n})dl$	1.115	1.105	0.001	0.001
$\Delta\phi$	1.115	1.105		

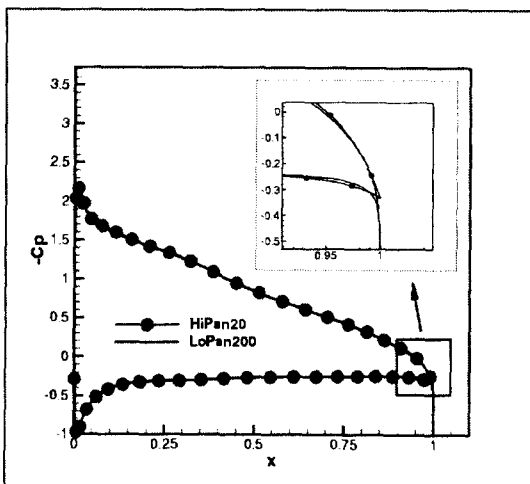


Fig. 8 Pressure distribution around an NACA 4412 airfoil at 5.73° angle of attack by $N^p=20$

Fig. 9는 NACA $a=0.8$ 캠버선과 NACA 66(Mod.) 두께를 갖는 날개가 받음각 $\alpha=5.73^\circ$ 를 갖고 전진할 때의 압력분포를 저차패널법에 의해 계산한 결과와 비교하여 보이고 있다. 역시 좋은 일치성을 확인할 수 있으며, 특히 날개 뒷날 부근의 확대 그림으로부터 명시적 압력 Kutta조건이 잘 작동하고 있음을 확인할 수 있다.

Fig.10은 해석자가 존재하는 Karman-Trefftz 단면에 대한 압력분포를 보여주고 있다. 수치계산에 사용된 단면은 Karman-Trefftz 등각사상 전의 원의 중심좌표 $x_0=0.077$, $y_0=0.077$ 및 날개 뒷날의 사이각 $\tau=7^\circ$ 로 생성되었으며 그 형상은 Fig. 11에 보인다. 단면에 유입하는 받음각은 $\alpha=9.0^\circ$ 일때, 위의 Karman-Trefftz 단면에 작용하는 양력 계수는 $C_L=L/(0.5\rho U^2 c)=1.558$ 이다. 여기서 L 은 양력, c 는 코드길이이다. 압력계수는 $C_p=(p-p_\infty)/(0.5\rho U^2)$ 으로 무차원되었다.

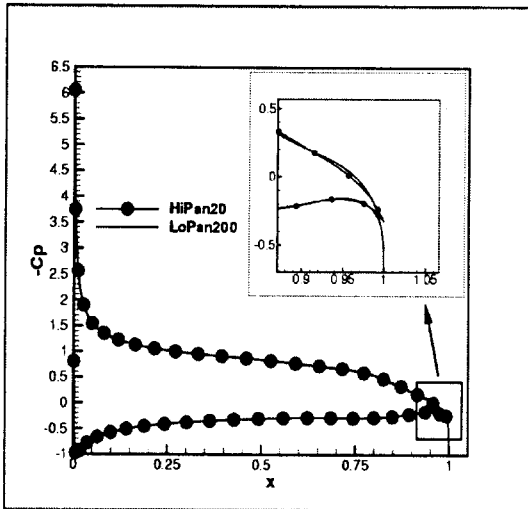


Fig. 9 Pressure distribution around an NACA66 $a=0.8$ meanline airfoil at 5.73° angle of attack by $N^p=20$

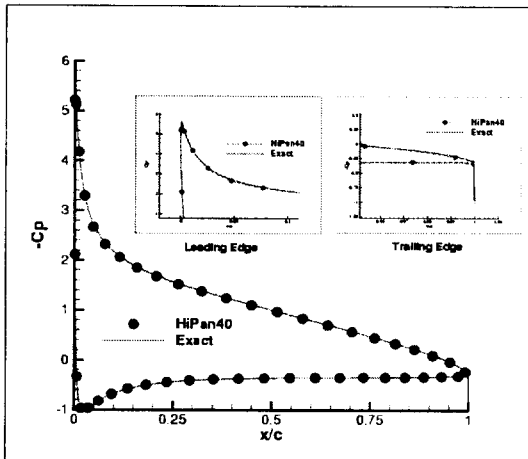


Fig. 10 Pressure distribution around a Karman-Trefftz airfoil at 9° angle of attack with $\rho=3$, $N^p=40$; Comparison with analytic solution

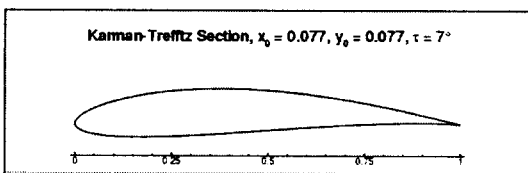


Fig. 11 Karman-Trefftz section generated with $x_0=0.077$, $y_0=0.077$, $\tau=7^\circ$

Table 2 Influence upon the lift coefficient of the number of panels for various b-spline order: exact $C_L = 1.558$

P	N^p				
	10	20	40	60	80
2	1.577	1.522	1.535	1.545	1.550
3	1.356	1.546	1.541	1.547	1.549
4	1.543	1.538	1.542	1.545	1.546
5	1.527	1.541	1.543	1.546	1.547

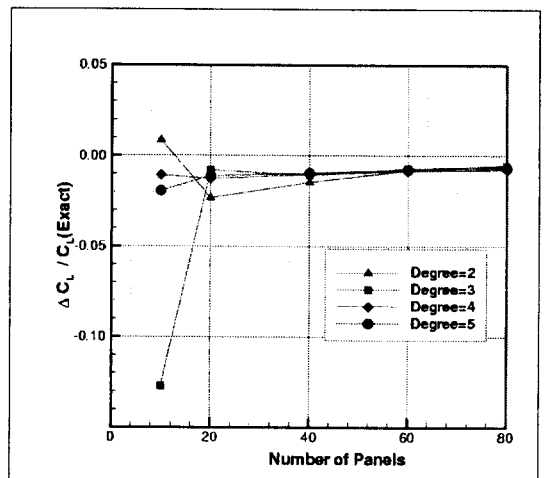


Fig. 12 Error $\Delta C_L / C_L(\text{Exact})$ in lift coefficient corresponding to Table 2

Table 2는 패널수와 B-스플라인 기저함수 차수의 증가에 따른 양력계수의 변화를 해석해와 비교하여 그 수렴성을 보여주고 있다.

또한 Fig. 12는 Table 2에서 보여준 양력계수의 오차 $(C_L - C_{L(\text{Exact})}) / C_{L(\text{Exact})}$ 를 보여주고 있으며, B-스플라인 기저함수 차수에 관계없이 $N^p > 20$ 의 조건만 만족하면, 양력계수의 최대 오차가 1.0% 정도임을 관찰할 수 있다.

Fig. 10의 날개 뒷날 부근의 확대 그림에서 보는 바와 같이, 고차패널법에 의해 추정된 압력분포의 하중이 해석해의 압력분포를 따라가지 못하고, 모두 압력하중이 적은 쪽으로 결과를 주고 있

음을 관찰할 수 있으며, 이로 인하여 Fig.12에서 보는 바와 같이 양력계수의 값이 약 1.0% 정도 낮게 추정되는 결과를 주고 있다고 생각된다. 이는 Karman-Trefftz 날개 단면의 날카로운 뒷날을 따라가지 못하기 때문에 발생한 것으로 통상 응용되는 날개 단면의 경우에는 이러한 현상이 없을 것이므로 문제가 되지 않으리라고 본다.

8. 결 언

2차원 양력체 주위의 유동을 해석하기 위한 B-스플라인 기저 고차원 패널법을 개발하였다. 물체 표면에 분포되어 있는 법선 다이폴과 쓰오스에 의한 영향함수를 특이부분과 비특이부분으로 분리하여, 특이부분은 해석적으로 적분을 수행하고 비특이부분은 Gauss 구적법을 이용하였다. 운동학적 경계조건을 적용시킬 패널의 갯수보다 포텐셜 제어꼭지점의 수가 많기 때문에 각 패널당 두개의 제어점을 선정하여 계산하였으며, 날개 끝에서의 접선방향 속도의 크기가 같다는 Kutta조건을 적용하고, 최소자승법을 이용하여 보다 안정적이고, 정확한 해를 구하였다. 계산결과 저차 패널법에 비해 상당히 적은 패널수로 같은 결과를 얻었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정연구과제(KOSEF 97-02-00-01-01-3)의 일부로 수행되었습니다. 재단의 지원에 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

- [1] Hess, J. L. and Smith, A.M.O., "Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional dies," *Journal of Ship Research*, 8, 2, 1964
- [2] Morino, L. and Kuo, C.-C., "Subsonic potential aerodynamic for complex configuration: A general theory," *AIAA Journal*, 12, 2, pp. 191-197., 1974
- [3] Lee, J.-T., A Potential based panel method for the analysis of marine propellers in steady flow, PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1987
- [4] Hsin, C.-Y., Development and Analysis of Panel Methods for Propellers in Unsteady Flow, PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1990
- [5] 문일성, 김영기, 이창섭, "포텐셜을 기저로한 패널법에 의한 프로펠러의 비정상 유동해석," 대한조선학회, 춘계학술발표회, pp. 331-336., 1994
- [6] 김영기, 패널법에 의한 프로펠러 주위의 비정상 공동 유동 해석, 충남대학교 대학원 박사학위 논문, 342p., 1995
- [7] Kim, Y.-G and Lee, C.-S., "Prediction of Unsteady Performance of Marine Propellers with Cavitation using Surface-Panel Method," *Proc., 21-st Symp. on Naval Hydrodynamics*, Office of Naval Research, Vol. IV, Trondheim, Norway, pp. 16-31., 1996
- [8] Rogers, D.F. and Adams, J.A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, 2nd Ed, McGraw-Hill., 1989
- [9] Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, 2nd Ed, Springer., 1996
- [10] Hsin, C.-Y., Kerwin, J.E. and Newman, J.N., HIPAN2: A Two-Dimensional Higher-Order Panel Method Based on B-Splines, theory and program documentation, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1993
- [11] Maniar, H.D., A three dimensional higher order panel method based on B-splines, PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., 1995
- [12] Newman, J.N., "Distribution of sources and normal dipoles over a quadrilateral panel," *Journal of Engineering Mathematics*, 20, pp. 113-126., 1986
- [13] 이창섭, 서정천, "쌍곡면 패널에의 다이폴 분포," 대한조선학회 논문집, 제 32권 제 2호,

pp. 32-42., 1995

- [14] Lee, C.-S. and Kerwin, J.E., "A B-spline higher order panel method applied to two-dimensional lifting problem," submitted for publication, 1999