대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 331~349, March 1999

수학과 수행평가의 개관

최 승 현 (한국교육과정평가원)

Ⅰ. 수행평가의 의의

일반적으로 수행평가(Performance Assessment)란 여러 가지 구체적인 상황하에서 실제 행동으로 나타나는 과정이나 그 행동의 결과를 평가하는 것을 뜻한다. 일정한 학습 후 학생이 답안을 구성하거나 행동으로 나타내는 것을 지식이나 기능의 습득이라 가정하여 직접적으로 측정, 평가하는 과정이라 할 수 있다. 즉, 학생들이 질문에 대해 주어진 항목에서 고르던 선택형 문항에서 답을 찾는 것이 아니라 각각의 주어진 문항에 대해 답을 창조하거나 비판하는 것이다. 수행평가는 학생들의 실험과 관련된 지식 및 능력을 측정하기 위하여 특별히 만들어진 평가 방법으로 실험 도구를 다루는 능력, 지침서에 따라 실험을 수행하는 능력, 관찰을 통하여 그 결과를 해석하며 결론을 이끌어 내는 능력, 가설을 설정하여 이를 검증하는 능력 등 학생들의 조작적 기능과 숙련도, 그리고 이를 뒷받침하는 수학적, 과학적 지식을 요구하는 내용으로 구성되어 있다. 이에 수행평가의 문제는 풀이와 답이 다양하며, 독창적이고, 정교성을 요구하는 형태의 수학 문제들로써, 문제의 성격에 대해 새로운 이해를 하게 해 주고, 이제까지 배운 수학 지식, 전략들을 종합적으로 상기 · 활용 · 일반화 시켜 주며, 수학에 대한 흥미를 갖게 해 준다는 점에서 하나의 정확한 풀이를 요구하는 기존의 수학 문제와는 또 다른 가치를 지닌다.

한편, 수행 평가에서 있어서 중요한 것은 문항의 출제 과정, 문항의 질과 평가 결과를 채점하는 기준을 어떻게 설정하는가하는 점이다. 문항의 출제과정과 질은 학습의 수준에 따라 결정되며 채점 결과는 교수 방법, 학습 방법, 성취 수준, 학생의 문제에 대한 접근 방법, 학생이 흔히 범할 수 있는 오류 등을 파악할 수 있는 중요한 자료가 된다. 이에 각 문항에 대해 일일이 문항의 배경 설명 및 채점 기준을 만들어야 한다. 물론 교사들이 일일이 평가하기는 어렵다 하겠지만 한 학기 당 2회의 정도 이러한 유형의 문제가 주어진다면 적절할 것이다.

수학교과에서의 수행평가의 예들은 크게 두 가지 형태로 구분하여 생각할 수 있다. 첫 번째 형태는 단편적인 정보나 개념을 이용하여 새로운 상황에서 한 개의 옳은 답을 찾는 과제의 평

가 형태이다. 이는 기존의 서술형 문항과 비슷하며 풀이 과정을 하나의 채점 기준체계를 갖춘다는 점이 기존의 방법과 다르다. 두 번째 형태는 문제해결, 그룹과정, 비판적인 생각이나 과정실행의 여러 가지 기술의 조합 등으로 조직되어 있는 열려진 과제로 이루어진 평가 형태이다. 이때에는 해결과정에 있어서 여러 가지 다른 형태가 나올 수 있다는 점을 고려하여 채점기준을 만드는 것이 필요하다.

Ⅱ. 수행평가의 유형

수행평가의 방법들은 새롭게 개발되었다기보다는 예전부터 사용되고 있었던 것이지만, 최근에는 학생 스스로 재창조해 가는 과정을 강조하는 창의력이나 문제해결력 등 고등 사고기능을 파악하고 신장하기 위한 평가 방법으로 각광받고 있다.

위와 같은 수행평가 방법에 대한 구분은 어느 한 면만을 검사하는 방법이라기 보다는 상호 보완적인 것이며, 교수 · 학습의 과정을 개선하고 개별 학생에게 지도 · 조언하고 충고하기 위한 목적으로 사용한다면 어떠한 평가 방법도 수행평가 방법에 포함될 수 있다. 특히 수학과에서의 수행평가에서는 교수 · 학습 · 활동과 평가활동이 상호 통합적으로 진행되는 것을 강조하기 때문에 서술형 및 논술형 검사, 관찰, 내지는 연구과제 형태인 프로젝트 등을 수행평가를 위한 평가방법으로 사용할 수 있다.

가. 서술형 및 논술형 검사

서술형 검사란 학생들이 직접 서술(구성)하는 검사이다. 질문의 형태에 있어서 종래의 단편적인 지식을 묻는 것에서 최근에는 창의성 등 고등 사고기능을 묻는 것으로 바뀌어 가고 있다.

논술형 검사도 일종의 서술형 검사이기는 하지만 개인 나름의 생각이나 주장을 창의적이고 논리적이면서도 설득력 있게 조직하여 작성해야 함을 강조한다는 점에서 일반 서술형과 구별할 수 있다. 그러나 수학 과목 같은 일종의 확연한 답이 기대되는 교과에서는 여러 형태의 논술형 문항은 별로 없고, 단지 증명문제가 그 예가 될 수 있다. 증명은 여러 조건과 방법을 사용하여 하나의 결론을 이끌어 낼 수 있게 논리적으로 전개해 나가는 방법이므로 사용 가능하다. 대체로 논술형 검사에서는 서술된 내용의 깊이와 넓이뿐만 아니라 논리의 전개 및 종합하는 능력을 동시에 평가하게 된다.

서술형 및 논술형 평가 문항을 작성하는 일반적인 절차는 다음과 같다.

① 교과의 하위 내용 영역별로 서술형 및 논술형 평가에 적절한 평가 목표를 추출한다. 평가목표를 추출할 때, 평가 영역과 평가할 내용 및 인지적 행동 영역 요소를 선정하여야

한다.

② 문제 상황을 설정하여 문항의 체계 및 발문을 구상한다. 단독 과제형과 자료 제시형 중에서 평가하려는 목표를 기초로 해서 어떤 문제 상황이 가장 적절한가를 결정한다. 단독 과제형이란 구체적인 문제 상황이 주어지지 않고 어떤 특정 영역의 내용을 쓰게 하는 것이다. 자료 제시형이란 구체적인 사실적 자료를 제시해 주고 그것을 비평하거나 그 자료에서 어떤 합리적인 결론을 끌어내도록 요구하는 것과 같은 문제 유형이다.

문항을 작성할 때는 평가 대상 학생의 학문적 혹은 정서적 배경을 적절히 고려한다. 이것은 학생들의 반응이 어디에서부터 시작하여 대답할 것인가를 예상하여 문제 작성 과정에 반영하는 것이다. 학생들이 어떤 정보나 자료를 어느 정도 활용하여 어떤 수준에서부터 대답하여야 할 것인가를 가능한 한 명료히 하여 문항을 작성한다.

③ 모범답안을 작성한다. 서술형과 논술형 검사의 경우 적어도 2명 이상의 출제 교사가 각자 나름대로 예비적인 모범답안을 작성한 후, 토론 및 협의를 통해서 최종적인 모범답안을 작성한다. 출제자가 모범답안을 작성하거나 작성 후 검토과정에서 앞서 제작한 검사 문항 자체를 수정 · 보완해야 하는 경우가 많이 발생하기 때문에 최종 문항을 인쇄하기 전에 반드시 모범 답안의 작성 과정을 거쳐야 한다. 서술형이나 논술형 검사를 제작할 경우에는 반드시 모범답안을 작성한 후 채점 기준표를 완성하도록 해야 한다. 또한 모범답안이 여러 가지로 될 수 있는 경우에는(용어 또는 아이디어 등) 가급적 가능한 경우를 모두 나열하도록 해야 한다.

④ 채점 기준표를 작성한다. 문항별로 모범답안에 근거하여 채점 기준표를 작성함에 있어서 채점 요소의 대항목과 소항목을 결정하고 각각에 대한 배점을 한다. 배점에 있어서는 요소의 비중에 따라 배점을 차등화 하여 채점 기준을 상세화한다. 서술형 및 논술형 시험의 채점 기준 작성 방식으로는 ⓐ 사례 나열 방식, ⓑ 감점 조건 제시 방식, ⓒ 요소별 배점 방식 등이 있다. 사례 나열 방식은 부분 점수를 받을 수 있는 가능한 모든 답안의 예를 구체적으로 제시하고, 각각에 대한 득점을 명시하는 형태이다. 감점 조건 제시 방식은 감점을 당하게 되어 있는 답안 상의 미비점을 구체적으로 명시하고, 그에 대한 감점 값을 명시하는 형태이다. 요소별 배점 방식은 정답 혹은 모범 답안을 구성하고 있는 채점 요소 각각에 대하여 배점을 명시하는 방법이다.

서술형 및 논술형 문항을 제작할 때의 유의점은 다음과 같다.

① 서술형 및 논술형 문항은 선다형의 문항을 통해서 잴 수 없는 사고력, 추리력, 종합력, 비판력, 분석력, 응용력, 표현력, 창의력 등과 같은 고등 사고기능을 쉽게 측정할 수 있다. 따라서 이러한 고등 사고기능을 측정하기에 적절한 문항을 제작하여야 한다. 또한 특정

교과목의 학업성취도를 평가하기 위한 경우를 제외하고, 일반적인 논술능력을 파악하기 위해서는 매우 특수한 분야의 지식이나 경험이 있어야만 응답할 수 있는 문항, 예를 들어 '환율의 폭등이 우리 나라 자동차 부품산업에 미칠 영향에 대하여 논하라', '고도의 산업화 및 자동화가 될 미래 사회에서 예상되는 노사간의 문제점을 지적하고 이의 대처 방안을 논술하라' 등의 문항은 피하는 것이 바람직하다.

② 구체적인 목적을 평가할 수 있도록 문항을 구조화시키고 제한성을 갖도록 출제해야 한다. 문항이 일반적이고 모호하지 않도록 문항이 요구하는 영역을 규정하고 제한하며, 잘 구조화시켜야 한다. 구조를 제한하면 첫째, 문항이 현실적인 상황과 관련되고, 둘째, 응답해야 할 과제가 분명해지며, 셋째, 적당히 추측해서 아무렇게나 쓸 위험을 방지할 수 있다.

③ 서술형이나 논술형 검사를 선발 · 분류 · 배치를 하기 위한 선발형 평가에 사용할 경우에는 여러 문항 중에서 선택하여 응답하게 하는 것을 지양해야 한다. 여러 문항 중에서 선택하여 응답하게 하는 것은 응답자에게 자유스러움과 융통성을 주어 바람직하게 보이나, 이는 학생들이 서로 다른 조건하에서 검사를 치르는 상황을 초래하므로 평가의 기준이 달리 설정된다고 할 수 있다. 아울러 여러 개의 서술형 및 논술형 문항을 같은 수준의 문항 난이도에 의하여 제작하기가 어려우므로 경쟁이 심한 선발 고사에서는 문항을 선택하게 되는 상황을 지양하고 모든 응답자가 같은 문항에 답할 수 있도록 하는 것이 바람직하다.

나. 관찰법

관찰은 학생을 이해하고 평가하기 위한 가장 보편적인 방법 중의 하나이다. 교사들은 늘 학생들을 접하고 있으며 개별 학생 단위로나 집단 단위로나 항상 관찰하게 된다. 예컨대 학생들 간의 사회적 관계 구조를 파악하기 위해 한 집단 내에서 개인간 또는 소집단간의 역동적 관계를 집중적으로 관찰할 수 있다. 참고로 수업 시간에 수시로 학생들에게 '문제 풀기'를 시킨 후에 개별 학생의 문제해결 능력을 자연스러운 관찰을 통하여 평가 평정 척도를 사용할 수 있다.

다. 연구보고서법

연구보고서법이란 개별 교과와 관련되거나 범교과적인 연구 주제 중에서 학생의 능력이나 흥미에 적합한 주제를 선택하되, 그 주제에 대해서 자기 나름대로 자료를 수집하고 분석 · 종합하여 연구 보고서를 작성 · 제출하도록 하여 평가하는 방법을 말한다. 이 때 연구는 그 주제나 범위에 따라 개인적으로 할 수도 있고, 관심 있는 학생들이 함께 모여서 소집단별로 할 수도 있다. 이러한 연구보고서법은 흔히 프로젝트(project)법이라고도 하며, 학

생들은 연구를 수행하고 보고서를 작성하는 과정에서 연구하는 방법, 각종 정보를 수집하는 방법, 다양한 자료를 종합하고 분석하는 방법, 보고서 작성법 등을 익히게 될 것이며, 연구보고서 발표회나 학생들간 연구보고서의 상호 교환을 통해 많은 것을 배우게 된다. 학생들의 연구보고서를 평가할 때 사용할 수 있는 평가기준은 연구 영역 및 내용(보고서에 진술한 연구내용이 해당 문제해결에 얼마나 필요한 것인가?), 자료 수집능력(해당 문제를 해결하기 위한 자료나 정보를 얼마나 다양하게 수집하였는가?), 자료 분석 및 종합 능력(수집한 자료나 정보를 분석하거나 종합하는 능력은 어느 정도인가?), 보고서 작성 방법(보고서 작성법에 맞도록 보고서를 작성하였는가?)등으로 생각할 수 있다.

라. 기타

이미 지적한듯이, 평가의 목적이 교수 · 학습의 과정을 개선하고 개별 학생에게 지도 · 조언하고 충고하기 위한 목적으로 사용되기만 한다면 어떠한 평가 방법도 수행평가 방법에 포함될 수 있다. 특히 수행평가에서는 교수 · 학습활동과 평가활동이 상호 통합적으로 진행하는 것을 강조하기 때문에 포트폴리오 법과 같이 다양한 교수 · 학습 방법들이 곧 수행평가를 위한 평가방법이 될 수 있다. 포트폴리오(portfolio)법이란 교과 과제물이나 연구 보고서나 실험 · 실습의 결과 보고서 등 한 학기 내지는 일년 동안의 자료를 정리하여 평가하는 방법이라 할 수 있다. 이 방법을 통해 학생들은 자기 자신의 변화 과정을 알 수 있으며, 자신의 강점이나 약점, 성실성 여부, 잠재 가능성 등을 스스로 인식할 수 있고, 교사들은 학생들의 과거와 현재의 상태를 쉽게 파악할 수 있을 뿐만 아니라 앞으로의 발전 방향에 대한 조언을 쉽게 할 수 있다. 이 평가 방법은 단편적인 영역에 대해 일회적으로 평가하지 않고 학생 개개인의 변화 · 발달과정을 종합적으로 평가하기 위해 전체적이면서도 지속적으로 평가하는 것을 강조하는 것으로 수행평가의 대표적인 방법 중의 하나로 각광받고 있다.

Ⅲ. 수행평가의 예시

영화 속의 수학

【수행 목표】

- 영화 속의 장면 중에서 수학과 관련된 것을 찾아봄으로써, 수학이 다양한 문화의 장르 에도 반영될 수 있음을 인식한다.

【평가 과제】

영화 속의 장면 중 수학과 관련된 것을 조사해 보고, 이에 대하여 설명하여라.

【풀이 과정】

다음은 영화 속에 등장하는 수학과 관련된 장면에 대한 예시이다.

[예시 1] '다이 하드 3' 라는 영화에서 악당 제레미 아이언스는 주인공 맥클레인 역의 브루스 윌리스에게 여러 가지 문제를 내어 골탕을 먹인다. 이를 해결해야만 무고한 시민의 목숨을 구할 수 있기에 관객은 주인공이 이 문제들을 어떻게 해결하는 가에 관심을 가지고 집중함으로써 영화에 흥미를 더한다. 여러 가지 문제 중에서 비교적 수학과 관련된 문제는 다음과 같은 것이다.

"분수대 앞에 저울폭탄이 있다. 5분 내에 이 저울 위에 정확히 무게 4갤런이 되는 물통을 올려 놓아야 폭탄은 터지지 않는다. 맥클레인 앞에는 3갤런짜리 물통과 5갤런짜리 물통이 각각 한 개씩 있다. 이 두 물통을 이용하여 4갤런의 물통을 만들어라."

위의 문제의 풀이는 다음과 같다. 5 갤런의 물통에 물을 가득 넣은 후 3갤런 짜리 물통에 물을 넣는다. 그러면 5 갤런 짜리 물통에는 2 갤런이 남는다. 그리고 다시 3갤런 짜리 물통을 비운 후 2 갤런의 물을 3 갤런 짜리 물통에 넣는다. 그 다음 5갤런 짜리 물통에 물을 가득 넣은 후 그 물로 2 갤런이 들어 있는 3갤런 짜리 물통을 가득 채운다. 그러면 5갤런 짜리 물통에는 정확히 4 갤런의 물이 남는다.

[예시 2] 스필버그의 '피라미드의 공포' 라는 영화에는 수학과 관련된 퍼즐과 암호가 나온다. 소년시절의 셜록 홈즈와 그 친구들이 그 주인공이다. 여기에 나오는 문제로 다음과 같은 것이 있다.

"곰 한 마리가 남쪽으로 2 ㎞ 이동한 다음 다시 동쪽으로 2 ㎞ 이동하고, 다시 북쪽으로 2 ㎞ 이동하였더니 처음의 자리로 돌아왔다. 이 곰의 색깔은? "

남쪽으로 2 km 이동하고, 동쪽으로 다시 2 km 이동하고, 다시 북쪽으로 2 km 이동하였을 때 처음의 자리로 되돌아올 수 있는 위치는 바로 북극점에서이다. 따라서 이 곰은 북극곰이고 그 색은 흰색이다.

【채점 기준】

'영화 속의 수학' 은 영화와 같은 예술 작품에서도 수학이 소재가 될 수 있음을 확인함으로써 수학에 대한 학생들의 흥미를 진작시키는 차원에서 구상된 프로젝트이다. 따라서 이 프로젝트에 대하여 채점 요소를 추출하고 채점 기준을 설정하여, 점수화하고 수량화하기보다는, 학생들의 수학적 흥미를 유발시키는 차원에서 가볍게 다루어짐이 바람직하다.

그러나 굳이 채점 기준을 설정한다면 다음과 같이 설명의 정도에 따라 수준을 구분하여, 3~4점, 6~7점, 9~10점을 부여할 수 있을 것이다.

채점 요소	배 점
• 수학과 관련된 영화 속의 장면을 조사하였으나 이에 대하여 설명하지 못한 경우	3~4 점
• 수학과 관련된 영화 속의 장면을 조사하였으나 이에 대한 설명이 미흡한 경우	6~7 점
• 수학과 관련된 영화 속의 장면을 조사하고 정확히 설명한 경우	9~10 점

대표값에 대한 토론

【수행 목표】

– 평균, 중앙값, 최빈값 등 대표값의 뜻을 알고, 각 대표값의 특징에 대하여 이해한다.

【평가 과제】

다음 상황의 경우 평균, 중앙값, 최빈값 중 어느 것을 대표값으로 정하는 것이 합리적인지 생각해 보고 각자 자신의 의견을 말해 보자.

배나와 회사의 공장에서는 'A' 라는 제품을 생산한다. 이 회사의 이사회는 배나와씨와 그의 동생, 그리고 다섯 명의 친척들로 구성되어 있다. 사원으로는 5명의 작업 반장과 10명의 직공이 있다. 그런데 일손이 부족하여 한 사람의 직공이 더 필요하게 되었다.

노동해: 저는 배나와 회사에서 일하고 싶습니다. 이 곳의 월급이 꽤 높다고 들었거든요.

배나와: 우리 회사의 보수는 아주 높은 편이지. 1인당 평균 월급이 100만원이나 되니까. 단 수습기간 동안에는 20만원을 받지만, 임금은 상당히 빠른 속도로 오르지.

근무를 시작한 지 며칠 후 노동해는 사장을 찾아갔다.

노동해: 당신은 나를 속였어요. 다른 직공들에게 물어 보았는데, 월급이 50만원이 넘는 사람은 하나도 없었어요. 그런데 어떻게 평균 월급이 100만원이라는 거지요?

배나와: 나는 매달 550만원을, 내 동생은 400만원을 받지. 그리고 5명의 내 친척들은 각각 80만원씩, 5명의 작업 반장들은 각각 70만원씩, 10명의 직공들은 각각 50만원씩을 받지. 따라서 매월 지급되는 월급의 총액은 2200만원이야. 이것을 22명으로 나누면 100만

원이 되지. 이제 이해가 되나?

노동해: 물론 이해하죠. 그것은 단지 계산상의 결과이지요. 어쨌든 당신은 나를 속였어요.

배나와: 천만에! 자넨 아직도 이해를 못하는군. 물론 가장 높은 월급과 가장 낮은 월급의 중앙에 위치하는 80만원은 택하는 방법도 있겠지만, 그것은 평균이 아니고 중앙값이라는 거야!

노동해: 그럼 변변치 못한 우리의 월급 50만원은요?

배나와: 그건 최빈값이라고 하지. 즉, 가장 많은 사람들이 받는 월급을 말하지. 모든 불만은 자네가 평균, 중앙값, 최빈값을 구별하지 못하는 데서 생기는 거네.

【평가 방법】

- 주어진 주제에 대하여 소집단별로 토론하도록 하고, 토론 상황을 교사가 관찰하고 체크리스트나 기록지에 기록하여, 학생의 수학적 능력이나 성향, 의사소통 능력 등에 대한 자료로 활용할 수 있다.
- 이 과제는 인지적 갈등을 유발시키는 지문을 제공하고, 학생들 간의 활발한 토론을 유발시켜, 각 대표값의 장단점에 대하여 스스로 결론을 지을 수 있도록 구성되어 있다.

【채점 예시】

다음은 3명으로 이루어진 소집단에서 일어날 수 있는 가상적인 토론의 예이다.

학생1 : 굉장히 헷갈리는 상황이야. 그렇지만 교과서에서는 대표값으로 평균을 가르쳐주고 있으니까 평균인 100만원을 그 회사 사원이 받는 보통의 임금으로 생각해야 할 것 같아. 프로 야구를 보아도 타율을 구할 때 평균을 쓰잖아.

학생2 : 직공들은 50만원밖에 받지 못하는 데, 평균은 100만원이라… 그건 너무 억울해. 두 배의 차이가 나는 임금인데, 평균을 택하니까 직공들 임금이 뻥튀기 되잖아. 내 생각에는 50만원, 70만원, 80만원, 400만원, 550만원의 중간에 위치하는 80만원을 대표값으로 정하는 게 나을 것 같아.

학생3 : 그래 나도 동감이야. 평균이 합리적이지 못할 때도 있어. 만약에 우리 조 학생들의 수학 점수가 5점, 5점, 10점, 100점이라고 할 때, 평균인 30점을 그 조의 대표적인 점수라고 말하면, 5점이나 10점을 받은 학생에게는 실력이 너무 과장된 것이고 100점 맞은 학생에게는 손해가 되니까. 그러니까 평균이 여러 가지 값들을 대표하기에 적절하지 않을 수도 있어. 또 만약 옷장을 만드는 데 아파트의 안방 치수를 고려해서 만든다고 생각해 봐. 여러 평수 아파트의 안방 치수를 평균 낸다면 어떤 아파트에도 맞지 않을 꺼야. 이런 경우는 차라리 가장 많은 치수를 선택해서 거기에 맞게 만드는 것이 더 나을 꺼야.

글쎄 옷장의 예는 별로 적합하지 않은 예인지는 모르지만 가장 많이 나타나는 값을 대표값으로 정하는 게 유용할 때도 있는 것 같아. 그런 의미에서 배나와 회사의 경우 최빈값인 50만원을 임금의 대표값으로 정하는 것이 낫다고 생각해.

【평가 기준】

이 과제와 같이 학생들로 하여금 토론을 하게 하고 교사가 이를 관찰할 경우, 점수화가 용이하지 않을 뿐 아니라 객관화한 점수가 큰 의미를 갖지 못한다. 따라서 다음과 같이 학생들이 보이는 반응을 체크리스트에 표시하거나 간단한 기록지를 작성하고, 이를 학생에 대한 종합적인 평가에 이용할 수 있다.

체 크 리 스 트				
관찰(면담)요목		학생 1	학생2	학생3
수학적 성향	수학에 대해 상당한 흥미와 호기심을 가지고 있다		∨	∨
	본인의 생각에 대하여 자신이 있다.	∨	∨	∨
수학적 지식	평균, 중앙값, 최빈값의 뜻과 특징에 대하여 잘 파악하고 있다.		∨	∨
수학의 유연성	한 가지의 사고에 고착되지 않고 다른 가능성을 생각하는 데 있어 융통성이 있다.		∨	∨
수학적 의사 소통 능력	본인의 의견을 활발하게 이야기한다.	∨	∨	∨
	본인의 생각을 관철시키기 위하여 여러 가지 예를 든다.			∨

기 록 지
관찰 대상 : 학생 1   관찰 시간 : 3 분 관찰 사항 : - 대표값에 대한 토론에서 평균 이외의 대표값을 고려하지 않음으로써 사고의 고착성을 보임.
관찰 대상 : 학생 2   관찰 시간 : 5 분 관찰 사항 : - 대표값에 대한 토론에서 다소간의 문제의식을 가지고 평균 이외의 대안적인 대표값으로 중앙값을 제안함.
관찰 대상 : 학생 3   관찰 시간 : 5 분 관찰 사항 : - 대표값에 대한 토론에서 최빈값을 제안하고 이에 대한 상세한 설명 및 예를 제시함. 수학적 의사소통 능력이 뛰어남.

작도 문제

【수행 목표】

– 실생활에서 여러 가지 기하학적 현상들을 살펴보고 이들을 좌표평면으로 옮겨봄으로써 수학적 이해와 아울러 그 표현에 대한 자신감을 갖는다.

【평가 과제】

역사적으로 도형은 사람들의 주된 관심사였다. 그 중에서도 작도가능한 도형에 대하여 많은 연구가 있었다. 평면 위에서 단위길이와 두 양수 x, y를 나타내는 길이가 주어졌을 때, xy, $\frac{x}{y}$, $\sqrt{x}$ 가 어떻게 작도가능한가를 알아보아라.

【준비물】 자, 컴파스

【풀이 과정】

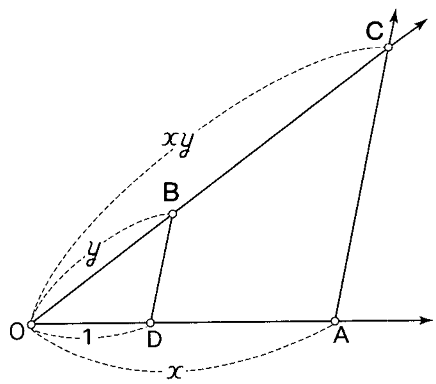
(1) xy의 작도

① 한 점 O를 지나는 서로 다른 두 직선 위에 $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$가 되도록 두 점 A, B를 정한다.

② 직선 OA의 A방향으로 $\overline{OD} = 1$이 되는 점 D를 정한다.

③ 점 A를 지나 직선 BD와 평행인 직선을 그어 직선 OB와의 교점을 C라 한다.

④ $\overline{OC} = xy$ 이다. (∴ ODB ∽ OAC)



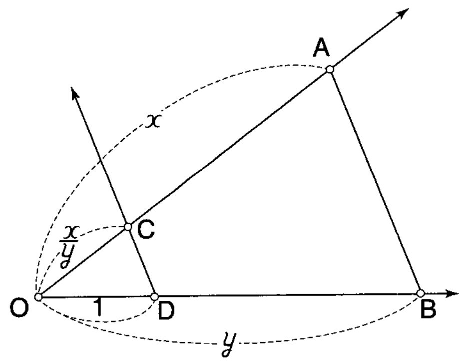
(2) $\frac{x}{y}$의 작도

① 한 점 O를 지나는 서로 다른 두 직선 위에 $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$가 되도록 두 점 A, B를 정한다.

② 직선 OB의 B방향으로 $\overline{OD} = 1$이 되는 점 D를 정한다.

③ 점 D를 지나 직선 BA와 평행인 직선을 그어 직선 OA와의 교점을 C라 한다.

④ $\overline{OC} = \frac{x}{y}$이다. (∴ △ODC ∽ △OBA)



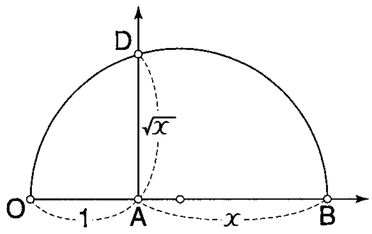
(3) $\sqrt{x}$의 작도

① 한 직선 위에 차례로 세 점 O, A, B를 $\overline{OA}$ = 1, AB = x 가 되도록 정한다.

② $\overline{OB}$의 중점을 작도한 후, $\overline{OB}$를 지름으로 하는 반원을 그린다.

③ 점 A에서 $\overline{OB}$에 수직선을 그어 반원과의 교점을 D라 한다.

④ $\overline{AD} = \sqrt{x}$ 이다. ($\because$ $\triangle OAD \backsim \triangle DAB$)



【평가상의 유의점】

기본도형의 작도방법을 통하여 논증기하에 대한 기본적인 이해와 아울러, 작도가능한 두 수의 곱과 몫도 가능함을 알고, 또 무리수 중에도 작도 가능한 것이 있음을 알게 됨으로써, 논증적 사고능력을 기르고 새로운 동기유발이 이루어지도록 한다.

【평가 기준】

채점 요소		배 점
• xy, $\frac{x}{y}$, $\sqrt{x}$ 을 작도한 경우	• xy, $\frac{x}{y}$, $\sqrt{x}$ 의 작도과정이 바르게 설명된 경우	9~10 점
	• 작도과정에서 표현상 부분적으로 설명이 부족하거나, 이해를 잘못한 경우	6~7 점
	• 작도 개념파악이 잘 이루어지지 못하거나, 해결과정이 매우 부실한 경우	3~4 점

최소 거리 문제

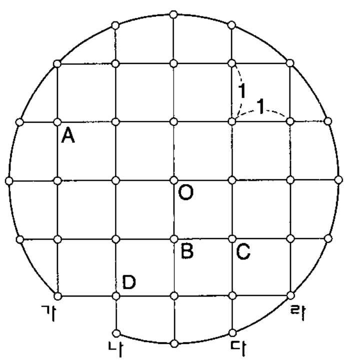
【수행 목표】

- 실험이나 관찰, 또는 실생활에서 일어날 수 있는 여러 기하학적 현상을 찾아 좌표평면 위에서 해결할 수 있다.
- 여러 가지 조건을 고려하여 합리적인 의사결정을 내릴 수 있다.

【평가 과제】

그림은 어느 도시의 도로망을 나타낸 것이다. 정사각형 모양을 이루는 간선도로는 교차로간의 거리가 모두 1로 일정하고, 도시의 순환도로는 O를 중심으로 하는 원의 일부로 되어 있다. 네 개의 대리점 A, B, C, D를 소유하고 있는 한 유통회사에서 순환도로 위의 가, 나, 다, 라 중 한 곳에 물품 창고를 세우려고 한다. 이 때, 물품창고에서 도로를 따라 대리점 A, B, C, D에 이르는 거리의 합이 최소인 곳이 가장 적당하다고 하면, 어디에 세우는 것이 가장 좋은지 알아보자.

【풀이 과정】



그림의 O가 원점이 되도록 도로망을 좌표평면 위에서 생각하면 A, B, C, D는 좌표평면의 점 (−2, 1), (0, −1), (1, −1), (−1, −2)과 대응이 된다. 이 때, 가, 나, 다, 라 각각으로부터 A, B, C, D까지의 거리의 합을 구해 보자.

그림에서 '나'와 'D' 사이의 거리를 x라고 하면 $x=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}-2=\sqrt{7}-2$ 이다.

이다. 따라서, ('가'로부터 A, B, C, D까지의 거리의 합)=3+3+4+1 = 11

('나'로부터 A, B, C, D까지의 거리의 합)=$(x+4)+(x+2)+(x+3)+x = 9+4x>11$

('다'로부터 A, B, C, D까지의 거리의 합)=$(x+6)+ (x+2\ ) +(x+1)+(x+2)=11+4x>11$

('라'로부터 A, B, C, D까지의 거리의 합)=7+3+2+3 = 15

그러므로 '가' 지점이 가장 적당한 곳이 된다.

【평가상의 유의점】

중학교에서 배운 논증기하학에 대하여 공통수학에서는 좌표평면에서 수식을 통하여 수학적으로 해결하는 과정을 필요로 하고 있다. 따라서 실생활이나 실험 및 관찰을 통하여 생기는 기하학적인 내용을 가진 여러 가지 예들 중의 하나를 찾아 좌표평면 위에서 단순화시키고 이에 관한 수학적 처리를 보다 자연스럽게 해결해 봄으로써 문제해결 능력을 기르도록 한다.

【채점 기준】

채점 요소		배점
기하학적 문제 찾기	• 실생활의 예에서 기하학적 성질을 잘 관찰하여 나타내는 경우	8~10점
	• 기하학적 성질을 지닌 예를 단순히 나열한 경우	4~7점
	• 관찰이 부족하거나 기하학적 성질에 대한 설명이 부족한 경우	0~3점
좌표평면에서의 해결	• 좌표평면 위에서의 해결 과정이 잘 제시된 경우	8~10점
	• 좌표평면 위에서의 해결 과정이 불충분하게 제시된 경우	4~7점
	• 좌표평면 위에서의 해결 과정이 거의 또는 전혀 제시되지 못한 경우	0~3점

주차 문제

【수행 목표】

- 삼각비의 뜻을 알고, 이를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.
- 여러 가지 조건을 고려하여 합리적인 의사결정을 내릴 수 있다.

【평가 과제】

시내 중심의 쇼핑가의 주차 문제를 해결하기 위하여, 도로 양쪽에 자동차의 주차 공간을 최대한 확보하는 방안을 모색하고자 한다. 주차 공간을 마련해야 하는 도로는 직선도로로 길이는 160m, 폭은 18m이고, 주차 공간의 길이는 4.5m이고, 폭은 3m이다. 주차 공간을 만들고도 양방향 통행이 가능하도록 고안되어야 하는데, 이 때 한 차선의 폭은 최소 4.5m가 되어야 한다.

【평가 방법】

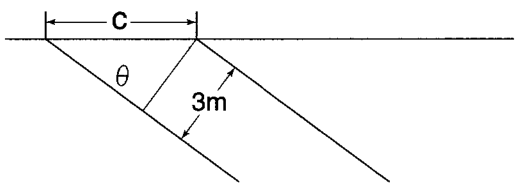
이 프로젝트는 학생 개개인에 대하여 부과할 수도 있고, 소집단을 형성하여 협동학습을 통해 해결할 수도 있다. 학생이 개인적으로 프로젝트를 할 때에는 며칠에 걸친 과제로 수행할 수 있고, 소집단으로 해결할 때에는 한 차시 동안에 협동하여 해결할 수 있다. 이 프로

젝트의 수행을 위해서는 계산기의 이용이 필수적이다. 또 수학교과서의 부록에 제시되어 있는 삼각함수표를 이용하는 것도 필요하다.

【준비물】
계산기, 삼각비의 표

【풀이 과정】
▶ 도로와 평행하게 주차하는 경우
도로의 양쪽에 평행하게 주차를 시킬 경우 한 쪽 도로에는 35대의 차를 세울 수 있으므로(∴ 160÷4.5=35.6), 양쪽 합쳐 70대의 차를 주차할 수 있다. 이 때 18−(3×2)=12≥9 이므로, 양방향 통행이 가능하다.

▶ 경사지게 주차하는 경우
다음 그림과 같이 도로와 주차 공간이 이루는 각이 θ라고 하자



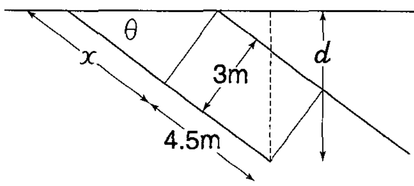
c에 대한 관계식을 만들면
$\sin\theta = \dfrac{3}{c}$ 즉, $c = \dfrac{3}{\sin\theta}$

의 관계식을 이용하여 θ와 이에 대한 c의 값과 한쪽 도로에 세울 수 있는 차의 대수를 다음 표와 같이 구할 수 있다. 이 때, c는 소수 첫째 자리까지 계산하고, 차의 대수는 소수 첫째 자리에서 버림한다.

θ	c	한쪽 도로에 세울 수 있는 차의 대수
	$c=\dfrac{3}{\sin\theta}$	$160 \div c$
10°	17.3	9
15°	11.6	13
20°	8.8	18
25°	7.1	22
30°	6	26
45°	4.2	38
60°	3.5	45
75°	3.1	51
90°	3	53

위의 표에 따르면 도로와 주차 공간이 이루는 각이 클수록 주차할 수 있는 자동차의 대수는 늘어난다. 따라서 90°일 때 가장 많은 자동차를 세울 수 있으나, 각도가 커질수록 주차하기가 용이하지 않다는 점을 유의해야 한다.

세울 수 있는 자동차의 대수와 더불어 고려해야 하는 것은 양방향 통행이 가능한지의 여부이다.



x를 θ에 대하여 풀면

$\tan\theta=\dfrac{3}{x}$ $\quad\therefore x=\dfrac{3}{\tan\theta}$.

d에 대한 관계식을 구하면

$\sin\theta=\dfrac{d}{x+4.5}$ $\quad\therefore d=(x+4.5)\sin\theta$

위의 관계식을 이용하여 각각의 θ에 대하여 x, d 및 통행 가능한 도로의 폭을 구할 수 있다. 이 때, x, d 및 통행 가능한 도로의 폭은 소수 첫째 자리까지 계산한다.

θ	x	c	통행 가능한 도로의 폭
	$x=\dfrac{3}{\tan\theta}$	$d = (x+4.5)\sin\theta$	$18-2a$
10°	17.0	3.7	10.6
15°	11.2	4.1	9.8
20°	8.2	4.3	9.4
25°	6.4	4.6	8.8
30°	5.2	4.9	8.2
45°	3	5.3	7.4
60°	1.7	5.4	7.2
75°	0.8	5.1	7.8
90°	0	4.5	9

위의 표를 참고할 때, 자동차의 주차 공간을 마련하고도 양방향 통행이 가능한 경우는 도로와 주차 공간이 이루는 각이 10°, 15°, 20°, 90°일 때이다. 그러나 90°일 경우는 통행 가능한 도로의 폭이 정확히 9m이므로 여유가 없고, 특히 차가 평행하게 오다가 갑자기 90°로 꺾어 주차하는 것이 거의 불가능하다는 점을 생각할 때, 고려의 대상에서 제외시키는 것이 합리적이다. 나머지 각도 중에서 가장 많은 자동차를 세울 수 있는 경우는 20°이다. 여기에서 통행 가능한 도로의 폭이 20°일 때 9.4m이고 25°일 때 8.8m이며, 한쪽 도로에 세울 수 있는 자동차의 대수가 20°일 때 18 대이고 25°일 때 22 대임을 감안할 때, 22°나 23°정도가 양방향 통행이 가능하면서 가장 많은 자동차를 세울 수 있는 각도라고 할 수 있다.

전체적인 결론으로는 도로와 평행하게 주차시킬 때, 양쪽 도로에 세울 수 있는 자동차의 대수가 70 대로 가장 많다. 그러나 평행 주차에 능숙하지 않는 운전자들에게는 다소 불편한 주차 방식이 될 수 있다. 경사지게 주차하는 경우는 22 나 23 정도의 각도를 이룰 때 양쪽 도로에 세울 수 있는 자동차의 대수가 40 대 정도가 된다. 경사지게 주차하는 경우 주차시 운전자에게 유리할 수는 있으나 평행 주차보다는 세울 수 있는 자동차의 대수가 훨씬 적으므로, 운전자의 편의와 주차 대수를 적절히 감안하여 주차 공간 확보 계획을 수립해야 한다.

【채점 기준】

<table>
<tr><th colspan="2">채점 요소</th><th>배 점</th></tr>
<tr><td colspan="2">• 도로와 평행하게 주차하는 것을 고려한 경우</td><td>2점</td></tr>
<tr><td rowspan="2">• 경사지게 주차하는 것을 고려한 경우</td><td>• 한쪽 도로에 세울 수 있는 차의 대수를 여러 각도에 대하여 계산한 경우(3점)</td><td rowspan="2">6점</td></tr>
<tr><td>• 통행 가능한 도로의 폭을 고려하여 양방향 통행의 가능성을 확인한 경우(3점)</td></tr>
<tr><td colspan="2">• 두 가지 경우를 고려하여 종합적인 결론을 내린 경우</td><td>2점</td></tr>
</table>

분수로 나타내기

【수행 목표】

- 분수를 이해하고, 이를 실제 도형에 적용하여 면적을 구할 수 있다.
- 시각적 추론과 수치적 추론을 이용하여 분수를 나타낼 수 있다.

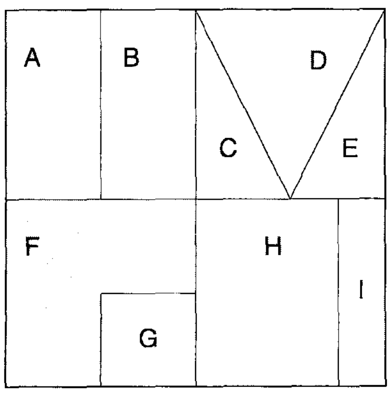
【평가 과제】

다음은 정사각형을 각각의 부분으로 쪼갠 그림이다.

1) A-I의 각 부분을 끼리는 적어도 한 쌍의 같은 크기의 분수가 있을 때, 각 부분을 분수로 나타내어라.

2) 각 분수를 어떻게 정하였는지 설명하여라.

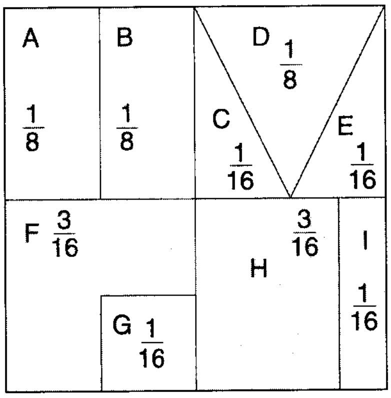
3) 또, 가위와 자를 사용하여 다른 모양으로 바꾸어 나타내어라.



【준비물】 자, 색깔 별 정사각형 색종이 5장

【풀이 과정】

1)



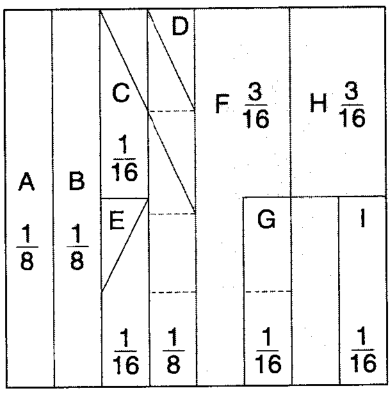
2) A, B : 정사각형을 4등분으로 접은 후 이를 다시 반으로 접어 $\frac{1}{8}$을 구하였다. 이와 모양과 크기가 같은 B는 $\frac{1}{8}$이 된다.

C : A와 같은 크기의 사각형을 다시 반으로 접은 것이므로 $\frac{1}{8}$의 반인 $\frac{1}{16}$이 된다.

D : C와 크기가 같은 삼각형이 두 개 이므로 $\frac{1}{16}$의 두 배인 $\frac{1}{8}$이 된다.

F, H : A와 같은 크기의 사각형과 A를 반으로 접은 사각형을 합한 것과 같으므로 $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$가 된다. 또한 H도 같은 크기이므로 $\frac{3}{16}$이다.

3)



로 표시 할 수 있다. 다른 방법으로 그릴 수 있다.

채점 요소		배점
분수로 설명	• 각 영역을 정확하게 분수로 나타내었을 경우	5점
	• 일부 영역을 정확하게 나타내었을 경우	4~2점
	• 거의 모든 영역을 잘못 나타내었을 경우	0~1점
그림으로 설명	• 색종이를 잘라 분수와 같게 잘 제시된 경우	5점
	• 색종이를 잘라 불충분하게 제시한 경우	4~2점
	• 색종이를 잘라 거의 또는 전혀 제시되지 못한 경우	0~1점

참 고 문 헌

박경미 (1998). 수학과 수행평가. 백순근(편), 수행평가의 이론과 실제(pp.237-296). 원미사.

황혜정, 최승현(1998). 국가 교육과정에 근거한 평가 기준 및 도구 개발 연구-고등학교 공통수학-. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 98-3-4.

황혜정, 최승현(1999). 고등학교 공통필수 10개 과목에 대한 학업성취도 평가 개선 방안 연구. 서울시 교육청.