

2차원 자유표면파의 부정치 역문제에 대한 정규화기법의 적용

장택수*, 최항순**

A Study on the Ill-posed Inverse Problem of Two-dimensional Waves due to Pressure Distribution Using Regularization Method

by

Taek S. Jang* and Hang S. Choi**

요 약

본 논문에서는 정수면의 일정구간에 분포한 압력에 의하여 발생하는 2차원 자유표면파에 대한 부정치 역문제를 정규화기법으로 해석하였다. 계산의 예로 정수면에 코사인 분포된 조화변동압력에 의하여 유기되는 수평속도를 입력 자료로 택하여 압력을 역추적하는 경우에 대하여 서로 다른 3가지 정규화기법을 적용하였다. 계산결과 3가지 방법 모두에서 엄밀한 해를 얻을 수 있었는데, 그 중에서도 반복 Tikhonov 정규화기법을 적용하여 얻은 해가 가장 정확하며, Landweber-Friedman의 정규화 필터가 가장 안정된 해를 주었다.

Abstract

In this paper, the ill-posed inverse problem of surface waves caused by a two-dimensional pulsating pressure distribution on the free surface is studied using the regularization method. In order to exemplify the method, a cosine pressure distribution on a limited range of the undisturbed free surface is considered. By taking the resulting horizontal velocity as input data, the corresponding pressure is determined numerically by three different regularization schemes. It is found that the iterated Tikhonov method provides with the most accurate result, while solutions obtained from the Landweber-Friedman regularization are most stable.

접수일자 : 1999년 5월 28일

* 정회원, 서울대학교 대학원

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

1. 서론

선형포텐셜이론을 가정하면 정수면의 일정 구간에 분포된 압력에 의하여 유기되는 유체장의 속도는 제1종의 Fredholm적분방정식으로 나타난다. 이 적분방정식으로 표시되는 문제의 해는 일반적으로 유일성과 수렴성이 보장되지 못하는 특성을 지니고 있다. 특히 유체장에서 예측한 속도를 이용하여 분포된 압력을 구하고자 하는 경우에는 이 문제가 더욱 심각하다. 다시 말하여 이 문제는 Hadamard의 관점에서 부정치 문제가 된다. 즉, 압력은 주어진 속도에 따라 연속적으로 변하지 않는다. 이러한 부정치 문제는 정규화방법(regularization method)으로 접근할 수 있음이 알려져 있다[1].

본 논문에서는 상기한 부정치 역문제를 정규화기법을 이용하여 해석하였다. 정규화기법으로 서로 다른 3가지 방법을 도입하였다. 즉, Landweber-Friedman의 정규화기법, Morozov의 불일치원리를 이용한 Tikhonov 정규화기법, 그리고 반복 Tikhonov 정규화기법을 다루었다. Tikhonov정규화방법에서는 Hadamard의 두번째 조건인 해의 유일성문제를 Moore-Penrose의 일반 역이론을 도입하여 해결하였다[2].

본 논문에서 전개한 해법을 예시하기 위하여 정수면의 일정구간에 코사인 분포된 조화변동압력을 상정하였다. 이 분포에 의하여 얻어지는 수평방향 유속을 일정한 수직면에서 계산하여 구한 다음 이를 입력데이터로 택하여 분포 압력을 역으로 추정하였다.

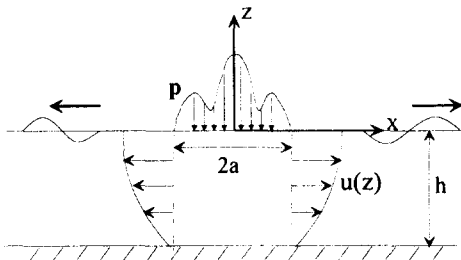


Fig.1 Definition sketch of the problem

2. 역문제의 정식화

본 논문에서는 Fig.1에 보인 바와 같이 2차원 정수면에 분포한 압력에 의하여 유기되는 파계를 고찰한다. 여기서 수심은 h로, 압력이 분포된 길이는 2a로 표시하였다. 분포된 압력이 시간조화운동을 한다고 가정하여 선형포텐셜이론을 적용하면 압력분포와 파계와의 관계가 유도된다. 속도포텐셜은 라플라스 방정식의 해이며, 주어진 경계조건을 만족해야 한다. 자유수면 경계조건은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \right) \phi = \begin{cases} \frac{i\omega}{\rho g} \bar{p} & |a| < x \\ 0 & |a| > x \end{cases} \quad (1)$$

윗 식에서 ω 는 분포된 압력의 진동수이다. 정수면위의 한 점 $x = \xi$ 에 분포된 단위 크기의 조화변동압력에 의한 속도포텐셜 $\phi_\delta(x, z; \xi, 0)$ 은 다음과 같이 고유함수의 전개식으로 표현할 수 있다[3].

$$\phi_\delta(x, z; \xi) = B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0(x-\xi)} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cosh k_j(z+h) e^{-k_j|x-\xi|} \quad (2)$$

여기서

$$B_0 = \frac{i}{\tanh k_0 h + k_0 h \operatorname{sech}^2 k_0 h}$$

$$B_j = \frac{1}{\sin(k_j h) + k_j h / \cos(k_j h)}$$

이며, $k_j (j=0, 1, 2, \dots)$ 는 다음의 분산관계식에 의하여 결정되는 파수를 의미한다.

$$\frac{\omega^2}{g} = k_0 \tanh k_0 h, \quad \frac{\omega^2}{g} = -k_j \tanh k_j h$$

식(1)에 도입한 $\left\{ i \frac{\omega}{\rho g} \bar{p} \right\}$ 를 편의상 p 로 표시하고 선형중첩원리를 이용하면, 임의의 압력분포에 의한 속도포텐셜은 아래의 적분으로 표현된다.

$$\varphi(x, z) = \int_{-a}^a \varphi_\delta(x, z; \xi) p(\xi) d\xi \quad (3)$$

만일 분포된 압력이 대칭이라면 교란된 유체장의 수평방향 속도는 다음과 같다.

$$\int_0^a f(x, z; \xi) p(\xi) d\xi = u(z) \quad (4)$$

여기서 피적분함수 f 는 식(2)로부터 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} f(x, z, \xi) = & 2ik_0 B_0 \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0 x} \cos k_0 \xi \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} 2k_j B_j \cos k_j(z+h) e^{-k_j x} \cosh k_j \xi \end{aligned}$$

윗식은 제1종의 Fredholm적분방정식으로 압력장을 속도장으로 사상(mapping)시키는 데, 이를 대수구조(algebraic structure)를 지닌 연산자 방정식으로 표현할 수 있다.

$$Kp = u \quad (5)$$

윗식에 표시한 K 는 Hilbert-Schmidt의 적분 연산자이다. 따라서 연산자 K 는 통상위상(usual topology)에서 조밀한 연산자(compact operator)[4]가 되고, 이러한 연산자의 역은 무한차원의 함수공간에서 무한연산자로 존재하게 된다[5]. 이는 식(4)가 통상위상에서 부정치 문제(ill-posed problem)가 됨을 의미한다. 이러한 부정치 문제는 해 공간의 위상구조를 변화시켜 정치시킬 수 있지만[6], 본 연구에서는 보다 체계적인 정규화기법을 적용하여 접근한다.

3. 정규화기법

3.1 Landweber-Friedman의 정규화

Hilbert공간의 직교구조를 이용하기 위하여 해 공간 X 과 데이터공간 Y 는 Lebesgue의 두번

적분가능한 함수공간 $L_2(0, a)$ 와 $L_2(-h, 0)$ 로 정의한다. 정규화를 위해 Fréchet 미분가능한 범함수 Ψ 를 도입한다.

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{2} \|Kp - u\|_\gamma^2, \quad p \in L_2(0, a) \quad (6)$$

여기서 $\|\cdot\|_\gamma = \sqrt{\int_{-h}^0 |\cdot|^2 dz}$ 이다.

그러면 범함수 Ψ 는 모든 압력분포 $\zeta \in X$ 에서 Fréchet 미분가능하게 되고, 그 미분은 다음과 같이 표시된다[2].

$$\begin{aligned} \Psi'(\zeta)p &= \text{Re} \langle K\zeta - u, Kp \rangle \\ &= \text{Re} \langle K^*(K\zeta - u), p \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

윗식에서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 각각 데이터공간 Y 와 해공간 X 에서의 내적을 나타낸다.

Riesz의 표현정리(representation theorem) [7]를 이용하면 조밀한 연산자 K 의 수반 연산자(adjoint operator) K^* 가 존재함을 알 수 있다. 한편 선형 범함수 $\Psi'(z)$ 는 위에서와 같이 확대된 복소집합 C 에서 나타낼 수 있으며, 최속강하 단계(steepest descent step)는 다음과 같다.

$$-aK^*(Kp - u) \quad (8)$$

식(8)을 이용하면 압력분포에 관한 선형 반복식을 구할 수 있고, 정규화된 해는 다음과 같이 얻어진다[2].

$$P_{m, \delta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q(m, \mu_j)}{\mu_j} \langle u_\delta, u_j \rangle P_j \equiv R_m U_\delta \quad (9)$$

여기서 (μ_j, p_j, u_j) 는 조밀한 연산자 K 의 특이계를 나타낸다.

한편 u_δ 는 유체장내에서 계측된 속도분포로서 허용된 오차수준 δ 에 대한 부등식을 만족하여야

한다.

$$\|u - u_\delta\|_Y \leq \delta$$

식(9)에서 함수 q 는 아래와 같다.

$$q(m, \mu) = [I - (1 - \alpha\mu^2)^m] \quad (10)$$

이 필터는 다른 정규화기법에 수반되는 필터에 비해 우수한 순정효과를 지닌 것으로 알려져 있고, 계수 α 는 해의 수렴을 위해 다음의 영역에 존재해야 한다[2].

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1/\|K\|^2, \quad (11) \\ m(\delta) &\rightarrow \infty (\delta \rightarrow 0) \text{ with} \\ \delta^2 m(\delta) &\rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0), \\ 1/m(\delta) &\rightarrow 0, \\ \sup\{\|R_{m(\delta)}u_\delta - p\| : \|Kp - u_\delta\| \leq \delta\} &\rightarrow 0, \\ \text{as } \delta &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

여기서 파라미터 m 은 이산화계수를 나타낸다. 이 관계식으로부터 데이터가 지닌 오차수준 범위 안에서 연산자 방정식이 성립함을 알 수 있다.

3.2 Morozov의 불일치원리를 이용한

Tikhonov 정규화

정규화를 위하여 아래와 같이 감쇄항을 가진 범함수를 도입한다.

$$M^\alpha(P, u) = \|Kp - u\|_Y + \alpha\Omega(p). \quad (12)$$

$$\Omega(p) = \int_0^a [q_0 |dp/dx|^2 + q_1 |p|^2] dx.$$

$$u \in L_2(-h, 0), \quad p \in H^1(0, a) \quad (13)$$

식(12)는 Tikhonov 범함수로 알려져 있다[1]. 함수해 공간은 Sobolev 공간 $H^1(0, a)$ 으로 정의하고, 데이터 공간은 Hilbert 공간 함수

$L_2(-h, 0)$ 로 정의한다. 식 (13)에서 Ω 는 안정화를 위한 범함수이고, q_0, q_1 는 음이 아닌 함수이다. 한편 α 는 앞 절에서 도입한 정규화계수이다. 정규화된 해 p_α 는 Tikhonov 범함수를 최소화시킴으로써 얻을 수 있다. 본 논문에서는 q_0 와 q_1 를 다음과 같이

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 0.$$

그리고 압력에 대한 경계조건은

$$dp/dx(0) = 0, \quad p(a) = 0$$

와 같이 택하였다. Hilbert 공간의 직교성을 이용해 식(12)의 Tikhonov 범함수를 최소화하면 아래와 같은 적미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_{-h}^0 f^*(z, s) p_\alpha(x) dz dx - \alpha \frac{d^2 p_\alpha}{ds^2} \quad (14) \\ = \int_{-h}^0 f^*(z, s) u(z) dz \end{aligned}$$

여기서 f^* 는 피적분함수로 f 의 공액복소수이다.

수치안정성은 매우 중요하고 또한 매우 어려운 과제인데, 본 연구에서는 Morozov의 불일치원리를 도입하여 수치 불안정성을 해결하였다. 한편 실제로 속도 $u \in L_2(-h, 0)$ 를 정확하게 계측한다는 것은 매우 어려운 일로, 단지 일정한 오차수준 $\delta > 0$ 안에서 가능한 일이다. 이러한 의미에서 계측속도 $u_\delta \in L_2(-h, 0)$ 를 앞절에서와 같이 표시할 수 있다.

$$\|u - u_\delta\|_Y \leq \delta$$

이에 따라 계측속도 $u_\delta \in L_2(-h, 0)$ 에 대한 근사 방정식을 얻는다.

$$Kp_\delta = u_\delta$$

일반적으로 위의 방정식은 해를 가질 수 없다. 왜냐하면 계측속도 u_δ 가 Moore-Penrose 의 일 반역 K^+ 의 정의역에 존재하지 않기 때문이다 [1]. 이러한 문제는 수치불안정의 원인이 된다. 본 논문에서는 Morozov 불일치원리를 정규화기 법에 적용해 최적의 정규화계수를 구함으로써 수 치 불안정문제를 해결하고자 한다. Morozov 불 일치원리는 잉여량의 $\|Kp_{\alpha,\delta} - u_\delta\|_Y$ 과 오차수준 을 같게 함으로써 정규화계수에 관한 비선형 방정 식을 얻는다.

$$\|KP_{\alpha,\delta} - u_\delta\|_Y = \delta .$$

여기서 $p_{\alpha,\delta}$ 는 다음의 방정식을 만족한다.

$$M^\alpha(p_{\alpha,\delta}, u_{data}) = \inf_{p \in H^1} M^\alpha(p, u_\delta) .$$

Tikhonov 정규화기법의 필터는 아래와 같이 단순한 형태를 지닌다.

$$q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2} \tag{15}$$

3.3 반복 Tikhonov 정규화

Cauchy함수수열의 수렴을 위해 완전한 해공간 인 Banach 공간을 도입한다[8]. 따라서 해공간 X 를 Banach 공간 $L_2(a, b)$ 그리고 데이터공 간 Y 를 Banach 공간 $L_2(-h, 0)$ 으로 정의한 다. 그러면 반복 Tikhonov 정규화기법은 아래의 연산자 방정식으로 나타낼 수 있다[2].

$$(\alpha I + K^*K)p_{m+1,\alpha,\delta} = K^*u_\delta + \alpha p_{m,\alpha,\delta} \\ m = 0, 1, 2, \dots \tag{16}$$

초기압력 $p_{0,\alpha,\delta}$ 를 0으로 놓으면 식(16)을 이 용하여 수치적인 방법으로 정규화된 해를 구할 수 있다. 그리고 반복Tikonov 정규화기법의 필터는 다음의 형태를 지닌다.

$$q_m(\alpha, \mu) = 1 - \left[1 - \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2} \right]^m, \\ m = 1, 2, \dots \tag{17}$$

이 필터는 수렴속도에서 식(15)로 나타낸 Tikonov필터에 비해 우수하다고 알려져 있으나, 수치 안정성면에서는 Landweber-Friedman의 필터(식 10참조)보다 성능이 좋지 않은 것으로 알려져 있다.

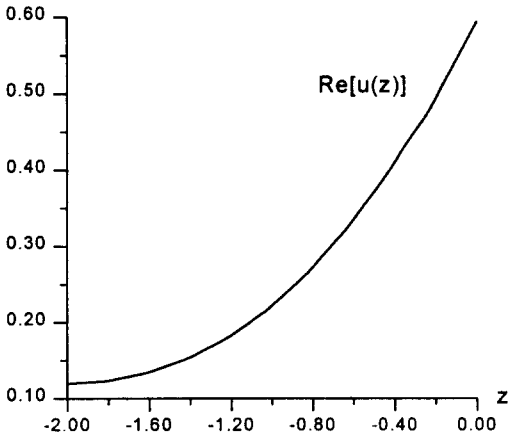
4. 수치결과

수치계산을 위하여 정수면상 $[-a, a]$ 구간에 코사인으로 분포된 압력 $p_{\cos}(x) = \cos(\pi x/2)$ 에 의하여 유기된 속도를 $x = a$ 에서 계산하여 이를 입력 데이터로 사용하였다 (Fig.2 참조). 이 데이 터에 대하여 Landweber-Friedman의 정규화기 법을 적용하여 얻은 수치해를 Fig.3에 도시하였 다. 여기서 a 와 h 는 각각 1과 2로 무차원화하 였다. 여러 가지 δ 의 값에 대하여 계산하였으나, 3가지 방법에 모두 잘 적용된 $\delta = 0.012$ 인 경우 를 아래의 계산에 택하였다.

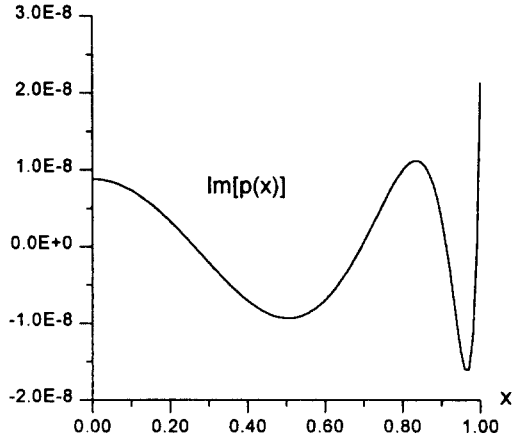
Landweber-Friedman의 최적 이산정규화계 수는 2.773×10^4 로 계산되었다. 수치해에 대한 엄밀한 비교를 위해 압력의 차이를 주어진 압력분 포 $p_{\cos}(x)$ 로 무차원화시킨 상대오차를 도입하였 다.

$$err(x) \equiv \frac{p_{\cos}(x) - p_{reg}(x)}{\|p_{\cos}(x)\|_X / \sqrt{a}}, \\ \|\cdot\|_X \equiv \sqrt{\int_0^a |\cdot|^2 dx} . \tag{18}$$

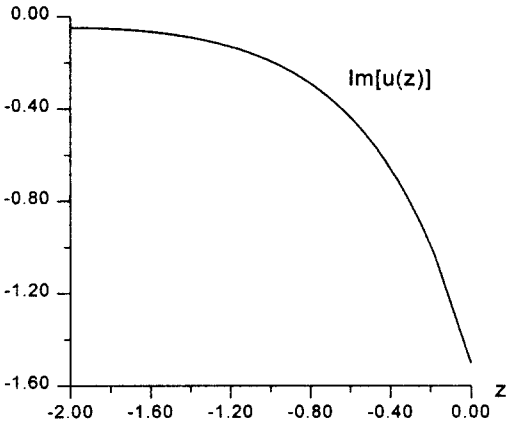
여기서 $p_{reg}(x)$ 는 정규화된 수치해를 나타낸다.



a) Real part

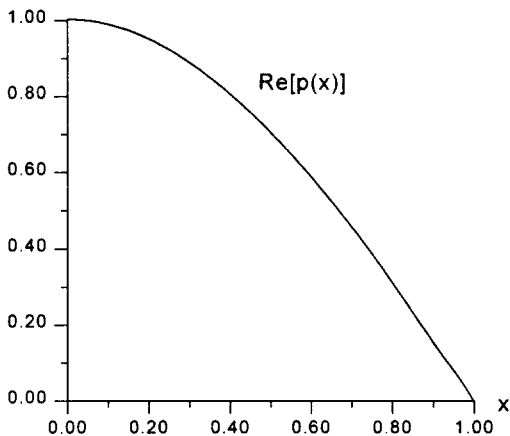


b) Imaginary part



b) Imaginary part

Fig. 2 Horizontal velocity data



a) Real part

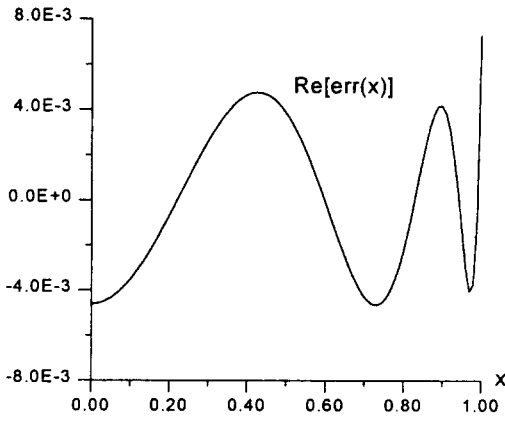
Fig. 3 Estimated pressure (Landweber-Friedman regularization)

Fig. 4에 보인 바와 같이 수치해의 실수부는 $O(10^{-3})$ 정도의 정확도를 보이며, 허수부의 정확도는 대략 $O(10^{-8})$ 수준이다.

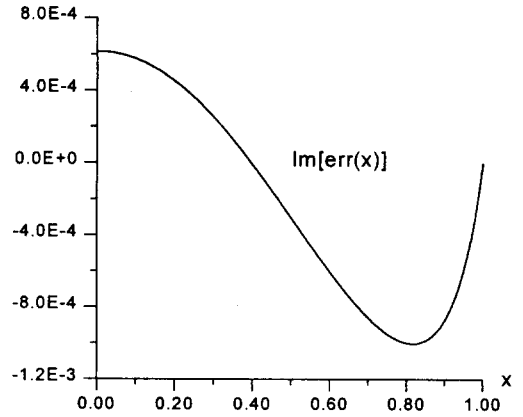
불일치원리를 이용한 Tikhonov 정규화에 의한 상대오차를 Fig. 5에 도시하였다. 오차함수의 실수부의 정확도는 $O(10^{-2})$ 정도로 나타났으며, 허수부는 $O(10^{-4})$ 정도이어서, 앞의 Landweber-Friedman의 정규화 결과보다 정확도가 떨어진다. 여기서 Tikhonov 최적 정규화계수 α 는 Morozov의 불일치원리를 적용하여 0.0078로 계산되었다.

마지막으로 반복 Tikhonov 정규화기법에 의한 수치해를 Fig. 6에 제시하였다. 여기서 정규화계수 α 는 위에서와 같은 0.0078이며, 이산정규화계수 m 은 2.742×10^3 으로 구해졌다.

이상의 수치결과로부터 반복 Tikhonov 정규화기법이 가장 정확한 해를 주고 있으며, 반면에 Landweber-Friedman의 정규화는 가장 안정한 수치해를 주고 있음을 알 수 있다. 한편 반복 Tikhonov 정규화기법은 Fig. 6b에서 관찰할 수 있듯이 상대오차가 구역에 따라 비록 절대값은 극히 적지만 심하게 변동하는 일종의 수치 불안정성을 보이고 있다.

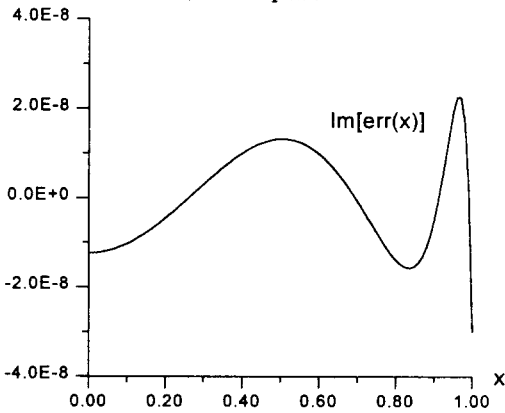


a) Real part



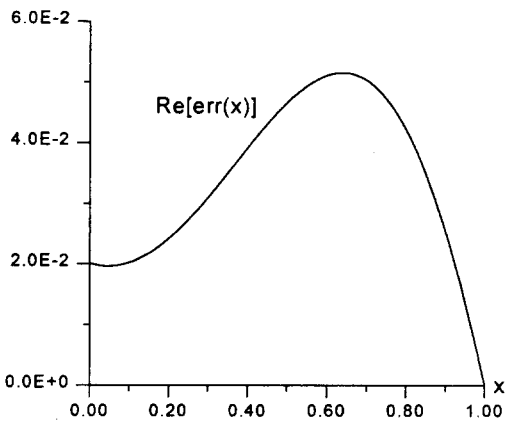
b) Imaginary part

Fig.5 Relative error(Tikhonov regularization)

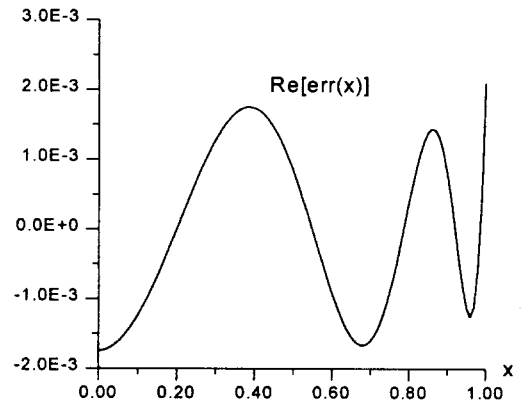


b) Imaginary part

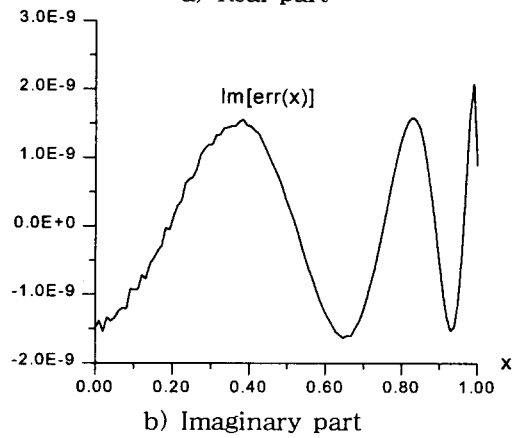
Fig. 4 Relative error
(Landweber Friedman's regularization)



a) Real part



a) Real part



b) Imaginary part

Fig. 6 Relative error
(Iterated Tikhonov regularization)

5. 결 론

본 논문에서는 압력분포에 의하여 발생하는 2차원 자유표면파에 대한 부정치 역문제를 푸는 정규화기법을 전개하였다.

계산의 예로 정수면에 코사인 분포된 조화변동 압력에 의하여 유기되는 수평속도를 입력 데이터로 택하여 압력을 역추적하는 경우에 3가지 서로 다른 정규화기법을 적용하였다. 계산결과 3가지 방법 모두를 이용하여 엄밀한 해를 얻을 수 있었는데, 그 중에서도 반복 Tikhonov 정규화기법이 가장 정확한 해를 제시하였다. 한편 Landweber-Friedman의 정규화 필터는 3가지 방법중에서 가장 안정된 해를 주었다.

참 고 문 헌

- [1] Groetsch, C.W. (1984). The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind, Pitman, Boston.
- [2] Kirsch, A. (1996). An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer Verlag, Berlin.
- [3] Wehausen, J.V. and Laitone, E.V. (1960), Water Waves, Handbuch der Physik, Vol.9, Springer Verlag, Berlin.
- [4] Naylor, A.W. and Sell, G.R. (1982), Linear Operator Theory in Engineering and Science, Springer Verlag, Berlin.
- [5] Oden, J.T. (1979), Applied Functional Analysis, Prentice-Hall International, Inc., London.
- [6] Patty, C.W. (1993), Foundations of Topology, PWS Publishing Company, Boston.
- [7] Stakgold, I. (1967). Boundary Value Problems of Mathematical Physics , Vol.1, Macmillan Co., London
- [8] Zeidler, E. (1984). Nonlinear Functional Analysis and Its Application, Springer Verlag, Berlin.