대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 19~37, March 1999

학교 수학의 변수 개념 학습과 관련된 몇 가지 지도 문제에 대하여

김 남 희 (문성중학교)

Ⅰ. 들어가며

수학교육 연구에서 변수가 대수 중심의 학교 수학을 이해하는데 중요한 역할을 하는 기본 개념이라는 사실은 이미 드러난 바 있다(Schoenfeld & Arcavi, 1988; Ericksen, 1988). 그리고 그 동안 변수 개념 지도에 관한 제 연구를 통해 변수 개념 지도의 실제를 평가하고 반성하기 위한 이론적인 논의도 충분히 이루어져 왔다(Davis, 1975; Rósnick, 1981; Küchemann, 1981; Kieran, 1989, 1992; Freudenthal, 1983; Wagner, 1983; 김남희, 1992, 1997). 본 고에서는 선행 연구에서 밝혀진 이론적 토대를 기초로 하여 학교수학에서 바람직한 변수 개념 형성을 위해 재고해 보아야 할 몇 가지 문제들에 대보고자 한다. 특히 학교 수학의 내용 중 변수가 명시적으로 다루어지는 부분은 아닐지라도 변수 개념 형성에 영향을 줄 수 있는 지도 내용을 중심으로 논의해 보고자 한다. 이를 위해 현행 교과서에 제시된 지도상의 실례를 들면서 현재 학교 수학에서 대수적 언어인 변수 개념과 변수로 표현되는 문자식의 지도에 대한 실태를 확인해 볼 것이다. 그리고 학교 수학의 변수 개념 지도와 관련하여 대수적 언어의 교수-학습상의 결함이 쉽게 관찰되는 부분으로서 그 동안 무의식중에 간과되어왔던 문제들, 다시 말하면 변수 개념 형성을 위해 기존 지도에서 소홀히 다루어져 왔다고 생각되는 측면들을 지적하고 이에 대한 지도상의 보완점 내지는 개선방안에 대한 의견을 제시할 것이다.

Ⅱ. 논 의

본 장에서 제시하고 있는 7가지 내용들은 편의상 독립적으로 다루어졌지만 관점에 따라

서는 서로 긴밀하게 연관된 주제들일 수도 있다. 물론 여기서 제시된 내용들이 변수 개념 지도에서 나타나는 모든 문제점을 망라하고 있는 것은 아니다. 아래에 제시된 대부분의 예들은 수학에서 변수가 명시적으로 다루어지는 함수 단원이 아니더라도 변수의 의미와 그 사용에 대한 이해를 지도할 수 있는 학습 영역이 상당히 많이 존재한다는 것을 지적해주는 실질적인 설명이 되리라고 본다.

1. 초등수준에서 자리지기에 대한 기호 사용에 대하여

학교 수학에서 무엇인가를 대신하는 자리지기(place holder)로서의 변수 개념은 학생들이 변수를 명시적으로 다루기 훨씬 이전인 초등학교 시절부터 자주 접하게 되는 개념이다. 초등학교 수학 교과서를 살펴보면 주어진 식에 포함된 □나 ○에 알맞는 수를 구하여 넣는 문제가 많이 다루어지고 있음을 알 수 있는데 이때 사용되는 □나 ○의 의미는 이후 방정식 학습에서 미지수로 사용되는 즉, 방정식의 해에 대한 자리지기로써의 변수 개념이다. 수학 언어로서의 변수는 수학적 표현에서 자리지기 기호에 대한 그 이름(주로, 문자로 표현되는)을 임의적으로 선택할 수 있다는 자유성을 갖지만, 한 문맥 내에서 서로 상이한 대상에 대해서는 같은 이름을 사용하지 않는다는 형식적 규칙을 따라야 한다. 따라서 대수식에서 자리지기에 대한 기호 혹은 문자의 사용은 변수로서의 문자 사용에 대한 이해의 문제와 관련되기 때문에 교수학적인 주의가 필요하다.

그리고 이에 대한 주의는 변수 개념이 정의되고 명시적으로 사용되는 중학교 시기 이전, 다시 말하면 변수 개념을 조직하기 위한 구체적인 활동이 존재하는 초등학교 시기에서부터 요망되는 것이다. 초등 수학에서 자리지기 기호 사용에 대한 실례를 들어보자.

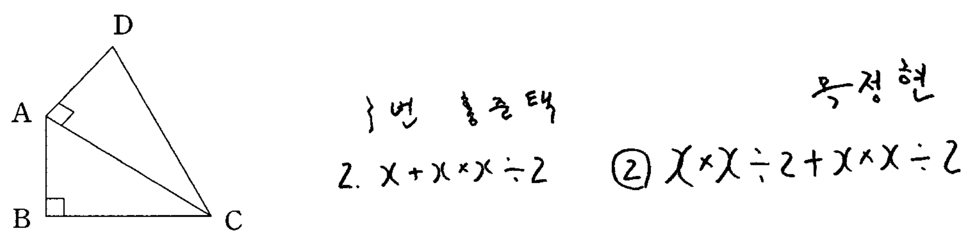
〈표 1〉의 [예 1]은 수식에서 자리지기 기호가 하나 뿐이기 때문에 학생들에게 혼란을 줄 여지가 없고 [예 2]는 일상언어적 표현이기 때문에 수학적 표현에서 요구되는 표현의 엄밀성이 다소 덜하게 느껴진다[1]. 따라서 같은 기호 □을 사용하는 것에 특별한 제한이 부과되지 않지만 [예 3]과 [예 4]는 상황이 다르다. 모든 수식에 동일하게 쓰여진 기호 □는 의미상의 혼란을 일으킬 수 있다. [예 3]에서 처음 나오는 □의 값은 12인데, 그 다음의 □에도 12를 넣으라는 것인가? 역시 □+□+□=□에서의 □의 값은 서로 같은 것인가? 다른 것인가? [예 4]의 경우도 5의 2배는 10 따라서 □=10 그러면 5×□=□는 5×10=10이 되는 것이 아닌가? 엄밀성이 요구되는 수학적 표현에서 자리지기에 대한 기호

1) 일상언어에서는 '깊은 밤에 밤을 구워먹는다' 처럼 서로 다른 의미이지만 같은 표현이 사용되는 것이 허용되지만 '$3+x=x$' 와 같은 수학적 표현은 불능을 의미한다.

〈표 1〉 초등 수학 교과서의 자리지기 사용의 예(1)

[예 1] 5 − □ = 4
[예 2] □안에 알맞은 수를 넣으시오. 48 은 10 개씩 □묶음과 낱개가 □개 (초등 1학년 수학 교과서 '덧셈과 뺄셈', ' 두 자리의 수' 단원에서)
[예 3] 4 개씩 3 묶음이면 □개입니다. □+□+□=□ 모두 □개입니다.
[예 4] 5 씩 2 묶음이면 10   8 + 8 = □ 5의 2배는 □   8 × □ = □ 5 × □ = □ (초등 2학년 수학 교과서 '곱의 기초' 단원에서)

가 둘 이상임에도 불구하고 한 문맥 내의 서로 상이한 대상에 대하여 같은 기호를 사용하는 것은 재고의 여지가 있다. 물론 초등학생들은 □의 의미를 단순히 답을 써넣는 빈칸이라고 생각하고 별다른 의문없이 문제를 해결할 수도 있다. 그러나 초등 수준에서 자리지기에 대한 통일된 기호 사용으로 인해 학생들이 8 × □ = □와 같은 대수적 표현을 자주 경험하게 되면 이후 변수로 사용되는 문자를 학습하고 난 후에도 위와 같은 식을 $8 \times x = x$ 로 형식화하는 오류를 범할 가능성이 있다. 식 $8 \times x = x$ 은 $x \neq 0$ 인 경우에는 불능인 것이다.



〈그림 1〉 중학교 1학년 학생들 답안의 예

실제로 이러한 현상은 중학교 1 학년 학생들이 문자식을 구성하는 과정에서 흔히 발견되고 있다. 연구자가 재직하고 있는 서울 소재 문성중학교 1 학년 학생들에게 〈그림 1〉에서

〈표 2〉 초등 수학 교과서의 자리지기 사용의 예(2)

[예 5] 규칙찾기

$\boxed{1} \longrightarrow 2$
$\boxed{2} \longrightarrow 3$
$\boxed{3} \longrightarrow 4$
$\triangle\ {+1}$
$\boxed{4} \longrightarrow 5$

[예 6]

$\boxed{3} \longrightarrow 6$
$\boxed{4} \longrightarrow 7$
$\boxed{5} \longrightarrow 8$
$\triangle$
$\square \longrightarrow \bigcirc$

[예 7]

$\boxed{2} \longrightarrow 7$
$\boxed{8} \longrightarrow 13$
$\boxed{9} \longrightarrow \bigcirc$
$\boxed{5} \longrightarrow \bigcirc$

(초등 2학년 수학 교과서 '여러 가지 문제' 단원에서)

[예 8] 323×3 의 계산

$300\times3=\square$
$20\times3=\square$
$3\times3=\square$

[예 9] 284 ÷ 2 의 계산

$200\div2=\square$
$80\div2=\square$
$4\div2=\square$

[예 10] 나눗셈이 맞았는지 곱셈으로 알아보시오

$63\div3=21 \longrightarrow \_\times\_=\square$

(초등 3 학년 수학 교과서 '곱셈', '나눗셈' 단원에서)

[예 11] □ 안에 +, −, ×, ÷ 중 알맞는 것을 넣어 참이 되는 식을 만들어라.

$3\square3\square3\square3=1,\qquad 3\square3\square3\square3=10$

(초등 5 학년 수학 교과서 '여러가지 문제' 단원에서)

[예 12] $\dfrac{\triangle}{\square}\div\dfrac{☆}{\bigcirc}=\dfrac{\triangle}{\bigcirc}\times\dfrac{\bigcirc}{☆}$ ('분수의 나눗셈' 단원에서)

왼쪽에 제시된 것과 같은 사각형 ABCD를 그려주고 넓이를 구하는데 필요한 변의 길이에 대해 적당한 문자를 사용하여 사각형의 넓이를 구하는 식을 구성하는 문제를 제시하면 〈그림 1〉에 제시된 학생의 답안과 같이 서로 다른 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$의 길이에 대해 같은 문자 x를 사용하여 $x\times x\div2+x\times x\div2$ 라는 답안을 제시하는 학생들을 종종 발견할 수 있다.

물론 중학교 학생들에게서 보이는 위와 같은 오류의 원인에 대해서 여러 가지 해석이 가능하겠지만 초등 수준에서 자리지기에 대해 통일된 기호를 사용해 온 경험과 전혀 무관하다고 단정하기 어렵다. 그렇기 때문에 위의 [예 3] 은 ○ + ○ + ○ = △로, [예 4] 는 5 × ○ = □, 8 × ○= □로 표현하는 것이 보다 적절하리라고 본다.

〈표 2〉의 교과서 제시 내용에서 [예 5], [예 6], [예 7], [예 12] 와 같이 □, ○, ⬭, ⌂, △, ☆ 등의 다양한 기호를 이용하거나, [예 8]과 같이 기호의 크기 □, ▭, ▭ 로 구분하거나, [예 10] 과 같이 __, □로 구분하는 등의 의식적인 노력이 보다 절실히 요구되는 것이다[2]. 위에서 지적한 바와 같이 [예 9] 나 연산 변수가 적용된 [예 11] 과 같은 대수적 표현은 이 후에 변수로 사용된 문자식을 다루고 그 의미를 해석하는 상황에서 학생들에게 인지적인 혼란을 줄 가능성이 있다는 사실을 배제할 수 없다. 수학의 언어는 일종의 형식적인 언어체계로서 지시하는 대상이 명확하게 구분되는 엄밀성이 요구되는 바, 이에 대한 올바른 교수 - 학습은 이후 변수 개념의 의미와 그 사용에 대한 토대가 될 것이다. 변수의 본질이나 그 사용에 대한 이해는 점진적으로 형식화되어가는 것이기 때문에 변수 이름이 서로 다른 문자로 표현될 경우에라도 그것들이 같은 값을 가지는 경우는 있을 수 있지만 서로 같은 이름으로 표현된 변수는 동일한 문맥에서는 항상 같은 값을 가져야 한다는 수학의 형식언어의 규칙이 초등수준에서부터 자연스럽게 경험될 수 있어야 할 것이다.

2. 집합단원에서 문자로 이루어진 집합과 그러한 집합의 연산을 다루는 것에 대하여

집합 단원의 교과서 내용을 보면 $\{a, b, c\}$, $\{x, y, z\}$ 와 같은 문자의 집합을 흔히 발견할 수 있는데 문자를 원소로 하는 집합의 사용은 변수 개념의 인지적 장애로서 Wagner(1983)가 지적한 바 있는 서로 다른 문자는 항상 다른 대상을 의미한다는 생각을 초래할 수 있다. 이에 대한 자세한 설명을 위해 현재 사용되고 있는 중학교 1학년 수학 교과서의 내용을 예로 들어보자.

〈표 3〉의 [예 1] 에서는 집합 $\{x, y, z\}$ 의 원소의 개수로 정답 3을 요구하고 있고 실제 학교 현장에서도 그렇게 지도되고 있지만 사실상 $x=y=z$ 인 경우, x, y, z 중 어느 두 개의 값이 같을 경우, x, y, z 가 모두 다른 값일 경우에 따라 각각 정답은 1, 2, 3 중의 하나가

2) 초등 교과서에 제시된 수식의 자리지기는 한 자릿수, 두 자릿수, 세 자릿수에 따라 □의 넓이를 달리하여 표현하거나 분수의 계산에서는 분자나 분모, 분수, 대분수에 따라 $\frac{3}{2} \times \frac{\square}{4} = \square = \square$ 와 같이 □의 넓이나 길이를 달리하는 암묵적 규칙이 부분적으로나마 관찰되지만, 대부분의 수식에서 자리지기 기호는 모두 동일한 기호 □로 표현되고 있다.

〈표 3〉 중학교 1학년 수학 교과서에 사용된 문자 집합의 예

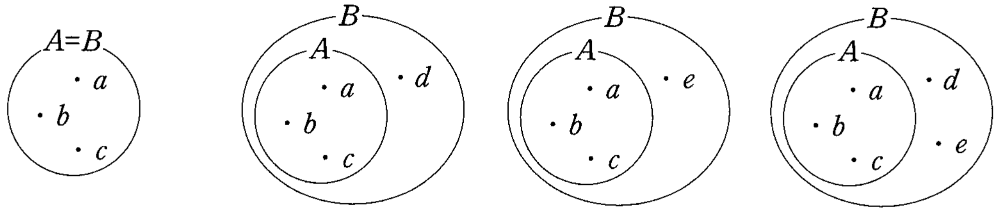
[예 1] 문제 : 다음 값을 구하여라. (3) $n(\{x, y, z\})$ [예 2] 문제 : 두 집합 사이의 관계를 벤 다이어그램 및 포함 관계의 기호를 써서 나타내어라. (1) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b, c, d, e\}$ [예 3] 문제 : 다음에서 집합 A와 집합 B의 교집합 $A\cap B$을 구하여라 . (1) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, a, c\}$ (중 1 수학 교과서 '집합과 자연수' 단원에서)

될 수 있다. 역시 [예 2]에서도 교과서의 정답은 아래 〈그림 2〉의 [경우 4]를 요구하고 있지만 사실상 문자 d, e가 서로 같으냐 다르냐에 따라서 또는 그들이 문자 a, b, c중 어느 것과 같으냐 다르냐에 따라서 아래의 4가지 경우가 모두 정답이 될 수 있다[3]. 물론 [경우 1]에서 집합 $A(=B)$는 [예 1] 에서와 마찬가지로 원소가 1개일 수도, 2개일 수도, 3개일 수도 있다. 그러나 이러한 문제에 대하여 학생들은 항상 집합 기호 안의 문자를 서로 다른 것으로 다루어 답을 해 왔기 때문에 이후 변수 개념을 다루는 상황에서 변수 이름인 문자가 서로 다른 것은 곧 그것이 지시하는 대상이 다른 것이라는 생각을 갖게 될 수 있다. 이러한 생각은 변수를 표시하는 기호의 변화는 변수가 나타내고 있는 대상의 변화를 함의한다는 오개념으로서 대수적 표현을 이해하는데 있어서 인지적 갈등을 유발한다(Wagner, 1983, p.477; Leinhardt et al., 1990, p.42; 김남희, 1992, pp.74 - 75).

문제의 의도상 집합 안에 서로 다른 원소를 의도하는 것에 같은 기호를 사용하는 것 역시 학생들에게 인지적 갈등을 야기할 수 있다. 〈표 4〉의 초등 5 학년 교과서에서 다루어진

---

3) 예에서 제시된 바와 같은 집합 표현에서 아이들이 혼동을 느끼지 않도록 하는 방법으로는 집합 $\{a, b, c\}$에서 사용된 a, b, c는 알파벳 a, b, c라는 설명을 덧붙이는 것이다. 다시 말하면 집합 기호 안에 사용된 a, b, c는 a, b, c가 어떤 대상을 대신하고 있는 문자가 아니라 알파벳 그 자체를 나타내고 있음을 강조하는 것이다. 또 다른 대안으로는 집합의 원소를 나타낼 때, 수학에서 변수로 사용되는 문자 $a, b, c,\ldots\ x, y, z,\ldots$ 등을 의식적으로 사용하지 않는 것이다. 위의 [예 1]의 문제는 n({ 연필, 지우개, 공책 }) 으로, [예 2]의 문제는 $A=$\{ 가, 나, 다 \}, $B=$\{ 가, 나, 다, 라, 마 \}로 바꾸어도 아이들의 혼란을 방지하면서 같은 내용을 다룰 수 있는 것이다.



[경우 1] [경우 2] [경우 3] [경우 4]

〈그림 2〉 집합의 포함관계에 대한 벤 다이어그램

집합 표현의 예 {사인펜, □, □}에서도 기호 □가 서로 같은 대상을 의미하는 것인지 다른 대상을 의미하는 것인지 분명치 않다. 집합 언어 역시 수학적 표현이므로 그 안에는 지시하는 대상이 명확한 언어 표현이 들어가야 한다. 만약 문제에서 같은 대상을 의도했다면 집합 기호 안에 □를 한 번만 써야 할 것이고, 다른 대상을 의도했다면 집합의 원소를 {사인펜, □, ⬭}와 같이 서로 다른 기호로 구분하여 제시해야 할 것이다.

교과서에서 집합을 지도하면서 { ☆, ☆, ☆ } { △, ○, □ }이나 { a, b, c } 와 같은 문자의 집합을 자주 예로 들고 있는 것 즉, 기호나 문자를 원소로 갖는 다양한 유한 집합을 인위적으로 만들어내는 '꾸민 내용'이 다루어지는 것은 새 수학 이후 학교 수학에서 발견되는 두드러진 특징이다. 그러나 위에서 설명한 바와 같이 문자의 집합을 사용하는 것이나 초등 수준에서 문자 집합과 유사한 { ☆, ☆, ☆ } { △, ○, □ }와 같은 집합을 사용하는 것은 학생들에게 인지적 갈등을 유발할 가능성이 있는 것이다. 집합{ ☆, ☆, ☆ } 에서 ☆은 서로 같은 것인가? 다른 것인가? 같은 것이라면 이는 원소가 하나인 집합이며 다른 것이라면 어느 별을 가리키는 것인가? 아니면 별 모양의 그림의 집합인가? '새수학' 이후 집합 단원에서 다루어지는 지도 내용은 극복하기 어려운 문제를 안고 있는 것이다[4]. 의미를 갖는 기

〈표 4〉 초등 수학 교과서에 사용된 집합의 예

집합과 원소를 알아보자. ...(중략) [예 4] 책상 위에 □그림과 같은 물건들이 놓여 있다. 그림을 보고 안에 알맞는 말을 써 보아라. 필기도구의 집합 = {사인펜, □, □} (초등 5학년 수학 교과서 '여러 가지 문제' 단원에서)

호 사용과 마찬가지로 수학에서 문자는 보통, 수나 점 등과 같은 그 자신이 아닌 다른 어떤 것을 나타내는 변수로 사용되고 있기 때문에 학교 수학에서 a, b, c는 알파벳 그 자체로써의 a, b, c가 아닌 다른 어떤 것을 나타내고 있는 변수일 수도 있다는 사실을 간과해서는 안된다. 위와 같이 여러 가지 경우로 설명될 수 있는 문자의 집합을 무의식적으로 자주 사용하게 되면 학생들은 문자 a, b, c는 문자 그 자체 또는 서로 다른 어떤 대상을 대신하는 것으로써 결코 서로 같은 값을 가질 수 없다는 인식을 갖게 될 수 있다. 이러한 생각을 갖게 되면 변수를 다루는 문제 상황에서 $a=b$, $x\in\{a, b, c\}$, $\{a, b, c\}\cap\{1, 2, 3\}\neq\phi$ 같은 수학적 표현을 이해하는데 곤란을 겪게 될 수 있는 것이다(우정호, 1998, p.133, pp.243－244).

학교 수학에서 변수 개념을 지도하는 데 어려움 중의 하나는 수학에서 주로 문자로 표현되는 변수 기호가 문자 자신과 문자로 나타내어지는 여러 가지 대상을 나타내는 데 동시에 사용될 수 있기 때문에 학생들에게 혼동을 일으키기 쉽다는 것이다. 따라서 문자를 집합의 원소로 사용하는 꾸민 수학의 내용을 교과서에서 자주 다루는 것은 자칫 수학에서 문자 사용의 유연성에 대한 이해의 결여로 변수 개념의 형성에 곤란을 초래할 수 있다는 사실을 항상 염두에 두고 그 사용에 있어서 신중한 주의를 기울여야 할 것이다.

3. 꼭두각시 변수 지도에 관하여

앞에서 언급된 변수로써의 문자 사용의 유연성에 대한 이해의 문제는 수학에서 주어진 임의의 대상을 나타내기 위해 문자를 자유롭게 선택하여 사용할 수 있다는 사실을 이해할 수 있는가의 문제 즉, '꼭두각시' 변수(dummy[5] variable) 사용에 대한 이해의 문제로 연결된다. 예를 들어, 집합 표현 $\{x \mid P(x)\}$에서 x는 꼭두각시 변수로서 다른 문자를 사용해도 무방하며 일차식 $y=mx+b$가 미지수가 2개인 일차방정식으로 해석되거나 일차함수의 관계로 해석되거나 또는 직선의 방정식으로 해석되는 어느 경우이건 일차식 $y=mx+b$에서 x, y와 m, b는 꼭두각시 변수로써 $s=mt+b$, $y=kx+l$ 등 다른 문자를 사용해도 지시

4) 수학에서 괄호 { }는 일종의 언어적인 표현이므로 그 안에도 언어적인 표현이 들어가야 하며 그림이 들어간다면 이는 표의문자로 간주해야 하며 그 지시하는 대상이 명확하지 않으면 안된다(우정호, 1998, p.132).

5) 영어 'dummy'는 사전적으로 명의만의, 가상의, 명목상의, 허수아비 등의 의미를 가진다. 이는 변수로 사용된 문자가 명목상 지시 대상을 일시적으로 대신하고 있을 뿐 그 대상이나 표현구조의 변함 없이 다른 문자로 바꾸어 나타낼 수 있음을 의미한다.

대상의 변화 없이 문제의 구조를 그대로 나타낼 수 있는 것이다.

그러나 Wagner(1983)의 연구 결과를 보면 이러한 점이 학생들에게 잘 이해되지 않음을 알 수 있다. 다시 말하면, 학생들은 변수 명의 임의성에 대한 이해의 결여 속에 변수 기호의 변화는 변수가 나타내는 대상의 변화로 인식하고 있는 것이다.사실 문자 선택을 임의로 할 수 있다는 사실은 학교 수학에서 그다지 강조되어 지도되고 있지 못한 것으로 보인다(김남희, 1992, pp.74 - 75). 문자 '선택의 자유성' 을 학생들이 완전히 내면화하는데는 오랜 시간이 걸리는 것으로 파악되기 때문에 이에 대한 보다 의식적인 교수학적 노력이 필요하다고 생각된다(우정호, 1998, p.237; 김남희, 1995, p.192).

같은 것을 나타내기 위해 다른 문자가 사용될 수 있다는 것을 아는 학생들도 종종 다른 문자는 다른 대상을 나타내어야 만 한다고 믿는 경향이 있다. 예를 들어, 방정식에서 문자로 된 미지수가 변하는 것은 해의 변화를 의미한다고 생각하는 것이 그것인데 이런 오개념을 바로잡기 위한 방법은 대수과정에서 결합법칙이나 분배법칙처럼 수의 성질에 대해서 수치를 대입하여 설명을 하게 될 때, 다른 문자가 같은 값을 가지는 몇 가지 예를 사용해 보는 것이다. 예를 들면, $a(b+c)=ab+ac$ 를 확인하기 위해 a, b, c 모두에 2를 대입해 보는 것과 같다[6] 또한 집합함수 $\{x \mid p(x)\}$ 나 함수 $y=6x$ 와 같은 표현은 상황에 따라서 다른 문자를 사용하여 $\{y \mid p(y)\}$ 또는 $v=6w$ 로 표현할 수도 있음을 명확히 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다. 이를 위해 문자를 선택하는데 있어서 관습적으로 사용되어 온 암묵적인 규약이 반드시 지켜져야 하는 형식적 규칙인 것처럼 다루는 것은 바람직하지 못하다. 학생들이 함수 관계는 반드시 문자 x, y 를 사용하여 표현하고 방정식은 문자 x 를 사용하여야 한다는 생각을 가지는 것도 학교 수학에서 함수관계는 항상 문자 x, y 로, 방정식에서의 미지수는 항상 문자 x 로 경험해 왔기 때문일 수 있다(김남희, 1992, p.75, p.95; 1997, pp.100 - 102).

수학에서 문자를 선택할 때 관습적으로 사용되어 온 암묵적인 규약 즉, 함수 $y=f(x)$ 에서 x 는 독립변수로 y 는 종속변수로 사용되고, 일반화된 수에 대해서는 주로 문자 a, b, c 등을 사용하며, 거리, 시간, 속도를 나타내기 위한 문자로는 일반적으로 영어의 머리글자를 따서, 각각 S, t, v 를 사용하는 등의 관습이 있다. 그러나 이렇게 하는 것이 교육적으로 유용하기 때문일 뿐 문자 사용의 본질적인 부분에 해당되는 것은 아니기 때문에, 상황에 따라서 다른 문자를 사용할 수 있는 유연성이 항상 존재함을 인식시켜 주어야 한다. 우정호

6) 이렇게 각 문자에 대해서 임의의 값을 취해보면서 수에 대한 일반적인 성질을 확인해 보는 경우에 우리가 두 개 이상의 문자가 같은 값을 취하는 특수한 경우를 항상 배제한다면, 다른 문자는 항상 다른 값을 취한다는 오개념을 부지불식중에 강화하게 될 지도 모른다(김남희, 1995, p.192).

(1998)가 논리적이며 가장 단순한 형태로 교재를 제시하려는 노력이 인지적 장애의 요인이 되기 때문에 유의해야 할 것이라는 지적을 한 바와 같이, 함수 $y=f(x)$나 방정식에서 변수 기호를 미지수 x와 같이 특정한 문자로만 국한하여 지도하면 x가 아닌 다른 문자로 표현된 변수를 생소하게 생각하여 변수를 나타내는 문자의 변화가 내용의 변화를 가져오는 것으로 오해하기 쉽게 되는 것이다(우정호, 1998, p.253).

4. 변수를 사용한 문자식 구성에 대하여

이 절에서 논하고자 하는 것은 변수로서 문자사용의 필요성과 문자 선택의 자유성에 대한 이해의 문제이다. 학생들이 변수로서 문자사용의 필요성을 경험하고 수학의 형식적 언어체계에 따라 문자식을 올바로 구성하는 것은 변수 개념 학습의 중요한 측면으로써, 이를 통해 학생들은 변수에 의한 대수적 표현을 의미있게 이해하고 해석하는 능력을 기를 수 있다. 그러나 현재의 학교 수학에서는 학생들이 주체가 되어 문제 상황에 직면했을 때, 변수를 사용하여 그것을 식으로 표현할 필요성을 느끼고 변수로서 문자 이름을 스스로 선택하여 식을 구성하는 활동은 그다지 이루어지고 있지 않는 듯하다. 중학교 1학년 수학 교과서의 예를 들어 보자.

〈표 5〉의 [예 1]은 문자 a, b, c가 임의의 수를 나타낸다는 충분한 설명이나 학생들이 문자를 사용하여 일반화를 해갈 수 있는 경험의 제공 없이 연역적으로 제시되는 경향이 있으며, [예 2]와 같이 교과서에서 자주 다루고 있는 문제들도 변수인 문자의 역할에 대한 고려 없이 수식을 구성하는 연습에 불과한 것으로 보인다. x원인 우표 4장과 y원인 우표 6장에 대한 값의 합을 구하는 식은 변수 사용의 필요성이 경험되는 문제 상황도 아니고, 더군다나 변수인 문자 이름이 이미 지정되어 있기 때문에 학생들 입장에서 보면 170원인 보통우표 4장과 340원인 빠른우표 6장의 값에 대한 합을 구하기 위해 식을 세우는 문제를 다루는 것과 그다지 차이가 없는 것으로 보인다. 이러한 문제를 다룰 때에는 변수인 문자가 '아직 정해져있지 않은 우표 값'이라는 의미로 충분히 설명되어야 할 것이고 학생들은 문자 a, b가 임의로 선택되어졌다는 생각을 할 수 있도록 지도되어야 한다.

이와 마찬가지로 [예 3]과 같은 문제도 윗변이 5cm, 아랫변이 8cm, 높이가 4cm일 때, 사다리꼴의 넓이를 구하라는 문제와 다름이 없는 것으로 보인다. 이런 유형의 문제는 이미 지정되어 있는 길이를 넓이 공식에 대입하여 적용하는 연습에 불과한 것이다. 이 문제는 도형의 모양만을 제시하고 "넓이를 구하는데 필요한 변의 길이에 대해 적당한 문자를 사용하여 넓이를 구하는 식을 만들어라"라는 식으로 수정되어야 할 것으로 생각된다. 그리고 학

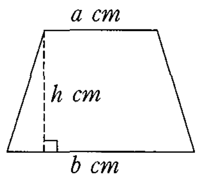
〈표 5〉 중 1 수학 교과서의 예

[예 1] $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$

[예 2] 다음 수량을 문자를 사용한 식으로 나타내어라.

(1) x원인 우표 4장과 y원인 우표 6장의 값의 합

(2) 매시 $v$km의 속력으로 t시간 갈 때의 간 거리



[예 3] 윗 변이 a cm, 아랫 변이 b cm, 높이가 h cm일 때,

사다리꼴의 넓이 S를 문자를 사용한 식으로 나타내어라.

(중학교 1학년 수학 교과서 '수와 식' 단원에서)

생들은 넓이를 구하는데 필요한 길이를 스스로 결정하고, 아직 길이가 정해지지 않았기 때문에 변수(즉, 문자)를 사용해야 할 필요성을 느낀 후, 그들이 직접 문자 선택을 하여 옳은 답이 다양하게 나올 수 있음을 경험해야 한다[7]. 즉, 올바른 식의 구조는 모두 동일하겠지만 학생들의 문자 선택에 따라(즉, 윗변과 아랫변 높이를 각각 a, b, h로 하느냐, a, b, c로 하느냐, p, q, r로 하느냐 등에 따라) 다양한 형태로 답해질 수 있음이 드러나야 한다. 이러한 일련의 과정 속에서 학생들은 변수 사용의 필요성, 변수로서 문자 선택의 자유성에 따른 변수 명의 임의성을 경험할 수 있게 되는 것이다.

학교 수학에서 학생들은 직접 수학을 만들어 가면서 수학적 사고를 경험할 수 있도록 안내되어야 한다. 그러나 그 동안 변수를 이용한 문자식 구성 내용의 상당 부분은 문제에 문자를 이미 제시하고 학생들로 하여금 문자식을 곧바로 도출시키도록 하는 것이어서, 학생들은 문제 상황의 표현을 위해 문자 사용의 필요성을 느끼고 변수명을 스스로 결정하는 활동없이 수학에서 변수로 사용되는 문자의 의미와 역할을 무의미하게 경험하고 있다.

7) 이러한 문제는 측도 영역에서의 지도내용과도 연결될 수 있다. 즉, 원하는 값을 구하기 위해 측정될 길이가 어떤 것인가를 선택해야 하는 문제를 동시에 다루도록 할 수 있다. 특별히 여기서는 그 길이가 구체적인 값으로 측정되어있지 않기 때문에 문자를 사용해서 넓이를 일반적으로 간단하게 나타내는 방법을 익히게 된다.

5. 부정소를 소위 '상수'로 부르는 것에 대하여

부정소[8] 를 상수로 취급하기 때문에 변수에 의한 일반화의 의미가 쉽게 가리워진다. 일 · 이차방정식과 함수에 대한 일반식에서 아직 정해져 있지 않은 값 a, b, c 를 단순히 '상수' 로 규정하는 것은 중학교 수학 교과서에서 흔히 찾아볼 수 있는 예이다.

중학교 3학년 수학 교과서에서 다루어지고 있는 이차방정식의 일반식 $ax^2+bx+c=0$, 이차함수의 일반식 $y=ax^2+bx+c$ 도 ⟨표 6⟩의 내용과 비슷한 예로써 역시 '$a \neq 0$ 이고 a, b, c 는 상수' 라는 설명이 덧붙여 제시되고 있다. 중학교 시기는 위의 예에서 사용된 문자 a, b, c 와 같이 일반화된 식의 표현에서 부정소의 의미로 사용된 변수를 자주 다루고 있지만 부정소를 항상 상수로 규정함으로써 학생들이 주어진 식이 함의하는 일반화의 의미를 명확하게 포착하는 것을 어렵게 하고 있다. 현행 중학교 수학 교과서에 나타나는 변수에 관한 내용을 살펴보면 산술에서 대수로 급격하게 전환되기 때문에 변수의 '대표성' 이 부각되는 일반화된 의미의 문자 사용이 두드러지게 나타나고 있음을 알 수 있다.

그러나 일반화의 의미에 대한 설명은 거의 주어져 있지 않고 일반화된 표현을 즉각적으로 도입하면서 더구나 일반화된 문자 즉, 방정식이나 함수식 등에서 아직 정해져 있지 않은 수를 일반적으로 나타내는 문자 a, b, c 를 단순히 상수라고 부르는 용어상의 문제는 학생들로 하여금 방정식, 함수식, 일반적인 법칙이나 공식을 나타내는 식에서 사용되고 있는 부정소가 오직 하나의 수와 연결되기 때문에 변수가 아니라는 오개념을 갖게할 수 있다는 점을 배제할 수 없다. 부정소를 상수라고 규정하면 문제 상황의 결과적 측면 즉, 일반식이 특수한 경우에 적용된 상황에 주목하게 하여 학생들이 일반식 안에서 문자가 담당하고 있는 역할보다도 그 문자가 가지는 값에 주목하게 된다. 이로 인해 학생들은 일반화된 문자를 변수의 범주에 포함시키지 못하게 되고 결국은 변수에 대한 제한된 생각을 갖게 되는 것이다.

학생들이 부정소의 의미를 이해하지 못한다면 방정식에서 일반적인 해의 의미를 명확히 파악할 수 없다. 따라서 위와 같은 일반식에 사용된 문자 a, b, c 에 대하여 '상수' 라는 표현을 하는 것은 바람직하지 않고 그것을 아직 정해지지 않은 상수를 일반적으로 나타내고

---

8) 수학에서 임의의 대상을 대신하여 사용되는 문자를 다가이름(polyvalent name)이라고 하는데 그 중에서 특히 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $ax^2+bx+c=0$, $y=ax^2+bx+c$ 와 같이 일반화된 표현을 형식화하기 위해 사용되는 다가이름을 부정소(indeterminates)라고 부른다. 또한 부정소와는 달리 $x^2+x-2=0$ 에서와 같이 해를 묻기 위해서 사용되는 다가이름을 수학에서는 미지수라 부르고 있다 (Freudenthal, 1984, p.1704).

〈표 6〉 중 1 수학 교과서에서 일반화된 식의 예

[예 1] (x, y 에 관한 일차식) = 0 즉, $ax+by+c=0$ (a,b,c 는 상수, $a \fallingdotseq 0$ 또는 $b \fallingdotseq 0$)의 꼴로 나타내어지는 방정식을 두 미지수 x, y 에 관한 일차방정식이라고 한다. (중 2 수학 교과서 '방정식과 부등식' 단원에서)
[예 2] $y=ax+b$ (a, b 는 상수이고, $a \fallingdotseq 0$)와 같이 y 가 x 에 관한 일차식으로 나타내어질 때, 이 함수를 일차함수라고 한다. (중 2 수학 교과서 '일차함수' 단원에서)

있는 '부정소'인 변수 또는 '아직 정해져 있지 않은 상수'라고 표현하는 것이 옳을 것으로 생각된다. 위의 예에서와 같이 문자 a, b, c 를 계속 상수로 지도하면 학생들은 아직 정해져 있지는 않지만 결국 특수화의 과정에서 어떤 하나의 수로 결정될 문자는 모두 상수로 취급하게 됨으로써 변수와 구분짓는 오류를 범할 것이다. 즉, 패턴을 일반화하는 문자를 변수의 측면으로 바라보지 못하게 되는 것이다.

실제로 학생들에게서는 변수를 상수의 대립 개념으로 다루면서 '상수'의 의미를 지나치게 확장하여 적용하는 경우를 흔히 보게 되는데 이는 방정식의 해에 대한 자리지기로서 사용된 미지수를 변수의 범주에 포함시키지 않는 오류에서 확인된다. 방정식에서의 x 는 방정식의 해가 되는 것을 찾기 위해서 여러 가지 수를 대입해 볼 수 있다는 사실에 의해 변수 개념으로 파악되어야 하지만 연구 결과에 따르면 방정식에서의 x 를 변수로 보지 않는 학생의 수가 상당히 많은 것으로 나타난다(김남희, 1992, p.76). 학생들은 일차(또는 이차)방정식에서 x 는 단 하나(또는 둘)의 값을 갖기 때문에 x 가 변하지 않고 고정된다는 생각을 하여 그것을 상수로 보는 것이다.[9]

이 역시 위에서 언급한 바와 같이 문제 상황의 결과적 측면 즉, 방정식에서 풀이 결과에 집착하여 식 안에서 문자가 담당하고 있는 역할보다도 그 문자가 결과적으로 가지는 값에 주목을 하고 있는 것이다.[10]

9) 사실상 일차방정식인 부정방정식 $ax+b=0$ 에서 $a=0$ 이고 $b=0$ 의 경우를 생각해 보면 이 일차방정식은 무수히 많은 해를 가지기 때문에 x 가 갖는 값이 하나가 아니라 모든 실수가 된다. 이 예는 미지수 x 를 상수라고 설명하는 것이 적절하지 않다는 사실을 잘 보여주는 것이다.

6. 함수 정의에 따른 변수의 의미 변화에 대하여

학교 수학에서 변수 개념은 그 특징에 따라 크게 동적 측면과 정적 측면으로 구분되어 변수의 두 가지 본질인 '변하는 대상'과 '다가이름'으로 정리된다. 변하는 대상으로서의 변수의 동적 측면은 변화에 대한 인간의 의식에서 출발한 것으로서 흐르는 시간 t, 0에 수렴하는 수 ε에서의 문자 t, ε과 같이 실제로 변하거나 변하는 것으로 가정되는 대상의 운동학적 상태를 나타내는 것이다. 그리고 변수의 정적 측면인 다가이름은 $a+b=b+a$에서 문자 a, b와 같이 일단의 상황을 동시에 고려하는 수단으로서, 특히 패턴을 일반화하는 도구로서 동치인 여러 대상을 동시에 나타내는 것이다.

현재, 학교 수학에서 명시적으로 변수가 사용되기 시작한 때는 함수 단원이 도입되는 시기인데, 이때 변수에 대한 정의는 함수 개념과 더불어 제시된다. 따라서 학교 수학에서 다루어지는 변수의 의미는 함수를 어떤 관점에서 바라보느냐에 따라 크게 차이가 난다. 함수 개념에 따른 변수의 의미 변화는 우리나라 수학 교육과정 변화의 흐름을 살펴보면 쉽게 드러난다.

다음의 〈표 7〉과 〈그림 3〉을 보면 학교 수학에서 함수에 딸린 개념으로 제시되고 있는 변수의 의미는, 함수에 대한 개념 변화 즉, '변화하는 대상 사이의 종속'의 의미에서 '두 집합 사이의 대응'으로의 의미 변화를 반영하면서 변수의 의미 역시 '변하는 양(대상)'에서 '집합의 원소'로 자연스럽게 집합론 쪽으로 다루어지게 되었음을 알 수 있다(박교식, 1992, p.28; 김남희, 1997, p.118 - 129).

여기서 우리가 주목할 것은 함수가 두 집합 사이의 대응관계로 정의되면 변수의 동적인 의미가 부각되기 어렵다는 것이다. 집합언어를 구사하는 현대 추상수학이 발달하면서 현재 학교 수학에서 변수의 변하는 수학적 대상이이라고 하는 운동학적인 직관적 관념이 약화되고 있는 반면, 정적인 형식적 측면이 강조되고 있다. 오늘날 변수는 일반적으로 변역의 원소를 대입할 기호로 간주되고 있으며 함수에서 다루어질 수 있는 실세계의 변화하는 대상

---

10) 이러한 생각은 이후의 학습에서 n개의 해를 갖는 n차 방정식의 경우에서도, 실제 그들은 변수가 여러 가지 값을 갖는 문자라고 생각하고 있으면서도, x를 상수로 취급하게 되는 오류를 범할 것이다. 방정식에서 미지수에 대한 자리지기로서 사용되고 있는 문자 역시 그 문자가 쓰여진 자리에 임의의 수가 대입될 수 있다는 의미, 다시 말하면 방정식의 해를 찾기 위해서 문자 x에 여러 가지 값을 넣어볼 수 있다는 의미에서 변수 사용의 한 측면으로서 강조되어야 한다. 방정식에 대한 지도가 명시적으로 제시되기 시작하는 초등 6학년 시기에서부터 문자 x에 실제로 여러 값을 대입해 보는(방정식이 참 또는 거짓이 되도록 하는) 과정을 충분히 다루어서 x가 임의의 수를 넣어볼 수 있는 다가이름으로 사용되었음을 경험시키는 것이 중요하다.

〈표 7〉 함수 개념에 따른 변수 개념의 변화

교육과정기	함수에 대한 정의	함수에 대한 정의	강조점
2차 (1963년~1973년)	변화하는 대상 사이의 종속	함수 관계에서의 변하는 양	변수의 변화성
3차 (1973년~1981년)	두 집합 사이의 대응	어떤 집합의 임의의 원소	변수의 대표성
4차 (1981년~)	두 집합 사이의 대응	어떤 집합에 속하는 여러 가지 값을 나타내는 문자	변수의 대입

〈그림 3〉 교육과정 흐름에 따른 변수의 의미 변화

으로서 변수에 대한 동적인 근원은 학교 수학에서는 생명력 있게 드러나지 못하고 있다.

사실상 실세계의 변하는 대상이라는 것은 대부분 시간에 종속하여 연속적으로 변하는 속성[11]을 가지고 있기 때문에 변화의 양상을 파악하는 단계에서 불가피한 측정 행위로 인해 불연속적인 측정치(측정 시간에 대응되는 측정 값)를 다루게 되는 상황은 어쩌면 변하는 대상으로서 변수의 본질에 접근해 가는 것이 교수학적으로 상당히 어려움을 내포하고 있는지도 모른다. 그러나 이러한 어려움에도 불구하고 학교 수학은 함수가 두 집합 사이의 대응관계로 정의됨에 따라 변수의 의미가 제한되어 다루어질 수 있음을 인식하고, 변하는 대상을 다루는 풍부한 경험과 변하는 실제적인 현상간의 관계를 변수로 나타내어 처리하는 학습에 대한 지도에 보다 강조점을 두어야 할 것이다. 그 이유는 변수가 함의하고 있는 '변화' 의 의미가 실세계의 변화 하는 대상에서 가장 생명력 있게 그리고 가장 자연스럽게 나타나기 때문이다. 변수의 변화성은 그 변화가 동적일 때 가장 생생하게 경험될 수 있는 것이다. 실세계의 변화하는 대상에 대한 풍부한 경험은 변수라는 형식적 개념이 형성되기 전의 발생상태를 경험하게 하여 변수에 대한 아이디어를 제공하는 원천이 된다. 따라서 학습자는 변수 개념의 '발생상태' 로 돌아가서 그 개념 발생의 맥락과 연결되어 있는 관계를 이해하게 되고 그러한 이해를 바탕으로 변수를 의미있게 사용할 수 있는 기회를 얻게 되는 것이다.

11) 속도, 온도, 거리, 나이 등은 모두 시간에 따라 연속적으로 변하는 변수인 것이다.

대응으로서의 함수 지도 하에서라도 변수가 수학적으로 처리될 때 변하는 대상의 연속성이 불가피하게 불연속적인 것으로 전환되는 위와 같은 어려움을 학습자에게 뚜렷하게 인식화시킬 수 있다면 변수가 어떠한 필요성에서 소생한 것인지에 대한 즉, '수학적인 처리 수단을 이용한 변화 하는 세계의 설명' 이라는 그 개념 발생의 근원에 대한 이해를 한층 더 심화시켜줄 수 있을 것이다. 그러나 기존의 변수 개념 지도에서는 함수의 대응관계에 따라 연속적으로 변화 하는 실재인 시간이나 길이 등에 대하여 그들의 불연속적인 측정치를 가지고 몇 개의 값을 대입 · 계산하여 종속된 또 다른 값을 정확히 구해내는 계산 과정만을 강조하였을 뿐이다.

7. 변수에 의한 일반화의 지도에 대하여

학교 수학에서 변수에 의한 일반화를 다루는 내용은 초등학교에서 중등학교까지의 교과서 전반에 걸쳐 나타난다. 예를 들면, 초등 수준에서 공통의 규칙을 발견하여 비형식적으로나마 그 규칙을 표현하는 것이나 연산규칙을 기호 □, △, ○, ☆를 사용하여 $\frac{\triangle}{\square}\div\frac{\text{☆}}{\bigcirc}=\frac{\triangle}{\square}\times\frac{\bigcirc}{\text{☆}}$으로 일반화하는 것, 또는 중등 수준에서 변수인 문자를 사용하여 수에 대한 교환 · 분배 · 결합법칙을 나타내거나, 여러 가지 공식을 일반적으로 표현하는 것 등 그 예는 수 없이 많이 찾아볼 수 있다.

수학의 특성인 일반화는 변수로 사용되는 문자에 의해 형식화되기 때문에 일반화에 대한 학습은 변수 개념의 정적 측면 즉, 다가이름이라는 변수 본질에 대한 이해의 밑바탕이 된다. 그러나 그 동안 학교수학에서는 학생들에게 일반화된 식에서 변수에 값을 대입시키는 과정(즉, 특수화)을 주로 경험시켰을 뿐 구체적인 상황을 변수로 구성하여 일반화된 식을 구성해내는 과정(즉, 일반화)을 경험시키는 것에는 상당히 소홀했던 것으로 보인다. 변수로 표현된 일반화된 식이나 명제는 주로 연역적으로 제시되고 있을 뿐이다. 위에서 언급한 초보적인 일반화의 예 $\frac{\triangle}{\square}\div\frac{\text{☆}}{\bigcirc}=\frac{\triangle}{\square}\times\frac{\bigcirc}{\text{☆}}$는 구체적인 상황에서 충분한 예가 주어지지 않은 채 학생들의 즉각적인 이해를 바라면서 곧바로 도입되어 지도 되고 있는 듯 하다[12]. 중학교 수학에서 몇 가지 예를 들어보자.

12) 위와 같은 표현을 제시할 때 중요한 것은 □, △, ○, ☆과 같은 기호는 구체적인 수를 나타내기 위해 사용하였다는 것과 각 기호에는 우리가 원하는 수를 마음대로 넣어볼 수 있다는 사실을 분명히 하는 것이다. 그리고 일반화된 표현을 제시한 후에는 실제로 각 기호에 임의로 수를 넣어보는 과정을 취해 보여야만이 학생들은 □, △, ○, ☆을 왜 사용하고 그것을 어떻게 이용하여야 하

〈표 8〉 중 1 수학 교과서에서 사용된 일반화된 식 사용의 예

[예 1] $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$ [예 2] n각형은 $(n-2)$개의 삼각형으로 나누어지므로, n각형의 내각의 크기의 합은 $180°(n-2)$이다. ....(중략) 팔각형, 십각형,.. 의 내각의 크기의 합을 구하여라. (중학교 1학년 수학 교과서 '수와 식', '평면도형' 단원에서)

〈표 8〉의 [예 1]과 같이 사칙연산의 학습에서 등장하게 되는 교환법칙, 결합법칙의 일반식은 1학년 수와 연산 단원에서 일반화 된 변수로서의 문자 사용에 대한 충분한 설명이 제시되지 않은 채 다시 말하면 문자 a, b, c가 임의의 수를 나타낸다는 설명없이, 더군다나 학생들이 문자를 사용하여 일반화를 해갈 수 있는 경험의 제공 없이 직접적으로 도입되고 있다. 일반화된 식에서 변수가 갖는 '임의의 수(또는 대상)'라는 의미를 학생들이 변수로 사용되는 문자의 역할과 연결지어 경험하고 있다고 보기 어렵다. [예 2]에서 일반화된 식도 연역적으로 제시한 후 곧바로 n에 적당한 수를 대입하여 식의 값을 구하는 활동 즉, 특수화의 과정으로 주로 지도되고 있는 것 같다. 때로 몇 가지 구체적인 사례를 제시하면서 일반화된 식을 유도하고 있는 경우에도 그것은 학생들의 활동이 아닌 교과서나 교사의 단순한 제시 형식에 의해서이다. 이에 따라 학생들은 주로 변수를 값에 대입하는 과정 속에서만 의미를 갖는 것으로 학습하고 있는 듯 하다. 주로 특수화에 대한 지도가 주를 이루는 현재의 학습 상황은 학생들로 하여금 변수의 본질인 다가이름을 일반화의 맥락에서 의미 있게 이해하는 것을 어렵게 한다.

학교 수학에서 일반화/특수화에 대한 직접경험의 과정은 어느 한 쪽에 치우침 없이 동일한 정도로 다루어져야 할 뿐 만 아니라 그러한 과정은 다양한 문제 상황에서 주어져야만 할 것이다(김남희, 1997, p.145)[13]. 다양한 문제 상황에서 특수에서 일반으로 일반에서 특수로의 두 가지 과정에 대한 풍부한 경험을 거친 학생들만이 다가이름으로서의 변수의 본질

는지에 대한 감각을 얻을 수가 있다. 이러한 감각을 갖지 못한 상태에서 중학교 시기에 이르러 $a+b=b+a$와 같이 문자에 의한 일반식이 본격적으로 도입되면 학생들은 일반화의 의미와 일반화된 식이 수학에서 발휘하는 강력한 힘을 깨닫기 어렵게 된다.

13) 위와 같은 경험이 수의 계산 규칙을 일반화하거나 일반화된 계산 규칙에 수를 대입해 보는 상황 즉, 수를 대상으로 한 문제 상황에서만 이루어져서는 안된다. 일반화/특수화의 과정은 도형의 성질을 일반적으로 표현하거나 기하에서의 일반적인 명제를 종이 위에 그려진 특수한 도형의 경우에 적용하는 경우, 논리에서 다루어지는 명제의 공통 구조를 $p \to q$로 일반화하여 표현하거나 그러

을 완전하게 이해할 수 있으며 일반화를 위해 변수를 사용하는 방식, 일반화된 식에서의 변수의 역할, 변수가 나타내는 대상에 대한 인식을 올바로 할 수 있는 것이다. 대수적 사고가 보다 상위의 수준으로 발달할 수 있는 시점은 바로 일반화가 형식화되는 수준이므로 구체적인 상황을 변수로 구성해 가는 과정 즉, 특수에서 일반으로 이르는 과정을 소홀히 한다는 것은 대수적 사고의 신장을 저해하여 결국 계속적인 대수 학습에 의해 지식이 성장하길 기대하는 것은 어려워지게 될 것이다. 학교 수학은 학생들로 하여금 특수한 구체적인 사례의 경험을 통해 일반화된 표현을 구성해 나가면서 다가이름이라는 변수의 본질을 스스로 깨닫을 수 있도록 하는 풍부한 경험을 제공해야 할 것이다.

참 고 문 헌

박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김남희(1992). 변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사 학위 논문.

김남희(1995). 수학에서 나타나는 문자의 성질과 그 다양한 의미. 대한수학교육학회 논문집, 5(1).

김남희(1997). 변수개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김남희(1998). 대수적 언어의 학습: 문자식 지도 : 중학교 1학년 문자와 식 단원의 지도 계획안 및 수업사례. 대학수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집, 65-97.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

Davis, R. B.(1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(3), 7-35.

Ericksen, D. E. B.(1988). *Students' conceptions of variables and their uses for generalization of mathematical patterns.* UMI, AAC 8824840, Michigan State University.

Freudenthal, H.(1983). *Didactical phenomenology of mathematics structures.* Reidel, Dordrecht.

______ (1984). The implicit philosophy of mathematics : History and education. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2, 1695-1709.

Kieran, C.(1989). The early learning of algebra: A structural perspective, In Wagner, S. & Kieran, C.(Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*(pp.33-56). National Council of Teachers of Mathematics.

한 표현을 특수한 경우에 적용하여 변수에 명제의 일부가 되는 조건을 넣어보는 경우 등 거의 모든 수학적 상황에서 일어날 수 있다. 이러한 점이 반영된 변수 지도는 Usiskin(1988)의 연구에서 드러 난 바 있듯이 변수인 문자가 대신하는 대상은 '수' 일 뿐이라는 학생들의 오개념을 바로 잡아줄 수도 있다.

______(1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.390 - 419). New York : Macmillan Publishiny Company .

Küchemann, D. E.(1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, & D. E. Kü chemann(Eds.), *Children's understanding of mathematics*: 11 - 16(pp.102 - 119). John Murray.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K.(1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1 - 64.

Rosnick, P. C.(1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, 74, 418 - 420.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A.(1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher*, 81(6), 420 - 427.

Usiskin, Z.(1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A.F. Corford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of algebra K* - 12 : 1988 yearbook (pp.8 – 19). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S.(1983). What are these things variables? *Mathematics Teacher*, 76(7), 474 - 479.

On Some Teaching Problems Related to the Learning of Variable Concept in School Mathematics

Kim Nam Hee(Munsung Junior High School)

In this study, we examined some matters related to the learning of variable concept in school mathematics on the basis of the theoretical foundation from the previous studies(e.g. Davis, 1975; Rosnick, 1981; IK chemann, 1981; Wagner, 1983.) and practices on variable concept teaching by evaluating the current state of that. Matters be discussed are as follows; the use of symbol for place holders in elementary mathematics, the dealing with sets those elements are literals and operations of such sets, the teaching of dummy variable, the construction of literal expressions that contains variables, the labeling indeterminates as a constant, the change in the exact meaning of variable according to the function concept, the teaching of a generalization by means of variables. After considering on these matters that are connected with the teaching-learning of variable concept, we suggested the alternative proposal to the current state of variable concept teaching.