대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 301~308, March 1999

함수를 찾고 해석하는 수업 -중학교 2학년 일차함수를 중심으로-

남 호 영 (대림여자중학교)

우리가 살고 있는 현실 속에서 한 쪽 양이 변할 때 또 다른 쪽 양도 따라서 변하는 관계를 관찰할 수 있다. 함수를 배운 후에는 이런 관계를 분석하는 도구로 함수라는 개념이 생겨났다는 것을 알 수 있어야 한다. 그런데 교과서에는 수 집합에서 $y=ax+b$의 꼴로 주어지는 함수만 제시되어 있어서 변화하는 두 양 사이의 관계의 해석이라는 함수의 본래적인 맛을 느낄 기회가 없다. 함수적 사고 방식을 학생들이 익히려면 수업 자체가 함수라는 개념이 생겨나게 된 이유를 이해할 수 있게 진행이 되어야 하고, 현실에서 함수가 어떻게 쓰이고 있는지 이해할 수 있게 진행이 되어야 한다.

Ⅰ. 함수에 대한 교육적 이해

함수 개념의 근원은 고대 바빌로니아 시대까지 거슬러 올라갈 수 있지만 개념화된 함수는 17세기에 이르러 역학에서 물체의 운동을 곡선으로 나타내어 연구하는 가운데 시간과 거리와 같은 변량 사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 함수 개념이 등장하던 초기에는 독립변수와 종속변수의 구분이 없었다.

해석기하학의 발달과 함께 여러 가지 곡선이 방정식으로 표현되면서 변량 사이의 함수 관계가 하나의 방정식으로 나타내어지게 되었다. 오일러는 그러한 상황을 일반적인 것으로 인식하고 변량 사이의 관계를 나타내는 해석적인 표현, 곧 식을 함수라고 정의하였다. 그리고 함수는 곡선과 밀접한 관련성을 갖고 있었고 그러한 곡선은 대부분 다가(多價) 대응이었으나, 한 변수의 다른 변수에 대한 종속 관계가 다가 대응이 되는 경우 다루기가 혼란스러워졌다. 특히 음함수와 같은 함수식에서 다른 변수로 나타낼 때 여러 개의 식이 나오게 되는 경우 혼란을 일으키게 되므로, 수학자들은 함수를 일가(一價) 대응으로 제한하게 되었고 결국 이것이 함수의 일반적인 정의로 받아들여지게 되었다.

18세기 후반에 하나의 해석적인 식으로 나타내어지지 않는 함수가 등장하였고, Fourier가 임의의 함수는 삼각함수로 전개 가능하다는 주장을 제기하면서 함수는 하나의 해석적인 표현이 가능한 것이라는 전통적인 관념에 혁명적인 변화가 일어났다.

이로부터 Cauchy는 하나의 특별한 형태의 곡선으로 나타내어지거나 그렇지 않거나, 규칙성이 있어 하나의 해석적인 표현이 가능하거나 그렇지 않거나, 일반적으로 어떤 독립변량의 값에 따라 그 값이 정해지는 종속변량은 모두 함수라는 생각에 이르게 되었다. 이런 함수 개념의 발달을 바탕으로 19세기 초에 Dirichlet에 의해, 주어진 구간의 각 점에 임의의 값이 대응되는 대응 관계를 함수라고 정의하는 일반적인 함수 개념이 제기되었다.

이와 같이 일가성과 임의성은 역사적 발생의 과정에서 생긴 함수 개념의 본질적인 특성이다. 수학의 발달과 더불어 함수는 임의의 집합 사이의 사상으로 일반화되고 정의역이 수나 점뿐만 아니라 수의 쌍, 곡선, 함수, 연산자 등 임의의 집합인 함수로 일반화되었다.

이렇게 개념이 변하는 것은 함수라는 도구를 써서 해석할 수 있는 대상이 점점 더 많아진다는 것을 의미한다. 그리고 이 함수 개념은 문맥에 따라 역동적인 변화 현상 가운데 종속 관계를 기술하고, 해석하고, 예언하기 위한 수단으로써 변수 측면과 그 규칙성을 나타내는 식 표현과 그래프 표현 그리고 다양한 대응 관계적 측면을 포괄하는, 수학 내적 · 외적인 제 현상을 이해하고 조직할 수 있는 수단으로 작용할 때에만 그 진정한 개념적 힘을 발휘할 수 있는 것이다.

따라서 함수의 본질을 이해시키고 함수적 사고를 육성하려면 관점을 전환하여 실제적인 물리적 · 사회적인 변화 현상을 기술하고 해석하는 경험으로부터 출발하여 점진적인 수학화 과정을 재발명하도록 지도해야 한다. 그 방법의 하나로 프로젝트 수업을 생각할 수 있다. 학생들이 일상생활에서 함수관계를 갖는 두 양을 찾는 것이다. 변화하는 두 양이 어떤 관계를 갖는가 자료를 수집하여 분석할 수도 있고 직접 실험을 하면서 관찰할 수도 있다. 그것을 수학화 해내는 과정에서 함수적 사고능력을 키울 수 있을 것이다.

Ⅱ. 프로젝트에 선행하는 수업

생활 주변에서 변화하는 두 양을 찾아보자. 다음과 같은 예를 들면서 변화하는 두 양 사이의 관계를 파악해 본다. 또 다른 예를 학생들이 발표하도록 한다.

◇ 변화하는 두 양 사이의 관계를 추측하여 본다.

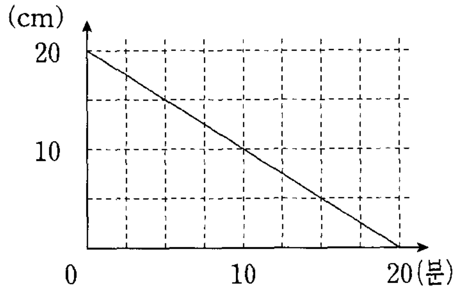
1. 하루의 시간 변화에 따라 기온을 측정하여 보자. 두 양, 시간과 기온은 어떤 관계를 갖는가?
2. 운동장에 막대기를 꽂아 놓고 시간에 따라 그림자의 길이를 측정하여 보자. 두 양, 시간과 막대기의 그림자의 길이는 어떤 관계를 갖는가?
3. 병에 물을 가득 채우고 밑에 구멍을 뚫어 시간에 따라 물의 높이가 어떻게 변하는 지 측정하여 보자. 두 양, 시간과 물의 높이는 어떤 관계를 갖는가?
4. 일년 동안 해가 뜬 시간을 조사하여 본다. 날짜와 해가 뜬 시간은 어떤 관계를 갖는가?

☞ 두 양 사이에서 어떤 양이 독립적인지, 어떤 양이 종속적인지 분별하여 본다. 학생들에게 변화하는 두 양을 예를 들어보게 한다. 발표가 끝나면 예로 든 현상에서 어떤 양이 독립적이고 어떤 양이 종속적인지 확인할 수 있는 기회를 준다.

상황에 따라서는 독립적인 양과 종속적인 양이 서로 바뀔 수도 있다. 어느 양을 기준으로 하느냐의 문제는 관찰자의 필요에 따라 정할 수 있을 것이다. 함수의 개념이 필요한 이유는 두 양의 변화에 대하여 설명할 수 있다는 것이다.

생활 속에서 함수 관계를 갖는 것을 찾아본다. 신문이나 잡지에서 함수관계를 나타내는 그래프를 찾아본다. 물건값의 변화, 월별 종합주가지수 추이, 날짜별 환율의 변화, 기온의 변화 등의 그래프를 찾아서 두 양 사이의 관계를 설명하는 도구로써 함수를 토론해 본다.

1. 길이가 18cm인 초에 불을 켜고 시간이 지남에 따라 초의 길이가 어떻게 변하는지 조사하였다. 아래 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.



(1) 10분 후에 초의 길이는 몇 cm인가?
(2) 20분 후에 초의 길이는 몇 cm인가?
(3) 시간과 초의 길이 사이의 관계를 말하여라.

☞ (1), (2)은 시간에 따라 양의 길이가 어떻게 변하는지 그래프를 읽어 구체적으로 파악하도록 하는 문제이다. (3)에서는 시간과 초의 길이 사이의 관계를 추측하도록 하는 문제이다. 초의 두께에 따라 다르지만 보통 초는 10분에 1cm정도씩 짧아진다.

2. 선영이는 높이가 1200m인 산에 오르면서 계속 기온을 재었다. 다음과 같이 기온이 변하였을 때, 물음에 답하여라.

높 이	100m	200m	300m	500m	1000m	1200m
기 온	22°C	21.4°C	20.7°C	19.3°C	18.7°C	18.0°C

(1) 높이가 200m인 곳의 기온은 몇 °C인가?
(2) 높이가 100m씩 높아질 때마다 기온은 약 몇 °C 높아졌는가?
(3) 높이가 1m씩 높아질 때마다 기온은 약 몇 °C 높아졌는가?
(4) 높이를 xm, 기온을 y °C라고 할 때, x, y 사이의 관계를 식으로 나타내어 보자.

☞ (1)에서는 변화하는 두 양이 어떤 것인가에 주목시키기 위하여 200에 대응하는 수를 물었다.
(2)는 대응표를 이용하여 높이와 기온의 관계를 추측해내는 문제이다. 이때 높이에 따른 기온의 값의 변화가 약간씩 다른 점에 대하여 토론한다.
(3)에서는 (2)를 이용하여 높이의 단위를 1m로 하였을 때, 높이와 기온 사이의 관계를 파악하도록 하였다.
(4)에서는 높이와 기온 사이의 관계를 식으로 나타내도록 하였다.

이런 문제에서 x와 y사이의 관계를 찾을 때 빠지기 쉬운 오류는 높이의 단위를 100m 그대로 한다는 것이다. 즉, $y = 22 - 0.6x$와 같이 관계식을 구하기 쉽다. (3)에서와 같이 높이가 1m씩 증가할 때 기온이 얼만큼씩 변하는지 구한 후에도 그 의미를 깨닫지 못하고 대응표에서 눈에 보이는 대로 기온은 0.6°C 변한다고 생각하는 것이다. 관계식을 구할 때 x와 y가 가지는 의미를 적극적으로 분석하도록 강조해야 한다.

또 하나의 문제는 높이와 기온의 관계가 교과서에 나와 있는 자료처럼 일정한 관계를 가지지 않는다는 점이다. 높이와 기온의 관계가 가지게 되는 오차를 어떻게 해석할 것인가에 주목해야할 것이다.

Ⅲ. 프로젝트의 실제 - 함수관계 찾기

가. 프로젝트 수행

프로젝트 과제를 잘 수행할 수 있으려면 조원들간에 토론이 활성화되어 있어야 한다. 즉, 평상시의 수업에서 서로 토론하고 함께 풀어나가는 연습이 되어있으면 약 일주일 정도 걸리는 과제 수행이 순조롭다.

(1) 조 편성

토론이 가장 잘 이루어지는 조의 규모는 4명이므로 한 조를 4명으로 구성한다. 조는 강제적으로 구성하는 것보다는 자율적으로 구성할 수 있도록 배려하는 것이 프로젝트 수행과정에서 협동이 잘 이루어질 수 있는 전제조건이 된다.

(2) 주제 정하기

사회적인 현상이나 자연적인 현상 등 생활 속에서 볼 수 있는 두 양을 관찰하여 함수관계가 성립하는지 예측해 본다. 함수관계가 성립될 것으로 예상되는 주제를 정하여 자료를 수집하거나 또는 직접 실험을 한다.

주제를 정한 후에는 조별로 나와서 자신이 속한 조의 주제와 조사 동기, 예측되는 결과 등을 발표하도록 한다. 이 과정에서 자신들의 계획의 미흡한 점을 찾아내게 되어 주제를 바꾸는 조도 생기게 되는데 이런 과정을 충실히 수행한 조일수록 보고서가 알차게 나왔다.

(3) 자료 수집 또는 실험

자료를 수집할 때에는 도서관, 기상청, 박물관, 인터넷 등 학생들이 이용할 수 있는 최대한의 것을 동원하도록 격려한다. 실험을 할 때에는 정확을 기하기 위하여 같은 실험을 2번 이상 할 수도 있다.

(4) 자료 정리 및 분석

자료를 수집하였거나 실험이 끝나면 다음과 같은 순서로 보고서를 작성한다.

① 제목 : 주제를 밝힌다.

② 조사 목적 : 주제를 선택한 이유와 동기, 목표를 밝힌다.

③ 조사 방법 : 기간(날짜와 시간), 조사자, 조사자간의 역할 분담까지 자세히 기록한다. 조사 방법은 조사 과정을 찍은 사진을 붙여서 자세히 설명하도록 한다.

④ 결과 : 수집한 자료나 실험 결과를 대응표, 그래프 등으로 나타낸다.

⑤ 분석 : 함수의 관계식을 구하고 그 의미를 분석한다.

보고서의 기본 양식은 위와 같은 형식으로 제시하되 작성할 때에는 조에 따라 다양하게 개성을 살리도록 권장한다. 조사 과정을 찍은 사진 대신 그 과정을 그린 그림 등을 붙인다거나 조사 과정에서 느낀 점을 인터뷰 형식으로 한쪽에 싣는 것도 좋은 방법일 것이다.

대응표를 그래프로 나타낼 때에는 좌표축의 눈금의 간격에 주의해야 한다. x축과 y축이 같은 양을 나타낸다면 눈금의 길이도 같게 하는 것이 바람직하다. 또 그래프의 관계식을 구할 때에는 두 개의 순서쌍만을 골라서 구하는 것보다 여러 개의 순서쌍에서 x의 계수를 구하여 볼 수도 있다. x의 계수의 값이 여러 가지로 나올 때 그것을 처리하는 방법에 대해서도 토론할 수 있을 것이다.

(5) 발표

보고서 작성이 끝나면 조별로 발표하는 시간을 갖는다. 발표를 함으로써 자신들이 조사한 것의 의미를 다시 한 번 되새길 기회도 갖고 다른 조에서 발표한 것을 간접 경험할 기회를 갖는 것이다.

나. 평가(황혜정 외, 1997)

프로젝트 결과를 점수화할 때에는 위의 평가 기준을 이용하여 각 기준에 대하여 0, 1, 2의 3단계로 평정 척도를 하여 분석적인 점수화 방법으로 하였다. 즉, 6개의 평가 기준에 대하여 0점, 1점, 2점으로 점수화하였다. 이렇게 합산한 점수가 10점 이상이면 10점을, 그렇지 않은 경우에는 합산한 점수를 그대로 부여하였다. 여기에서 문제의 이해, 문제해결 방법 등 6가지 평가 기준은 다음과 같이 해석하였다.

문제의 이해 : 선택한 프로젝트 주제가 함수로 표현하기에 적당한가, 주제가 창의적인가?

문제해결 방법 : 실험 방법이 주제에서 함수 관계를 드러내기에 적당한 방법인가, 실험 방법이 정확한가, 오차가 너무 커지는 방법을 선택하지는 않았는가?

자기 논평 : 함수의 유용성과 수학의 가치를 어느 정도 이해하였는가?(프로젝트를 마친 후의 소감을 보면서 판단한다.)

조원들이 어느 정도 협동하였는가?

수학 용어 : 정의역, 공역, 기울기 등의 용어를 정확하게 썼는가?

수학적 표상 : 풀이의 결과를 의사소통하기 위하여 기울기를 정확한 방법으로 구하였는가, 자료를 정확하게 분석하였는가?

풀이 설명 : 자료를 일목요연하게 정리함으로써 세련되고 체계적으로 결과를 발표하였는가?

다. 학생 보고서 주제의 예

호수 길이에 따른 물의 통과 시간

시간에 따른 양초의 길이

카세트 테이프 길이와 노래 시간 사이의 관계

Water과 The Depth의 Function

거리에 따른 매직의 그림자의 길이

시간에 따른 얼음의 높이

모래의 무게에 따른 물의 깊이의 변화

다리미 온도에 따른 헝겊이 타는 시간의 변화

라. 프로젝트 분석

이 프로젝트를 수행하면서 학생들은 여러 가지를 깨닫게 되었다. 우선, 실제로 일차함수의 관계를 갖는 두 양도 실험 오차로 인해서 두 양 사이의 관계를 그래프로 나타내었을 때 직선으로 나타나지 않았다는 점이다. 이 과정에서 기울기를 구하는 방법이 다양하게 등장하였다. 가장 흔한 경우는 두 점을 골라서 기울기를 단 한 번만 구하는 경우였으며 여러 쌍의 두 점에 대해서 기울기를 구해서 평균을 낸 경우도 있었다. 또, 좌표평면 위에 찍은 여러 개의 점을 관통하는 직선을 그려서 그것의 기울기를 구한 경우도 있었다. 교과서에서는 직선 위의 어느 두 점을 골라서 기울기를 구해도 항상 같다고 학습하였지만 현실에서는 결국 근사값으로 구할 수밖에 없다는 사실에서 수학의 추상성을 경험하였을 것이다.

두번째는 교과서로만 학습할 때에는 일차함수가 엄청나게 많다고 느끼지만 프로젝트를 진행하면서, 결과를 분석하면서 학생들은 의외로 일차함수의 관계를 갖는 두 양이 별로 없다는 사실을 깨닫게 된다. 시간에 따른 나무 그림자의 길이, 시간에 따라 종이가 물을 흡수하는 양과 같이 상식적으로도 실험 결과가 일차함수로 나오지 않는 주제도 시간을 제한한다던가 하는 방법으로 일차함수의 결과가 나오도록 실험을 마친 조도 있는 반면, 그러한 실

험에서 일차함수가 나오지 않는 이유를 분석한 조도 있었다.

그러나 가장 중요한 것은 이 프로젝트가 교과서의 문제만 풀 때보다는 모든 학생들에게, 교사에게 함수의 의미, 유용성에 대하여 훨씬 더 진지하게 생각할 수 있는 기회가 되었다는 점이다. 프로젝트를 수행하면서 교실이 수학적 아이디어를 사용하는 일상적인 탐구의 장소가 되었던 경험이 다른 단원의 학습에도 밑거름이 될 것이다.

참 고 문 헌

우정호(1997). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

황혜정 외(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법. 서울특별시 교육청.