대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 109~122, March 1999

컴퓨터 환경에서의 기하 지도의 문제점과 교수학적 처방의 예

이 종 영 (서울대 대학원)

Ⅰ. 머리말

컴퓨터는 수학 교수 · 학습 과정의 여러 어려움을 극복하기 위한 대안으로 생각되어, 기존 수학 개념 지도의 어려움을 경감할 수 있는 방안에 대한 연구가 진행되고 있다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념 학습의 전단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등을 통한 직관적 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다. 또 산술 교육을 종래의 계산기능 위주에서 사고력 중심으로 옮겨 갈 수 있게 되었으며, 학생들의 수학학습을 돕기 위한 많은 소프트웨어들이 개발되고 있다 (Tall, D, 1991; 류희찬, 1997).

Sfrad(1991)은 수 · 함수와 같은 추상 개념을 기본적으로 두 가지의 상이한 방식 즉, 대상의 관점에서 보는 구조적인 방식과 과정의 관점에서 보는 조작적인 방식으로 인식된다는 주장을 제시하였다. 대상의 관점에서 파악된 것을 구조적 개념이라 하고 과정이나 알고리즘 또는 행동의 관점에서 파악된 것을 조작적 개념이라 한다. 수학적 개념이 형성되는 과정에서는 조작적 개념이 구조적 개념에 선행한다. 그리고 수학적 개념은 그것이 조작적으로 그리고 구조적으로 인식될 수 있을 때에 완전하게 발달된 것으로 인식될 수 있다. 또한 Hiebert & Lefevre(1986)은 절차적 지식과 개념적 지식을 구분하고 있다. 절차적 지식은 수학 과제나 문제를 해결하기 위해 수행하는 기능에 대한 지식이다. 그리고 절차적 지식은 수학에서 사실 · 특성 · 관계에 대한 지식으로 정의된다. 컴퓨터 환경에서 표현되는 수학적인 대상은 정적이기보다는 동적인 성격이 강하다. 그리고 컴퓨터의 피드백과 학생들의 일련의 반응(키보드 입력과 마우스 조작 등)을 통해 학습이 이루어진다. 따라서 구조적 개념

보다는 조작적 개념, 개념적 지식보다는 절차적 개념이 컴퓨터 학습 환경에서는 풍부하다. 만약 학생들이 컴퓨터 환경에서 다루는 절차적 지식을 개념적 지식과 적절히 관련시켜 학습하지 못하고, 조작적 개념을 구조적 개념으로 발달시키지 못한다면, 컴퓨터 환경에서 나타나는 학습 효과는 반감이 될 것이다. 이런 점에서 컴퓨터 교수 학습과 환경에서 교사의 역할이 중요해진다.

이런 배경에서, 본 고에서는 기하 학습과 관련하여, 요즘 우리 나라의 교실 현장에서 많이 사용하고 있는 Geometer's Skechpad(GSP)와 이를 이용한 기하 교수 상황에 관해 살펴보고자 한다. 학생들은 기하를 학습하면서 대하게되는 도형들을 분석적인 측면에서 보지 못하여 개념 학습과 문제 해결 과정에서 많은 어려움을 겪는다. 컴퓨터 환경에서 도형 작도 과정은 작도하려는 도형을 이루는 요소들(점, 선분, 각의 크기)사이의 관계에 대한 명시적인 이해가 선행되어야 한다. 그리고 마우스를 이용하여 도형의 요소를 움직임으로써, 요소들 사이의 관계가 보존되는 다양한 형태의 도형을 관찰 할 수 있다. 기하에서 다루는 도형에 대한 분석적인 시각이 필요하며, 마우스를 이용한 다양한 모습의 도형을 관찰할 수 있는 동적인 기하 학습 환경은 학생들이 기하를 학습할 때 겪는 어려움을 극복하는데 많은 도움을 줄 것으로 생각된다. 그러나 이런 장점뿐만 아니라, 시각적인 경험 위주의 귀납적인 경향이 강한 컴퓨터 기반 학습 환경에서 기하를 학습 · 지도할 때 교사가 주의를 기울여야 할 잠재적인 문제점들이 있을 것이다. 이런 잠재적인 문제점들을 살펴보고 적절한 교수학적 처방을 내리는 것은 교사의 역할이 될 것이다. 본 고에서는 컴퓨터 환경에서 기하를 학습할 때 발생할 수 있는 잠재적인 문제점과 그 문제점을 해결할 수 있는 방안을 구체적인 예를 들어 논의하려고 한다.

Ⅱ. 그림-도형과 관련한 기하 학습의 어려움

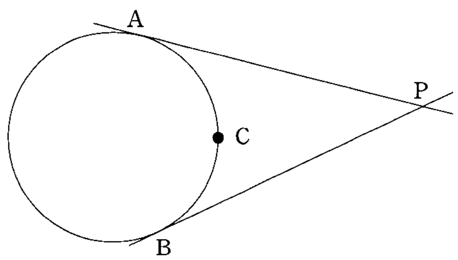
기하는 물리적인 공간을 모델링하는 수학 이론이라고 볼 수 있지만, 또한 그 자체의 공리와 대상, 규칙과 문제를 가지고 독자적으로 발달되어 왔다. 기하에서 다루는 대상인 직선은 연필로 종이 위에 아니면 옛날 모래 위에 막대기로 그은 직선이라는 물리적인 실체로 존재한다고 할 수 있지만, 그것은 이론상의 대상일 뿐이며, 실제의 추상화를 통해 얻을 수밖에 없는 이상적인 대상이다(Laborde, 1991).

도형은 기하학 이론에 대한 모델의 역할을 수행하는 동시에, 이론에 관한 실제의 역할을 하는 것으로 볼 수 있다. 실제 물리 공간의 몇 가지 물리적 사실들은 기하를 이용하여 모델화되며, 형식적인 수학 언어를 통해 명제로 표현된다. 그러나 이러한 명제는 2차원이라는

물리적인 공간 속의 자취이며 실제적인 형태로 표현된다. 기하학적 도형이라는 관념은 후자의 경우를 말하는 것으로 실체화하는 과정에 뒤이은 이론화 과정의 결과이다. 실제적인 표상으로서, 도형은 이론적인 개념을 나타내면서 시각적인 인상을 심어준다. 이런 이중적인 역할을 설명하기 위해서는 그림과 도형을 구분하여야 한다. 그림은 도형이 이론적인 대상을 나타내고 있는 물리적인 실체이다. 기하학적인 대상은 그림이 아니라 그것을 서술하는 문장을 통해서 서술될 수 있다. 이런 구분은 실제적으로 매우 오래된 것으로, 플라톤은 기하학자들은 시각적인 도형을 볼 때, 그 시각적인 도형을 보는 것이 아니라, 마음으로 통해 볼 수 있는 시각적인 도형을 생각한다고 하였다.

Chevallard(1991)는 그림을 물리에서 실험의 역할과 유사한 역할을 수행하는 것으로 보아, 시각적 실험(graphical experiment)이란 용어를 도입하였다. 어떠한 물리 실험에서도 피할 수 없는 노이즈가 있는 것처럼, 물리적 실체로서 그림도 완전하지 못하다. 점은 폭을 가지고 있으며, 직선은 실제로 곧지 못하다. 이런 불완전성은 부산물을 초래하여, 우리가 실제로 그린 한 원의 접선은 그 원과 한 점에서 만나지 않고 여러 점에서 만나게 된다. "수학은 거짓된 그림에 입각하여 올바르게 추론하는 예술이다"라는 말처럼, 우리는 수학을 하면서 그림의 불완전성을 고려할 필요가 없이, 그 그림이 나타내는 기하학적인 관계를 고려하여 올바른 추론을 할 수 있다. 그렇게 그림을 바라보았을 때, 우리는 그 그림을 도형 즉 기하학적 대상으로 바라보게 되는 것이다. 이렇게 우리는 실제적인 그림과 이런 실체(그림-수학에 대한 실험의 역할을 하는)의 추상물을 구분할 수 있다. 물리학자들이 자신의 지식에 입각해서 실험의 실제적인 측면을 무시하듯이, 실체적인 그림 속에서 기하학적인 대상으로 추상화는 작업은 학습자의 지식에 달려있다(Laborde, 1991).

도형은 그림을 통해서는 정확하게 그려질 수 없고 그에 따른 문맥이 주어져야 한다. 그리고 도형은 해결하려는 문제의 적절한 특징 등에 의해 여러 가지 다른 방식으로 해석할 수 있다. 가령 아래와 같은 〈그림 1〉은 두 가지로 해석할 수 있다.



〈그림 1〉 두 가지로 해석할 수 있는 도형

하나는 한 원이 주어져 있고, 그 원 위에 두 점 A, B가 주어졌을 때, 두 점에서 접선의 교점이 P임을 보여준다. 그리고 다르게 한 원이 주어져 있고, 그 원 외부에 한 점 P가 주어졌을 때, 그 점에서 원에 그은 두 접선과 원의 교점이 A와 B이다. 전자의 경우에 점 A와 B는 원 위에서 움직일 수 있는 점이며, 점 P는 점 A와 B에 종속된 점이다. 반면에 후자의 경우는 점 P는 원 외부에 있는 임의의 점이며, 점 A와 B는 점 P에 종속되어 있다. 〈그림 1〉처럼 원 위에 점 C를 첨가한 경우에도 모호함이 생긴다. 점 C가 호 AB 위에 있는 임의의 점으로 생각할 수 있고, 또는 점 C가 원 O 위에 있는 점으로 생각할 수 있다.

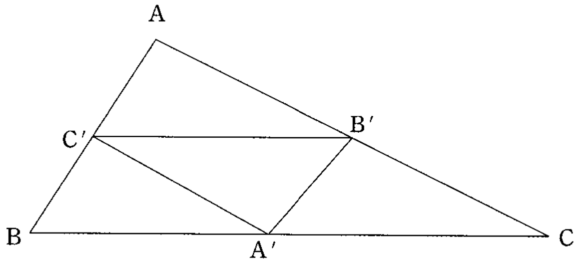
이런 애매모호함은 그림을 통해서 점 C가 원 위의 임의의 점인지 호 AB위의 점인지를 표현할 수단이 없음에서 유래하며, 이런 애매모호함을 제거하기 위해서는 반드시 부가적인 설명이 필요하다. 수학자들은 특수한 경우를 회피하기 위해 그리고 그림이 나타내는 모호성을 최소화하기 위해, 가장 일반적인 도형을 그린다. 삼각형을 그릴 때는 부등변삼각형을 그리며, 직사각형을 나타내기 위해 정사각형을 그리지는 않는다.

기하를 학습할 때, 물리적인 그림으로부터 도형을 구분하는 것은 쉽지가 않다. 학생들이 물리적인 그림이 나타내는 도형에 관해 생각하기를 원하지만, 학생들은 물리적인 그림을 가지고 사고한다. 학생들은 작도 과제를 기하학적인 특성들을 사용하여 해결하는 것으로 생가하지 않고 대신에 시각적으로 옳게 보이는 물리적인 그림을 그리는 것으로 생각한다. 그래서 한 원에 접선을 작도하라는 문제가 주어졌을 때, 학생들은 한 원에 여러 번의 시행착오를 거쳐 그럴듯해 보이는 접선을 그리거나, 원과 접선이 만나는 부분이 있음을 보이기 위해 덧칠을 한다. 그러나 기하를 지도하는 교사에게 이 작도 문제는 접선의 그림을 그리는 것이 아니라 기하학적인 관계를 이용하여 접점을 구하는 방법(서술)을 묻고 있는 것이다.

학생들의 이런 어려움은 로고를 통한 기하 학습 과정에서도 볼 수 있다. Hille & Kieran(1987)은 12 살의 학생들에게 로고 언어를 이용하여 기하학적인 그림을 그려 보게 하고 이를 관찰한 후 거북기하에서는 작도 문제를 해결하는 두 가지 서로 다른 해결 방법 - 시각적인 단서에 기초한 선택을 이용하는 시각적인 스키마와 그리려고 하는 도형의 기하학적인 관계를 찾아보려고 시도하는 분석적 스키마 - 을 사용하는 두 부류의 학생들을 발견하였다.

물리적인 그림의 시각적 측면은 그것에 대응되는 도형의 이론적인 분석에 장애가 될 수 있다. 도형에 대한 시각적인 이해는 그림을 해석하는데 있어 갈등이 일어 날 소지가 있으며, 이런 갈등은 문제의 올바른 해결로 나가는 추론에 방해가 된다. 기하학적인 문제에서 문제를 해결하기 위해서는 주어진 그림을 여러 가지 방식으로 분해하여 보고, 관점을 변화시키는 과정이 필요하다. 예로써 다음과 같은 문제를 살펴보자.

〈문제〉 다음 그림에서 $AB \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$일 때, 점 C'은 선분 AB의 중점임을 보여라.



〈그림 2〉

이 문제를 해결하는 핵심은 주어진 그림 속에서 세 개의 평행사변형을 찾는 것인데, 대다수 학생들은 주어진 그림 속에서 오직 4개의 작은 삼각형밖에 보지 못하기 때문에 문제를 해결하지 못한다. 학생들은 그림 속의 시각적인 요소에 많은 집착을 하기 때문에, 눈에 쉽게 띄지 않는 기하학적인 요소와 이들 사이의 관계를 생각하기는 대단히 어렵다. 이런 어려움은 학교에서 기하 문제를 제시할 때, 문제 해결을 위해 필요하고 충분한 자료를 주기 때문에 더욱 커지는 것 같다.

따라서 그림에서 추상화된 도형을 볼 수 있는 능력을 학생들에게 길러주는 것은 기하 학습 성공을 보장하는 최소한의 조건이 될 것이다. 문제 해결에 필요충분한 그림을 직접 제공하는 것보다 학생들이 직접 그리거나 아니면 적어도 부분적으로 그려보는 경험을 갖는다면, 그림에서 문제 해결에 필요한 요소를 추출하고 이들 사이의 관계를 파악하는 능력이 향상될 것이다. 또한 컴퓨터 환경에서 도형은 도형을 그리는 과정 자체가 그 도형을 이루는 여러 요소간의 관계에 초점을 두어야 되기 때문에 학생들이 그림에서 얻는 시각적인 장애를 극복하는데 도움이 될 것이다.

Ⅲ. 컴퓨터 환경에서의 도형

위의 논의처럼 물리적인 그림에서는 찾아볼 수 없는 도형의 특징은 도형을 이루는 요소의 가변성[1)]이다(Laborde, 1991). GSP와 같은 탐구형 소프트웨어에서는 도형 속에 내재되

1) 도형은 그것을 구성하고 있는 불변적인 관계를 보존하면서 다른 구성요소는 변화 가능하다는 의미이다. 가령, 두 쌍의 대변이 각각 평행한 평행사변형은, 두 쌍의 대변이 평행하다는 관계는 변하지 않은 채, 다른 구성 요소, 예를 들면 네 변의 길이 등을 자유롭게 변화시켜 정사각형, 마름모, 직사각형을 얻을 수 있지만 이것들 역시 역시 평행사변형이 된다.

어 있는 가변성에 입각하여 도형의 다양한 측면을 구체화시킬 수 있다. 이런 일은 전통적인 지필 환경에서의 도형은 찾아 볼 수 없는 컴퓨터 환경에서 도형의 커다란 장점이다. 이런 류의 프로그램으로는 앞에서 언급한 GSP이외에, Geometric Supposer, Cabri Geometry 등과 유클리드 기하와 관련된 로고의 절차에 입각한 방식의 LOGO Geometria등이 있다.

이런 프로그램의 공통적인 특성은 컴퓨터와 의사소통 과정에서 도형의 명시적인 기술(記述)을 사용한다. 화면상에 그려진 그림은 사용자가 도형의 정의를 명확하게 하는 과정의 결과이다. 프로그램 상의 적절한 메뉴를 선택하거나 일련의 명령어들을 서술하여 도형을 그린다. 그러한 프로그램들은 손으로 마우스만을 움직여 그림을 그리는 페인팅 프로그램과는 다르며, 그리고자 하는 도형과 그 도형을 이루고 있는 요소들 간의 관계에 대한 이해와 서술이 필요하다. 이런 소프트웨어에서 작도는 더 이상 실제적인 그림을 만들어 내는 것이 아니라 그 그림을 그리게 하는 서술을 만들어 내는 것이다. 그리고 도형의 가변적인 요소가 수정되었을 때, 의도하는 특성을 보존하면서 여러 가지 그리고 무한한 그림들을 만들어 낼 수 있다. 위에서 언급한 소프트웨어들은 이런 목적을 위해서 제공하는 방법상의 차이가 약간 있다.

LOGO 환경에서의 도형을 살펴보자. 로고는 기본적으로 그림을 그리는 도구로써, 거북이를 앞으로 주어진 발자국만큼 자취를 남기게 하는 명령어인 FD(FORWARD)와 거북이의 머리를 주어진 각도만큼 회전시키는 명령어인 RT(ROTATE), 그리고 명령어들의 모임을 주어진 회수만큼 실행시키기 위해 사용하는 명령어인 REPEAT 등을 이용하여 거북이를 움직여 감으로써 원하는 그림을 얻는 프로그래밍 언어이다. 가령 한 변의 길이가 40 인 정사각형을 원한다면, "FD 40 RT 90 FD 40 RT 90 FD 40 RT 90 FD 40"같이 일련의 명령어들을 입력하면 된다. 이렇게 정사각형을 그리는 과정은 우리가 지필환경에서 종이 위에 그려진 정사각형과는 차이가 있다. 종이 위에 그려진 정사각형을 보고, 정사각형이라는 도형의 구성 요소 사이의 불변적인 관계 – 변과 변이 이루는 각이 90° 이며 네 변의 길이가 모두 같다 – 에 학생들이 주목하기는 쉽지 않다. 그러나 로고 환경에서 그린 정사각형에서는 이런 관계를 의식 않고서는 정사각형이라는 수학적 대상인 도형을 그릴 수 없다. 도형이 그림과 관련하여 갖는 차이점인 도형의 가변성은 로고에서 절차를 사용할 때만 얻어질 수 있다. 가령, 일반적인 정사각형은 다음과 같은 절차로 로고 언어에서 얻을 수 있다.

```
TO SQUARE : SIDE
REPEAT 4 [FD : SIDE RT 90]
END
```

종이 위에 그려진 정사각형은 크기가 고정된 정사각형의 하나의 예에 불과하지만 로고 환경에서 변수가 사용된 절차는 정사각형을 임의의 크기를 갖는 정사각형으로 만들 수 있다. 또한 로고 환경에서 이렇게 도형을 그리는 경험을 한 학생들은, 화면에 그려진 도형보다 그 도형을 그리기 위해 사용된 절차에 보다 사고의 초점을 두게 될 것이다.

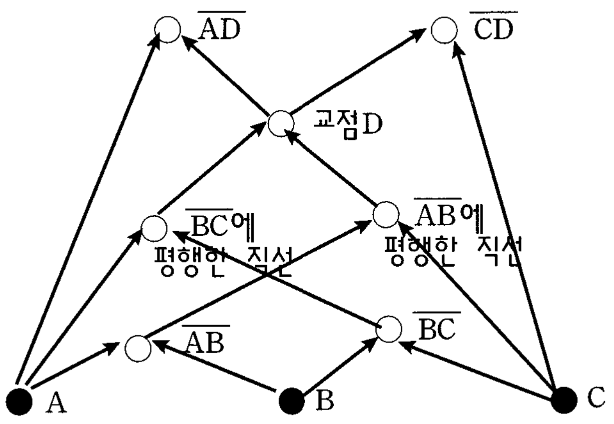
GSP, Geometric Supposer, Cabri Geometry등과 같은 기하 학습 도구 소프트웨어에서는 로고 환경과는 다른 방식으로 도형을 그린다. 이런 환경에서 그림을 그리기 위해서는 화면상에 점을 찍거나 선분을 그리고 그 선분을 선택하는 과정과 메뉴 항목을 선택하는 명시적인 과정이 필요하다. 이런 과정에는 도형을 이루는 요소들 사이의 관계(수직 · 평행 · 교점) 등을 고려하여야 한다. 예로써, 평행사변형 ABCD를 그리는 과정을 살펴보자.

먼저 화면에 마우스로 세 개의 기본점(base point) A, B, C를 정한다. 이 세 점을 가지고 선분 AB, BC를 그린다. 점 A를 지나고 선분 BC에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AB에 평행한 직선을 그린다. 그런 후에 이 두 직선의 교점 D를 구한다. 점 A와 D 그리고 점 C와 점 D를 연결한 선분을 그리면 평행사변형 ABCD가 얻어진다. 여기서 두 점을 잇는 선분이나 교점, 평행한 직선은 메뉴에서 그에 해당한 항목을 선택함으로써 구하거나 그릴 수 있다.

이렇게 GSP에서는 두 쌍의 대변이 각각 평행하다는 평행사변형의 정의를 구체적이고 직접적인 조작 활동을 통하여 평행사변형을 얻게 된다. 그리고 점 A를 지나고 선분 BC에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AB에 평행한 직선은 GSP의 '감추기' 기능을 이용하여 화면에 보이지 않게 하여야 컴퓨터 화면에는 평행사변형만 남게 된다. 평행사변형을 이루고 있는 점들을 마우스를 이용하여 움직여 보면서 사각형, 마름모, 정사각형 등 다양한 형태의 평행사변형을 관찰할 수 있다. 그러나 여기서 사각형, 마름모, 정사각형이 될 수 있다는 것은 학생들의 시각적인 판단에 의해 이루어지는 것이다. 물론 선분의 길이, 각의 크기 등은 GSP의 '측정 기능'을 통해 알 수 있으나 평행성 등은 측정 기능을 통해 알 수 없다. 두 직선의 평행성은 마우스로 직선의 점을 이동시켜 두 직선이 만나게 되는지의 여부를 통해 확인할 수 있다.

이상과 같은 평행사변형 작도 과정을 도식으로 나타내면 〈그림 3〉과 같이 된다

위의 도식에서 위에 있는 점들과 선분들은 아래에 위치한 점, 혹은 선분들에 종속되어 있다. 그래서 아래에 있는 요소들을 마우스로 클릭한 후 이동하면 위에 있는 요소들이 변할 수 있으나 위에 있는 요소를 변화시키면 아래의 요소는 변하지 않고 전체 그림이 이동하게 된다.



〈그림 3〉 GSP에서 평행사변형을 이루는 요소들 사이의 관계[2)]

Ⅳ. 컴퓨터 환경에서 기하 교수-학습에서 발생할 수 있는 잠재적인 문제점과 교수학적 처방의 예

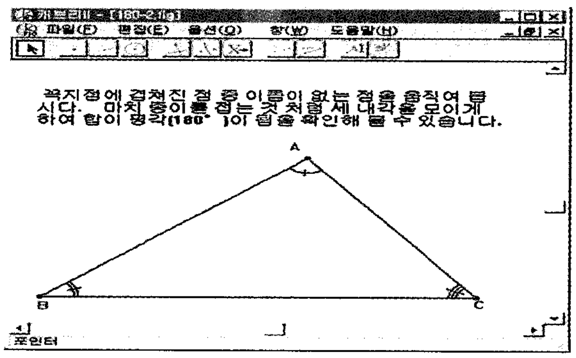
Schoenfeld(1987)는 1 년 동안 기하 수업에서 작도를 학습한 학생들이 작도 방법과 증명을 서로 연결시키지 못한다는 사실을 학생들과의 대화를 통해 발견하였다. 그 원인으로 시험 문항의 배점 비율 그리고 수업과 과제의 초점이 작도의 타당성보다는 작도 방법에 학생들이 주목하게 만든 것을 들고 있다. 기하 수업에서 작도을 처음 도입할 때, 작도 방법의 타당성을 증명하기도 하지만, 이는 작도 방법을 정당화하기 위한 한단계일 뿐 그 과정에서 증명 · 지도 자체에 비중을 작게 두기 때문에 학생들은 증명을 중요하게 인식하지 않는다고 한다. 그리고 증명은 실질적인 대상과는 전혀 관련이 없는 증명 자체의 세계에 속한 것으로 학생들은 생각하게 된다고 한다. 즉 학생들은 교수 방법의 영향도 있겠지만, 작도 방법을 중심으로 구체적인 작도 경험을 통한 귀납적인 접근과 기하에 대한 증명을 통한 연역적인 접근을 별도의 기하로 분리하여 생각하게 되는 것이다.

2) 여기서 ●는 기본점(base point)를 나타내며, ○는 기본점에 종속적인 점이나 선분 · 직선 등을 나타낸다. 마우스를 이용하여 ●로 표현된 기본점들을 움직이면 다양한 형태의 평행사변형을 얻을 수 있으나, ○로 표현된 점을 드래깅하면, 그림 전체가 움직이지 평행사변형의 형태는 전혀 변하지 않는다.

도형을 컴퓨터의 도움으로 작도하게 되는 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어 환경에서는 그 작도의 타당성을 학생들 자신의 사고를 통해 얻는 것이 아니라 학생들이 컴퓨터에 부여한 권위와 신뢰로부터 얻을 가능성이 있기에 연역적인 기하와 귀납적인 기하를 분리하는 경향이 보다 클 가능성이 있다. 이런 경향은 연역적 기하의 출발점이라 할 수 있는 '증명의 필요성'에 대해 학생들의 인식을 방해할 수 있을 것이다. 새로운 신세기를 위하여, 미국 NCTM이 준비하고 있는 STANDARD 2000『Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft』에는 다음과 같이 언급하면서 이런 문제점을 제시하고 있다.

> 공학적으로 꾸며진 교실에서는 수학적 추론의 발달을 위한 특정한 지지력과 도전거리를 제공한다. 공학은 학생들이 예를 선택하고 어떤 것에 대한 많은 예를 산출하는데 있어서 통제할 수 있게 해주며, 그럼으로써 예와 그 근본적인 아이디어를 알게 될 가능성을 제공한다. 학생들이 많은 예를 검토하여 패턴을 발견할 수 있게 됨에 따라 학생들은 자신이 발견한 패턴이 일반적인지를 결정하는 방법을 발달시킬 필요가 있다. 공학은 학생들이 추측을 만들도록 도움을 줄 수 있지만 학생들이 형식적 정당화나 증명의 필요성을 아는 것을 더욱 어렵게 만들 수도 있다.(NCTM, 1998)

'삼각형의 내각의 합은 180°' 임을 Cabri Geometry Ⅱ를 이용하여 학생들에게 동적인 시각 경험을 제공하여 지도하는 예를 살펴보자(송영준, 1998). 〈그림 4〉의 처음 상태는 마치 종이로 만든 두 개의 삼각형이 겹쳐져 있는 상태로, 그 중에서 위에 있는 삼각형의 각 꼭지점을 잡아끌면 종이가 뒤집어지는 것 같은 모양이 되면서 세 각을 한 곳으로, 모을 수 있다. 세 각을 한 곳에 모으면 평각에 꼭 맞으므로 세 내각의 합이



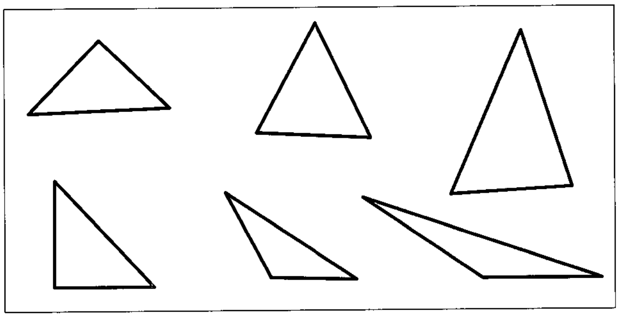
〈그림 4〉

180° 임을 알 수 있다. 삼각형의 세 꼭지점을 움직여 삼각형의 모양을 변형시켜도 여전히 180° 임을 알 수 있다.

이와 같은 접근을 통해 학생들이 학습하게 되는 '삼각형 내각의 합은 180°' 라는 지식의 성격을 고려하여 보자. 플라톤은 대화편 《테아에테투스》에서 '지식이란 무엇인가?' 하는 물음을 설정해 놓고, 옳은 신념과 진정한 지식의 차이를 통해 '지식을 정당화된 옳은 신념' 으로 분석해 놓고 있다(한상기, 1995. p.12). '삼각형의 내각의 합이 180°' 라는 것이 참인 진리이고, 위와 같이 컴퓨터 환경에서 활동을 통하여 이것이 옳다는 신념을 학생들에게 강화시켜 줄 수 있지만, 이것만으로 학생들이 '삼각형의 내각의 합이 180°' 라는 것을 이해하고 있다고 보기 어렵고 단지 '삼각형의 내각의 합은 180°' 이라는 단편적인 사실만 알게 된다. 바로 자신의 신념에 대해 정당화 과정이 빠졌기 때문이다. 정리를 위와 같이 학생의 사고가 필요없는 시각적인 경험을 통해서 바라볼 수 있는 식으로 제공하여 준다면, 이는 학생들에게 단지 그 정리가 참이라는 신념만 강화시켜주게 되어, 연역적 기하에서 가장 필요한 '증명의 필요성' 에 대한 인식을 학생들이 느끼지 못할 수 있다. 그리고 수학적 지식에 대한 시각적인 경험만을 학생들에게 별도의 교수학적 처방이 없이 제공한다면, 학생들이 경험 속에서 '인지 갈등' 의 가능성을 줄여 학생 자신의 사고와 행동을 반성할 기회가 적어지고, 이는 '인지 갈등' 과 해소를 통한 사고 수준의 비약이라는 수학 교수의 목표에 도달하는데 장애가 될 수 있을 것이다.

이제 컴퓨터 기반, 기하 교수-학습 환경에서 생길 수 있는 잠재적인 문제점들을 해결할 수 있는 교수학적 처방에 대해 생각하여 보자. 위의 〈그림 4〉와 같은 경험을 학생들에게 제시하기 전에 〈그림 5〉와 같은 문제를 제시하여 삼각형 내각의 합이 모두 같을지를 학생들이 생각하여 보게 하자.

학생들은 삼각형의 모양에 따라 삼각형의 내각이 합이 같지 않을 것으로 생각한다. 그런 후에 컴퓨터 환경에서 〈그림 4〉와 같은 경험을 제공하여 주면, 학생들은 모양이 다르면 삼각형의 내각의 합도 다를 것이라는 자신의 예전 생각에 갈등을 유발 할 수 있다. 그래서 삼각형의 모양이 달라도 왜 내각의 합이 동일한지에 대한 생각을 품게 하여 줄 수 있을 것이다. 여기에다 Toeplitz가 말한 간접으로 발생적 방법에 따라 전개된 Clairaut의 기하 교과서 가운데 나오는 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 지도하는 방법(Barbin, 1991)을 컴퓨터 환경에서 구현하여 학생들에게 제공하여 주면, 삼각형 내각의 합이 180° 라는 사실과 왜 모든 삼각형의 내각의 합이 동일한지에 대한 학생들의 이해를 도울 수 있을 뿐더러 그 증명 방법을 찾을 수 있을 것이다.

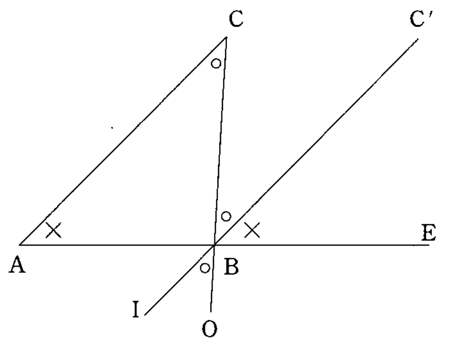


〈그림 5〉

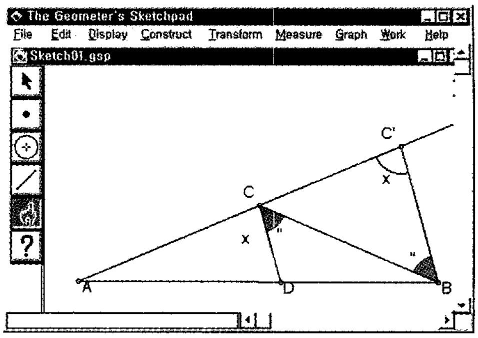
간접적인 발생적 방법에 따라 전개된 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 증명하는 방법을 컴퓨터 환경에서 구현하여 보자. 유클리드 《원론》에는 각이 두 직선 사이의 기울기로 정의되고 있지만 두 각을 비교하고자 할 때에는 삼각형의 합동조건을 이용하며, 삼각형의 내각의 합이 180° 임은 평행선 공준을 이용하여 평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 엇각 · 동위각이 같음을 증명한 다음, 이를 이용하여 연역적으로 증명하고 있으며, 우리 나라의 중학교 교과서도 이와 다를 바가 없다. 그러나 이렇게 증명된 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 사실을 부정하지 못하지만 삼각형의 모양이 변할 때 왜 내각이 합이 불변인지를 알지 못한다. 역사 발생의 근원을 고려하여 집필된 Clairaut의 《기하학 원론》에서는 유클리드와 마찬가지로 각을 기울기로 정의하고 있으며, 현재 중학교 수학에서 다루고 있는 엇각과 동위각을 이용한 유클리드 증명과는 달리, 증명에서 이 정의를 이용하고 있다. 먼저, 〈그림 6〉에서 삼각형 ABC를 머리 속에 그리고 직선 BC를 회전시켜 보라고 한다. 그러면 ∠B가 열리고 ∠C가 닫히는 것을 보게 되고 두 각의 합이 변하지 않을 것으로 느끼게 된다. 이를 GSP를 이용하여 구현하면 〈그림 7〉이 된다.

삼각형 ABC가 컴퓨터 화면에 있고 C와 같은 위치에 있던 C′을 직선 AC를 따라 움직이면, ∠C가 줄어든 ∠DCB만큼 ∠B가 커지게 되어 전체적으로 삼각형의 내각의 합은 불변이게 된다. 그리고 C′를 극단적인 경우까지 열어서 BC′가 AC와 평행한 경우를 [그림6]처럼 생각하게 되면 AC와 BC은 AB에 대하여 같은 기울기를 갖게 되므로 ∠BAC와 ∠EBC′는 같게 된다. 마찬가지로 AC와 BC은 CB에 대하여 같은 기울기를 가지므로 ∠ACB와 ∠IBO는 같다. 그런데 ∠IBO와 ∠CBC′은 같다. 따라서 삼각형 ABC의 내각의 합은 평각과 같으므로 180° 임을 알 수 있다.

이와 같이 단순화된 수학적 사실에 대한 시각적 경험을 학생들에게 제공하기 전후로



〈그림 6〉



〈그림 7〉

교수학적 처방이 주어진다면 위에서 언급한 컴퓨터 환경의 잠제적인 문제점을 어느 정도 극복할 수 있고, 오히려 이런 문제점을 효율적으로 이용할 수 있는 방안을 모색하여 학생들의 수학 학습에 도움을 줄 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결 론

학생들이 기하를 학습하면서 겪는 어려움은 시각적인 요소에 기인한다. 학생들이 기하학적인 도형을 물리적인 그림으로만 바라보아 그 그림이 나타내려는 기하학적 관계에 주목하지 못한다. 그러나 컴퓨터 환경에서 나타내는 기하학적 도형은 그 도형을 구성하는 과정에서 도형이 나타내려는 기하학적인 관계를 의식하여야 그릴 수 있다. 이런 과정을 통해 학생들은 도형 속에 들어 있는 기하학적인 관계를 의식하고 도형을 단지 물리적인 것이 아닌 도형으로 파악할 수 있게 되어, 컴퓨터 기반 학습환경은 훌륭한 학습 공간이 될 수 있다.

나귀수(1998, p.135)는 증명의 본질에 대한 이론적 고찰과 증명 지도의 실제 분석에 대한 연구에서 분석적인 방식을 과감하게 도입하여, 종합적 방식만을 지도하는 현재의 상황에서 탈피하여 분석적 방법과 종합적 방식이 통합된 역동적 추론 과정을 통해 증명을 지도하여야 한다는 증명 지도 개선 방향을 제시하고 있는데, 종합적인 관점보다 분석적인 관점이 강한 컴퓨터 환경은 이 개선 방향을 반영할 수 있는 충분한 기하 학습 환경을 제공할 수 있을 것으로 생각된다.

그러나 컴퓨터의 역동적인 기하 학습 환경이 어떤 기하학적인 정리를 탐구하거나 주어진 기하 문제를 분석적으로 관찰하는데 사용되는 것이 아니라 단지 기하학의 어떤 정

리를 시각적으로 확인하는 수준에서 사용된다면, 학생들이 '증명의 필요성'에 대하여 인식을 못할 수 있다. 그리고 자신의 사고를 반성할 계기가 되는 '인지 갈등'의 기회가 적어져, 자신의 사고와 행동을 반성하여 보다 높은 수준으로 학생들의 사고가 비약할 수 있는 경험을 제공하는데 잠재적인 문제점을 노출할 수 있다. 따라서 컴퓨터 환경에서 학생들이 행하는 조작들의 결과에 대한 반성과 학생들 자신의 사고에 대한 반성이 일어날 수 있는 교수학적 처방이 필요한데 이는 교사의 몫이 될 것이다.

컴퓨터 환경에서 학생들이 자연스럽게 얻는 경험은 이후의 수학학습의 개념적 출발점이 될 수 있지만, 그 경험의 강제성과 지속성 때문에 학생 마음 속에 사라지지 않고 오래 남아 이후에 형식적인 수학 학습을 하는데 방해 요인이 될 수 있다. 컴퓨터 학습 환경이 학생들에게 제공할 수 있는 독특한 경험이 무엇인지를 살펴보고, 이런 경험이 학생들의 수학학습에 좋지 않은 영향을 줄 가능성은 없는지 그리고 이런 경험을 적절한 교수학적인 처방을 통해 효율적으로 이용할 수는 없는지에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

나귀수(1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석 : 중학교 기하 단원을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

류희찬(1997). 수학교육에서의 컴퓨터 활용 : 현황과 과제. 청람수학교육, 6.

송영준(1998). 캐브리Ⅱ를 활용한 기하 수업. 대한수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집.

한상기(1995). 지식의 조건. 서광사 : 서울.

Balacheff, N.(1996). Advanced educational technology: Knowledge revisited. In T. Lin(Ed), *Advanced educational technology: Research issues and future potential.* Springer-Verlag.

Barvin, E.(1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective. *For the Learning for Mathematics,* 11(2).

Hilbert, J.(1987). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

Hille, J., & Kieran, C.(1991). The computer as part of the learning environment

: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven(Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology.* Springer-Velrag.

National Council of Teachers of Mathematics(1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft.* Reston, VA: Author.

Schoenfeld, A. H.(1987). On having and using geometric knowledge. In J. Hilbert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the Case of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A.(1991). On the nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22.

Tall, D.(1991). Interrelationships between mind and computer: Processes. In L. F. David (Ed.), *Advanced educational technologies for mathematics and Science.* Springer-Verlag.

Potential Problems on the Computer-based Teaching and Learning Environment for Geometry and An Example for a Didactical Treatment.

LEE, C. Young(Seoul National University, Graduate School)

In this paper we give a description of students' obstacles in their learning of geometry, especially resulted from their confusing a physical drawing with a figure, a geometrical object which a physical drawing represents. In computer-based teaching-learning environment, we could relieve such obstacles through providing students for experiences in which they must focus on elements of a figure and relations of them. But there may be potential in computer-based enviromnent if we offer students only visual experience for validity of geometrical gacts: students' lack of understanding for need of proof and experience of cognitive obstacles which is very important for students to reflect their thinking and activities. Thus an didactical treatment must follows, which we also give an example.