대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 7~17, March 1999

중학교 수학에서 평행공리의 의미

최 영 기 (서울대학교)

I. 머리말

수학적인 내용을 학생이 이해하려 할 때 통상적인 사고로써 자연스럽게 이해될 수 있는 부분이 있고, 수학적 훈련에 의해서 수학적인 원리가 습득되면 내재된 수학 원리에 의하여 자명하게 이해되는 부분이 있다. 예를 들면 두 삼각형이 합동이라는 것이 전자에 속하는 것으로 서로 포개어 겹쳐 놓을 수 있으면 서로 같은 것이라는 자명한 원리로 이해될 수 있고, 두 삼각형이 닮음이라는 것은 후자에 속하는 것으로 하나의 삼각형을 원하는 만큼 축소하거나 확대하는 변환의 과정을 통하여 다른 삼각형과 겹쳐놓을 수 있다는 수학적 원리에 대한 논의인 것이다. 평행선과 같이 무한대의 개념을 내포한 내용도 후자에 속한다 그러므로 후자의 경우 그 속에 내재된 수학적 원리를 깊이 통찰하지 않고 이 부분을 효과적으로 가르치는 것은 불가능한 것이다.

전미수학교사협의회가 발간한 NCTM 규준 2000 의 예비 보고서에 의하면 중급 학년 학생들은 수학 구조를 발견하고 또한 수학 구조를 부과하기도 하고, 가설을 설정하고 그것을 증명하며, 추상화와 일반화를 하는 능력이 생김에 따라 수학 교실 내에서 도전감을 느끼고 또한 도전을 하기 위한 지원을 받을 수 있도록 교사는 학생들의 수학 학습을 지원하는 교실 내의 환경을 구축하는 것이 매우 중요하다고 언급하였다. 또한 학생들이 실제로 접하게 되는 기하적인 상황이 유클리드 체계 안에서 모두 해석될 수 있는 것이 아니므로 그 상급 단계에서는 기하가 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 등으로 이루어진 연역적인 체계임을 인식시켜야 함을 강조하였다(NCTM, 1998, p. 211). 이러한 관점에서 공리체계로서의 유클리드 기하를 이해하는 것이 교사의 입장으로 중요하며 의미가 있다

이 소고에서는 교과교육의 관점에서 중학교 수학의 기하(평면도형) 영역에 기초개념을 제공하는 아래의 4 개의 명제가 실은 유클리드의 평행공리와 논리적으로 같은 명제라는 고찰을 통하여 평행선의 유일성에 내재된 다양한 수학적 원리와 공리체제를 이해하고자 하

며, 이를 통하여 수업 현장에서 유클리드 기하에 대한 흥미를 부여하고 동기를 유발시키는 데 도움을 주고자 한다. 다루고자 하는 것이 현대 수학이나 관련된 수학사를 통하여 그 의미를 암시 받을 수 있지만 Greenberg(1993)과 Brodie(1998)의 내용을 근간으로 중학교 수학의 기하 단원과 그 위상에 맞추어 논의를 전개하여 소개하고자 한다[1].

- 유클리드의 평행공리 (평행선의 유일성) : 한 직선 l과 l 위에 있지 않은 한 점 P에 대하여 P를 지나 직선 l과 평행인 직선 m이 유일하게 존재한다.

- 평행공리와 논리적으로 동치인 명제들

명제 1. 임의의 직각삼각형에서 피타고라스의 정리가 성립한다.
명제 2. 직사각형이 존재한다.
명제 3. 임의의 삼각형의 내각의 합은 $180°$이다.
명제 4. 임의의 삼각형 ABC와 임의의 주어진 선분 DE에 대하여 대응각의 크기가 서로 같은 닮은 삼각형 DEF가 존재한다.

평행공리는 경험으로 보장할 수 없는 직선에 대한 내용을 내포하고 있는 반면 논리적으로 동치인 명제들은 경험적인 면에서 자연스럽다. 20세기초에 Hilbert는 유클리드 기하학의 모든 이론을 공리적으로 완벽하게 설명할 수 있는 완비된 공리계를 주었다. 이 공리계 위에서 우리는 유클리드 기하의 모든 명제들을 직관이나 그림에 의존하지 않고 공리적으로 증명할 수 있다. 즉 Hilbert는 점, 직선, 위에 있다(예 "두 점이 한 직선 위에 있다."), 사이(예 "점 B가 점 A와 점 C사이에 있다."), 합동을 무정의 용어로 하고 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군, 연속공리군 그리고 평행공리를 포함하는 공리계를 채택하였다. 앞에서 언급한 4개의 명제가 평행공리와 동치이므로 어떠한 명제로도 평행공리와 대치하여 완비된 공리계를 줄 수 있다.

Ⅱ. 평행공리와 동치인 명제

이제부터 중학교 교과과정에 있는 임의의 서로 다른 두 점을 지나는 직선의 유일성과 삼

1) 본론에서 언급할 정리들은 Greenberg(1973)에서 발췌하거나 그로부터 유도하여 논의에 맞게 재구성하였다.

각형의 합동조건 등은 사용하지만 평행선의 존재성이나 유일성을 가정하지 않는 상태에서 논의를 전개하여 위에서 언급한 명제들이 동치임을 보이겠다. 그러므로 평행선의 존재성과 유일성에 의하여 유도된 성질 등이나 정리들은 사용할 수 없다. 이와 같이 평행공리를 사용하지 않는 기하를 중립기하(neutral geometry)라 부른다. 앞으로의 전개 과정이 결합, 순서, 합동, 연속 공리들을 다루지 못한 관계로 수학적으로 엄밀하지 못하지만 여기서는 평행공리가 의미하는 것과 그 역할에 대하여 명확히 규명하는 것에 노력을 기울일 것이다.

우리는 다음의 순서로 위의 명제들이 논리적으로 같은 명제임을 보이겠다.

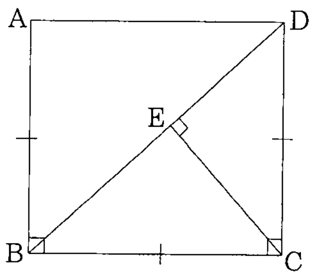
평행선의 공리 → 명제 1 → 명제 2 → 명제 3 → 명제 4 → 평행선의 공리

평행선공리가 성립하는 유클리드의 기하에서는 중학교 교과과정에 있듯이 많은 방법으로 임의의 직각삼각형에서 피타고라스의 정리를 증명할 수 있다.

이제 명제 1이 성립하면 명제 2가 성립함을 보일 것이다.

정 리 1. 모든 직각삼각형에서 피타고라스의 정리가 성립하면 정사각형이 존재한다[2]

증 명 다음의 두 밑각이 직각이고 밑변과 인접하는 두 변이 서로 합동인 사각형을 고려하자. 점 C에서 선분 BD수선을 그어 만나는 점을 E라 하자.



여기서는 유클리드 기하가 아니므로 두 위의 각 ∠A와 ∠D가 직각이라 할 수 없다. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=a$, $\overline{BE}=x$, $\overline{CE}=y$, 그리고 $\overline{CE}=z$ 라 놓자. 피타고라스의 정리가 성립하므로 $2a^2=(x+z)^2=x^2+z^2+2xz$ 이다. 또한 $a^2=x^2+y^2$, $y^2=xz$ 를 얻는다.

$$\overline{CD}^2 \cdot \overline{BE}^2=(\overline{CE}^2+\overline{DE}^2)(\overline{BC}^2-\overline{CE}^2)$$
$$= y^2a^2 - y^4 + z^2a^2 - z^2y^2 = y^2a^2 - (xz)^2 + z^2(x^2+y^2) - z^2y^2$$

2) 이 정리의 기본 착상은 Brondie(1998)에 기인한다.

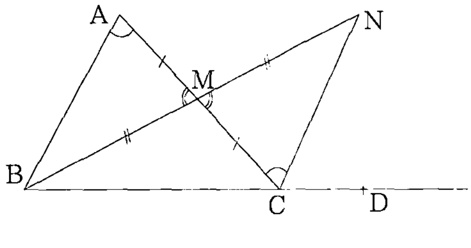
따라서, $a^2x^2 = y^2a^2$ 이고 $x^2 = y^2 = xz$ 이다. 즉 $x = y = z$ 이다. 그러므로 △BCD, △BCE 와 △CDE 가 이등변 삼각형이 된다. 그러므로 ∠EBC =∠CDE, ∠EBC =∠BCE 와 ∠ECD =∠CDE 을 얻는다. (삼각형의 합동을 이용하여 이등변 삼각형의 두 밑각이 같음을 증명할 수 있다.) ∠BCD+∠ECD=90° 이므로 ∠EBC=∠CDE=45° 을 얻게 된다. 이제 △ABD 와 △CDB 을 고려하자. 두 삼각형은 대응하는 두 변과 그 사이에 끼인각이 같으므로 합동이다. 그러므로 ∠A 도 직각이고 선분 DA 의 길이도 a 가 된다. 같은 방법으로 ∠D 도 직각임을 보일 수 있다. 그러므로 사각형 ABCD 는 정사각형이다.

물론 같은 두 개의 정사각형을 이어 붙여 정사각형이 아닌 직사각형도 얻을 수 있다.

이제 직사각형이 존재하면 임의의 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 증명하자. 이것을 증명하기 위해 우선 평행공리를 사용하지 않는 기하, 즉 중립기하(neutral geometry)에서 얻을 수 있는 성질들을 다루겠다. 중학교 교과과정에 있듯이 평행선이 유일하게 존재하는 경우에는 삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다. 그러나 평행선의 개념을 사용하지 않고도 다음의 성질들은 알 수 있다.

정 리 2. 삼각형의 하나의 외각은 인접하지 않는 두 내각들보다는 크다.

증 명 ∠ACD 가 ∠A 보다 크다는 것을 보이자. 선분 AC 의 중점을 M 이라 하자. 선분 BM 을 연장하여 선분 BM 과 선분 MN 의 길이가 같게 점 N을 정하자. 그러면 △AMB 와 △CMN 은 합동이고 ∠A 와 ∠MCN 은 크기가 같다. 그러므로 ∠ACD 는 ∠A보다 크다. 마찬가지로 맞꼭지각을 이용하여 ∠ACD 가 ∠B 보다 크다는 것을 보일 수 있다.

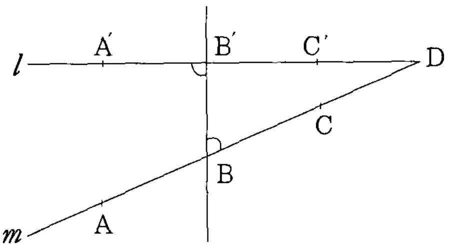


따 름 정 리 3. 삼각형에서 임의의 두 각의 크기의 합은 180° 보다 작다.

증 명 삼각형 ABC 에서 임의의 두 각 ∠BAC 와 ∠ACB 의 합이 180° 보다 크거나 같다면 ∠BAC 의 크기가 ∠ACD 의 크기보다 크거나 같게 되어 정리 2 에 의하여 모순이다.

따름정리 4. 한 직선에 의해 잘린 두 직선이 같은 엇각을 갖게 되면 두 직선은 평행하다.

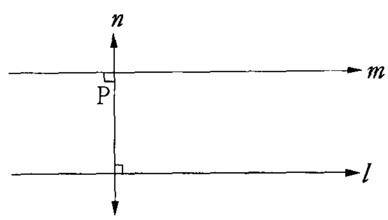
증 명 각 $\angle A'B'B$와 $\angle B'BC$가 같음에도 직선 l과 직선 m이 D에서 만난다고 하자. 그러면 $\triangle B'BD$에서 한 외각이 인접하지 않는 내각과 같게 되어 정리 2에 모순이 된다.



여기서 주의할 것은 따름정리의 역이 평행선이 유일하다는 조건이 없는 한 항상 성립하는 것은 아니라는 것이다.

따름정리 5. 임의의 직선 l에 대하여 l 위에 있지 않는 점 P에 대하여 P를 지나서 l과 평행인 직선 m이 적어도 하나 존재한다.

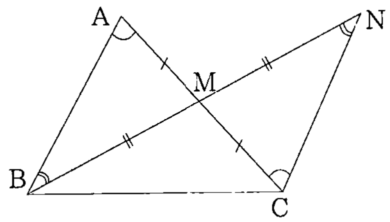
증 명 P에서 직선 n에 수직인 직선 m을 긋는다. 그러면 엇각이 같으므로 직선 m과 직선 l이 평행이다.



위의 정리는 평행선의 존재성을 보여주고 있지만 결코 평행선이 유일하다는 것은 아니다.

정 리 6. 임의의 삼각형 $\triangle ABC$ 의 한 각 $\angle ABC$ 를 생각하자. 그러면 내각의 합이 $\triangle ABC$ 와 같고 한 각의 크기가 $\angle ABC$ 의 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같은 삼각형이 존재한다.

증 명



정리 1 과 같이 $\triangle BNC$ 를 만든다. 그러면 $\triangle AMB$ 와 $\triangle CMN$ 이 합동이므로

$$(\triangle ABC)\text{의 내각의 합} = \angle A + \angle ABM + \angle MBC + \angle MCB$$
$$= \angle A + \angle MNC + \angle MCN + \angle MCB$$
$$= (\triangle BNC)\text{의 내각의 합}$$

또한 $\angle MBC$ 나 $\angle MNC$ 의 둘 중의 하나는 $\angle ABC$ 의 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

정 리 7. 임의의 삼각형 $\triangle ABC$ 의 세 내각의 합이 $180°$ 보다 작거나 같다.

증 명 $\triangle ABC$ 의 내각의 합이 $180°$ 보다 크다고 하자. 그러면 $\triangle ABC$ 의 내각의 합을 $180° + p$, $p>0$ 로 나타낼 수 있다. 정리 6 에 의하여 우리는 $\triangle ABC$ 와 내각의 합이 같으면서 한 각의 크기가 $\angle A$ 의 반의 크기와 같거나 작은 삼각형을 만들 수 있다. 정리 6 을 n 번 적용하면 한 각의 크기가 기껏해야 $1/2^n \times A$ 의 크기를 갖는 삼각형이 존재한다. p 에 대하여 n 을 충분히 크게 하면 A 의 크기의 $1/2^n$이 p 보다 작게 할 수 있다.

즉 한 각의 크기가 기껏해야 p 이고 내각의 합이 $\triangle ABC$ 와 같은 삼각형이 존재한다. 그러므로 다른 두 내각의 크기는 $180°$ 보다 크거나 같다. 그러나 이것은 따름정리 3 에 대하여 모순이다. 그러므로 $\triangle ABC$ 의 내각의 합은 $180°$ 보다 작거나 같다.

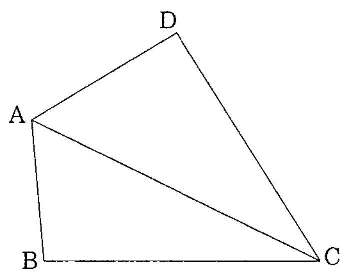
정 리 8. 사각형의 내각의 합은 360°보다 작거나 같다.

증 명 □ABCD를 임의의 사각형이라 하자. 그러면 대각선 AC에 의해 두 삼각형 △ABC와 △ACD로 나누어진다. 정리 7에 의하여

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA \le 180°$

$\angle D + \angle DAC + \angle ACD \le 180°$

그러므로 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D \le 360°$



삼각형의 결손을 다음과 같이 정의한다.

정 의. 결손 (△ABC)=180° − △ABC의 내각의 합

정리 8에 의하여 모든 삼각형의 결손은 0보다 크거나 같다. 그리고 △ABC의 내각의 합이 180°이라는 것과 결손 (△ABC) = 0이라는 것은 같은 의미이다.

정 리 9. △ABC가 임의의 삼각형이고 D가 B와 C 사이의 점일 때 다음이 성립한다.

결손 (△ABC) = 결손 (△ABD) + 결손 (△ADC)

증 명

결손 (△ABD) + 결손 (△ADC)

$= 180° - (\angle BAD + \angle B + \angle BDA) + 180° - (\angle ADC + \angle C + \angle CAD)$

$= 180° + 180° - (\angle BDA + \angle ADC) - (\angle A + \angle B + \angle C)$

$= 180° - (\angle A + \angle B + \angle C)$

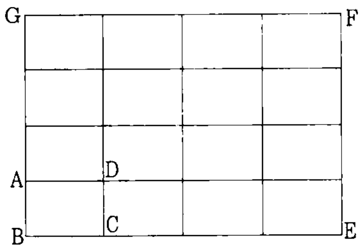
= 결손 (△ABC)

이제 명제 2가 명제 3을 이끌게 됨을 증명하자.

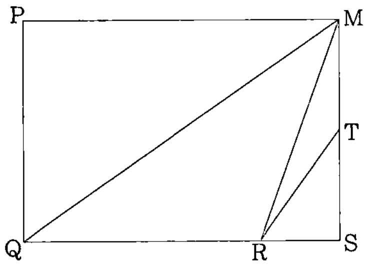
정 리 10. 직사각형이 존재하면 모든 삼각형의 내각의 합은 180° 이다.

증 명

하나의 직사각형 □ABCD 가 존재하면 직사각형을 계속 이어서 붙임으로서 임의의 큰 직사각형을 얻을 수 있다.



위의 예를 보면 □GBEF 의 내각의 합은 360° 이다. 그러므로 직각삼각형 △FBE 의 내각의 합도 180° 이다. 이제 우리는 모든 직각삼각형의 내각의 합이 180° 인 것을 증명하고자 한다. △RST 를 임의의 직각삼각형이라고 하자. 그리고 △RST 를 충분히 큰 직사각형에 끼워 넣는다.

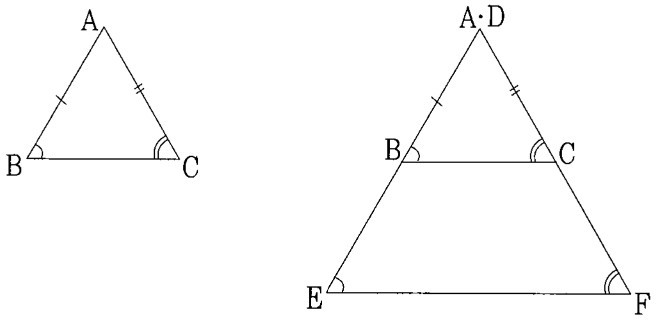


그러면 직각삼각형 △MQS 의 내각의 합은 180° 이다. 즉 결손이 0 이다. 앞의 정리에 의해서 결손 (△QMR) = 0 이고 결손 (△MRS) = 0 이다. 또한 결손 (△MRS) = 0 이므로 결손 (△MRT) = 0 이고 결손 (△RST) = 0 이다. 즉 직각삼각형 RST 의 내각의 합은 180° 이다. 임의의 직각삼각형 △ RST 에 대하여 내각의 합이 180° 이므로 모든 직각삼각형의 내각의 합도 180° 이다. 임의의 삼각형은 두 개의 직각삼각형으로 분리할 수 있고 직각삼각형들의 결손이 0 이므로 임의의 삼각형의 결손도 0 이고 그러므로 모든 삼각형의 내각의 합은 180° 이다.

다음으로 명제 3이 성립하면 명제 4가 성립함을 보일 것이다. 즉 모든 삼각형의 내각의 합이 180°이면 임의의 삼각형 $\triangle ABC$과 임의의 주어진 선분 DE에 대하여 대응각의 크기가 서로 같은 닮은 삼각형 $\triangle DEF$가 존재함을 증명한다.

정 리 11. 모든 삼각형의 내각의 합이 180°이면 임의의 삼각형 $\triangle ABC$와 임의의 주어진 선분 DE에 대하여 대응각의 크기가 서로 같은 닮은 삼각형 $\triangle DEF$가 존재한다.

증 명 일반성을 잃지 않고 선분 AB보다 선분 DE가 길다 하자. 선분 DE 위에 선분 AB를 놓고 점 E에서 직선을 그어 선분 DE와 그 직선이 이루는 각이 $\angle ABC$가 되도록 하고 또한 그 직선이 선분 AC의 연장선과 만나는 점을 F라 하자. 이제, $\angle A=\angle D$, $\angle ABC=\angle DEF$이고 모든 삼각형의 내각의 합이 180°로 같으므로 $\angle BCD$와 $\angle EFD$가 같게 되어 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$가 닮음이다.



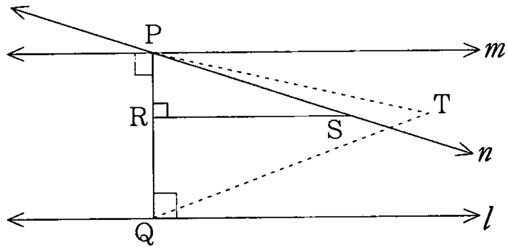
이제 마지막으로 임의의 삼각형 과 임의의 주어진 선분에 대하여 대응각의 크기가 서로 같은 닮은 삼각형이 존재하면 유클리드의 평행공리가 성립함을 보일 것이다.

정 리 12. 닮은 삼각형이 존재하면 평행선의 유일성이 성립한다. 즉 주어진 한 직선 과 직선 위에 있지 않은 한 점에 대하여 그 점을 지나 주어진 직선과 평행인 직선이 유일하게 존재한다.

증 명

직선 l 위에 있지 않은 점 P에 대하여 직선 PQ와 수직인 직선 m을 그으면 따름정리 4에 의하여 직선 l과 직선 m은 평행이다. 이 때 직선 n 을 점 P를 지나는 임의의 직선이라

하자. 또한 직선 n 위의 임의의 점 S에서 선분 PQ에 수선을 그어 그 수선의 발을 R이라 하자. 정리의 조건에 의하여 삼각형 $\triangle$PRS과 선분 PQ에 대하여 닮음이 되는 삼각형 $\triangle$PQT가 존재한다. 닮은 삼각형의 조건에 의하여 $\angle$RPS=$\angle$QPT이므로 점 T는 n선상에 있게 되고 또한 $\angle$RPS=$\angle$PQT =90°이므로 점 T는 l 선상도 있게 되어 직선 n은 l과 만나게 된다. 직선 n이 임의의 직선이므로 직선 m이 유일한 평행선이 된다.



Ⅲ. 결 론

앞에서의 논의를 통하여 필자는 평행공리와 언급한 4개의 명제가 동치임을 보였다. 즉 평행공리와 각각의 명제들이 전혀 다른 의미를 갖고 있는 듯하게 생각되지만 실은 같은 의미이고 다른 표현 양식을 갖고 있을 뿐이다. 그러므로 어떤 평행선의 유일성이 가정되지 않는 기하학의 체계에서 우리가 우연히 내각의 합이 180°보다 작은 삼각형을 발견했다면 그 체계에서는 직사각형이 존재하지 않고, 그 사실로써 우리는 모든 삼각형의 내각의 합이 180°보다 작다라는 결과를 얻을 수 있다. 또한 닮은 삼각형은 합동인 경우밖에 없고 직각삼각형에서도 피타고라스의 정리가 성립하지 아니함을 알 수 있다.

역사적으로 볼 때 평행선의 유일성을 가정하지 않은 기하학은 18세기 무렵에 연구되었다. 이 기하학은, 유클리드 기하학과 마찬가지로 물리적 공간을 기술하는데 사용할 수 있고 실제로 아인슈타인의 상대성이론을 기술하는데 중요한 역할을 한다. 또한 이러한 유클리드 기하학이 아닌 기하학의 존재성은 자연 과학뿐만 아니라 철학 등 제반 학문 분야에 깊은 영향을 미쳤다.

이와 같이 평행선의 유일성에 내재된 수학적 원리는 다양하고 의미가 깊다. 그러므로 중학교 수학의 기하 영역에서 중요한 의미를 지니고 있는 직각삼각형에서 피타고라스의 정리가 성립한다는 것과, 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것과, 닮은 삼각형이 존재한다는 것이 본질적으로는 유클리드의 평행공리와 같은 의미라는 통찰은 교사에게 중학교 수학에 대

한 새로운 시야를 갖게 하여주고 그로 인하여 수업 현장에서 수학에 대하여 깊이 생각하고 탐구하는 학생에게 유클리드 기하에 대한 흥미를 부여하고 동기를 유발시키는데 도움을 줄 수 있으리라 사료된다. 예를 들어 피타고라스 정리에 대한 여러 가지 증명방법이 존재하는 것과 같이, 동치인 삼각형의 내각의 합이 180°라는 명제도 다양한 증명방법이 존재함으로 이것을 학생 스스로가 탐구하게 하여 한 가지 명제에 대한 다양한 증명의 특성을 경험하게 하는 것도 의미가 있다.

참 고 문 헌

Brodie, S. (1998). The pythagorean theorem is equivalent to the parallel postulate, http://www.cut-the knot.com/triangle/pythpar/PTimplies PP.htm.

Greenberg, M. J. (1973). *Euclidean and non-Euclidean geometries : Development and history.* W. H. Freemann and Company.

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft.* Reston, VA : Author.

The Meaning of the Parallel Postulate in the Middle School Mathematics

Younggi Choi(Seoul National University)

The purpose of this note is to give insights into the role of parallelism to the middle school mathematics. According to NCTM(1998), the middle grades mathematics classroom should be a place in which students regularly engage in thoughtful activity that relates to their emerging capabilities of finding and imposing structure, conjecturing and verifying, and engaging in abstraction and generalization. In this aspect it is desirable to reinvestigate Euclidean Parallel Postulate in the axiomatic point of view in the level of the middle school mathematics. Reconstructing the contents Greenberg(1993), and we explain the statements which are logically equivalent to the Parallel Postulate for mathematics teachers in the middle school.