대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 417~431 September 1999

교수학적 상황론에 기초한 小數 지도 상황 분석

홍 진 곤 (경기여자고등학교)

Ⅰ. 서 론

학습은 그것이 이루어지는 어떠한 상황 속에서 고려될 수 있으며, 적절한 상황 속에서 교육을 해야 한다는 것은 당위이다. 그러나 여기에서, 학습이 잘 이루어지게 하는 좋은 상황은 어떻게 만들어야 하는가가 문제가 될 수 있다. 좋은 상황이란 무엇인가? 어떤 수학 학습의 상황이 '좋은 상황'이 되기 위해서는 구체적인 수학 교과 내용의 본질을 잘 학습할 수 있는 '상황'이어야 할 것이다.

Brousseau(1997)가 제시한 교수학적 상황론은 수학 교과 내용의 본질을 학습하기에 적절한 구체적인 상황을 어떻게 만들 것인가를 그 중심 문제로 다루고 있다. 교수학적 상황론은 수학 교과 내용론 중심의 수학교육 이론으로서, "실제로 수학적 개념이 기능하게 하는 상황을 어떻게 정교화할 수 있을까?"라는 문제에 답하는 수단으로 고안된 이론이다. 가르치고자 하는 수학적 개념이 살아서 기능하는 상황, 즉 수학적 개념의 본질과 성격상 불가분의 관계에 있는 상황 구성을 중심 문제로 삼고 있는 Brousseau의 교수학적 상황론은 우리나라의 수학교육에도 크게 시사하는 바가 있다.

교수학적 상황론은 교수학적 현상학과 더불어 유럽에서 발전된 대표적인 수학교육 이론이다. 교수학적 현상학은 교수학적 상황론에 비해 비교적 일찍 국내에 소개되었으며, 이제까지 수학 교과 내용론에 대한 고찰을 기초로 하여 적절한 수학 교수-학습 방법을 제시하는 국내의 연구는 주로 교수학적 현상학을 기초로 하여 이루어져 왔다(김남희, 1997; 박교식, 1992; 유현주, 1995; 정영옥, 1997 등). 그리고 교수학적 상황론과 밀접한 관련이 있는 교수학적 변환론이 국내에 소개된 바 있으며(Kang, 1990; 이경화, 1996a), 확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구가 이루어진 바 있다(이경화, 1996b). 그러나 아직 교수학적 상황론에 기초한 본격적인 수학교육 연구는 별로 없는 상태이다. 이에 본 고에서는 교수학적 상황론을 '상황의 발전 과정' 측면에 초점을 맞추어 살펴 보고 小數 개념 지도와 관련된 몇 가

지 상황을 고찰하고자 한다.

Ⅱ. 교수학적 상황의 발전 과정

기존의 지식에 새로운 지식을 통합하는 것은 학습자의 책임으로 돌리고, 교사는 현재의 수학 문화에서 참으로 인정되고 있는 지식을 하나씩 전달해 주는데 만족하고 있는 경향이 있다. 그러나 학습자는 적절한 상황 하에서 새로운 지식을 학습하고 이미 학습한 지식을 다시 배우고 재조직함으로써 인식론적 장애가 되는 오개념을 수정해야 하며, 교사는 학습자가 이러한 과정을 밟을 수 있는 상황을 만들어 제공해야 한다.

교수학적 상황론은 '행동-공식화-타당화-제도화'의 단계를 밟아 수학 학습이 이루어지도록 상황을 구성할 것을 제안한다. Brousseau는 이를 분할 개념과 관련된 다음과 같은 게임 상황을 예로 하여 설명한다. 한 사람이 1이나 2 둘 중의 한 수를 말한다. 상대방은 처음 사람이 말한 수에 1이나 2를 더한 수를 말한다. 이런 방식으로 쌍방이 계속 수를 말해 가고 최종적으로 20을 말하는 쪽이 이긴다.

학생들은 2명씩 짝을 지어 게임을 한다. 상대방이 말하고 자기의 차례가 되면 상황을 분석하고 상황으로부터 정보를 끌어낸 후에 어떻게 할 것인지 결정하여 수를 말하게 된다. 게임을 하면서 학생들은 게임에서 이기기 위한 전략을 개발한다. 학생들은 이 수준에서 여러 가지 관련성 또는 규칙에 따라 결정을 내린다. 즉 그들은 규칙을 행동하는데 사용한다. 그러나 그들은 규칙을 규칙으로 의식하지 못하고 있는 상태이다. 따라서 규칙을 공식화하지도 못한다. 이것이 '행동' 수준이다.

이러한 게임을 얼마간 한 후에, 아동들을 두 팀으로 나누고 팀을 대표하는 학생이 앞으로 나와서 게임을 하고, 팀원들은 대표 학생이 하는 것을 관찰하며 토의하게 한다. 이런 상황 속에서 아동들은 게임에서 이기려면 어떤 규칙을 사용해야 하는지를 대표 학생이 사용하는 전략과 자신의 생각을 비교해 가면서 점차 의식하게 된다. 행동 속에 암묵적으로 사용했던 규칙을 '의식하고 표현하는' 이 단계가 '공식화' 단계이다. 공식화 단계에서 아동들은 "이기려면 넌 이러이러한 수를 말해야 해"와 같은 표현을 할 수 있다.

다음은 '타당화' 단계이다. 이 단계는 공식화 단계에서 의식되고 표현된 규칙이 타당한 것인지를 따져보는 단계이다. 이 단계에서는 규칙 자체가 사고의 대상 또는 탐구의 주제가 된다. '이러이러한 수를 말하면 이긴다'는 규칙을 제안한 각 학생은 직접 게임함으로써 또는 인지적으로 설명함으로써 그 제안이 참이거나 거짓임을 상대팀에게 증명해야 한다. 앞에서

공식화한 규칙이 탐구의 대상이 되어 이 규칙의 정당성을 논하는 일종의 증명 활동이 이루어지는 것이다. 그 다음 단계는 '제도화' 단계이다. 이 단계에서는 타당화된 규칙을 하나의 (사회적인) 관습으로 공고히 자리잡게 한다.

행동 상황	→	**공식화 상황**	→	**타당화 상황**	→	**제도화 상황**
지식을 암묵적으로 사용		암묵적인 지식을 의식하고 기술		기술한 지식의 정당화		지식을 승인
‖		‖		‖		
원시수학적 개념	→	**범수학적 개념**	→	**수학적 개념**		
문제해결에 무의식적으로 사용		도구로서 인식		연구 대상으로 인식		

그런데 이와 같은 '행동–공식화–타당화–제도화'라는 상황의 발전 과정은 수학적 개념이 역사적으로 발생해 온 과정과 유사하다. 즉 상황 구성론은 수학적 개념의 역사적 인식론적 고찰을 그 한 바탕으로 삼고 있다.

수학적 개념은 '원시수학적 개념–범수학적 개념–수학적 개념'의 순으로 발전해 왔다. 원시수학적인 개념은 암묵적으로 문제의 해결에 그 개념을 사용하고 있었지만, 그 개념을 의식하지 못한 수준의 개념 상태를 말한다. 예를 들어, 고대에 小數는 양을 나타내는데 사용되었지만 연구의 주제나 도구로서 인식되지는 못했다. 그 다음의 역사 발달 단계에서 원시수학적 개념은 범수학적 개념이 된다. 범수학적 개념 상태는 암묵적으로 사용했던 개념이 도구로서 의식된 단계를 말한다. 끝으로 어떤 개념이 수학적 개념 수준에 도달했다는 것은 그 개념이 연구의 대상으로 취급되는 상태를 말한다.

'행동–공식화–타당화–제도화'라는 상황 발전 과정과 '원시수학적 개념–범수학적 개념–수학적 개념'이라는 개념 발달의 역사적 과정 사이에는 평행성이 존재한다. '행동' 수준에서 수학적 개념이나 절차는 암묵적으로 사용될 뿐 의식되지 않은 상태이다. 이 상태는 역사적으로 원시수학적 개념 상태에 해당한다. '공식화' 단계에서는 암묵적으로 사용되던 규칙이 비로소 의식된다. 이것은 범수학적 개념 상태에 대응된다. 규칙이 고찰의 대상이 되어 그 정당성이 논의되고 승인되는 것은 수학적 개념 상태에 대응된다.

이러한 관점에서 볼 때, '행동–공식화–타당화–제도화'라는 상황의 발전 이론은 수학적

개념의 역사 발생 메커니즘을 상황 구성에 반영한 교수학적 원리, 곧 역사발생적 원리의 일종이라고도 할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 몇 가지 小數 지도 상황 분석

小數 지도를 위한 교수학적 상황을 구성하거나 분석하기 위해서는 먼저 小數 개념의 수학적 본질을 명확히 할 필요가 있다. 각각의 수학적 개념은 다차원적인 측면을 가지므로 특정한 수학적 개념의 본질을 유일하게 하나로 규정하기는 어렵다. 小數의 경우도 마찬가지이다. 그럼에도 불구하고 小數 개념을 지도하기 위한 교수학적 상황을 구성하거나 분석하기 위해서는 그 상황 속에 살아 기능하게 하고자 하는 小數 개념의 본질이 무엇인지를 우선 확실히 할 필요가 있는 것이다. 상황 속에 살아서 기능하게 하려는 개념이 무엇인지를 알지 못한 채 그 개념이 살아 기능하는 상황을 만든다는 것은 논리적으로 모순이다.

小數를 수학적으로 정의하거나 구성하는 많은 방법이 존재하는데, 그 중 하나는 자연수로부터의 확장(extension)에 의해 구성하는 것이다. 예를 들어, $Z \times N$에서 다음과 같은 동치 관계 $\sim$를 생각한다.

* $(a, n) \sim (b, p) \Leftrightarrow a \cdot 10^p = b \cdot 10^n$, (a, n)의 동치류를 $\dfrac{a}{10^n}$ 로 쓴다.
* $D = Z \times N / \sim$ 에서 다음 연산이 정의된다.

  $(a, n) + (b, p) = (a \cdot 10^p + b \cdot 10^n, n + p)$

  $(a, n) \times (b, p) = (a \cdot b, n + p)$

  이것은 자연수 N에서의 연산을 확장한 것이다. $(N, 0) \subset D$이다.
* D의 원소에 순서를 부여한다. $(a, n) \leq (b, p) \Leftrightarrow a \cdot 10^p \leq b \cdot 10^n$

이와 같이 자연수로부터 확장에 의해 만들어진 小數 개념의 본질은 '자연수(정수)의 순서쌍의 동치류'라는 것이다.

물론 小數 개념의 본질을 다르게 파악할 수도 있다. 예를 들어 소수를 유리수의 적당한 제한(restriction)으로 볼 수도 있다. 小數 개념의 자연수의 확장으로서의 측면을 지도하기 위한 교수학적 상황과 유리수의 적당한 제한으로서의 본질을 지도하기 위한 상황은 다를 것이다. 여기서는 자연수의 확장이라는 小數의 본질을 가르치기 위한 교수학적 상황에 대해서만 생각해 보기로 한다.

역사적으로 또 인식론적으로 볼 때, 길이나 질량, 부피를 비교하고 측정하고 재생하는 활동은 매우 기본적인 활동으로서, 유리수와 小數라는 수학적 개념을 활성화시키는 활동이다. 그러므로 小數 개념이 살아 기능하는 교수학적 상황은 '측정' 활동을 포함하고 있는 것이 바람직하다.

아래에서 3가지 상황을 소개할 것이다. 첫 번째는 '미터법을 이용한 측정 상황'으로 Brousseau에 의하면 1960년대의 프랑스에서의 小數 지도는 이 미터법을 이용한 측정 활동을 통해 이루어졌다. 두 번째는 'Dienes 블록을 이용한 넓이 측정 상황'으로 1970년대 프랑스의 小數 지도 방법의 전형적인 예이다. 이는 Dienes의 심리역학(psychodynamics)을 그 이론적 배경으로 하는 교수학적 상황이다. 세 번째는 Brousseau 자신이 개발, 발전시킨 것으로 '종이 한 장의 두께 재기 상황' 이다.

이어서, 이러한 상황들과 비교하여 현재 우리 교과서의 小數 지도 방식을 간단히 분석하고자 한다.

1. 미터법을 이용한 측정 상황

자연수의 확장이라는 小數 개념의 본질을 '미터법을 사용해 측정하는 상황'을 통해 지도한다. 킬로미터, 미터, 센티미터, 밀리미터와 단위들이 도입된다. 그런데 단위를 무한정 많이 도입할 수는 없으므로 결국 측정의 최소 단위가 도입되게 된다. 위의 예에서는 밀리미터가 그 역할을 한다.

학생들은 자를 가지고 길이를 측정하는 활동을 하고, 측정 결과를 미터, 센티미터, 밀리미터로 바꾸어 쓰는 연습을 한다. 단위의 변환 과정에서 자연스럽게 소수점이 등장한다. 그리고 길이, 용량, 가격, 무게, 넓이, 부피와 같은 구체적인 양을 다루는 다양한 실제 문제를 통해 소수와 관련된 연산을 배운다.

그런데 이와 같은 상황은 은연중에 학생들에게 다음과 같은 메시지를 전달한다.

① 小數는 항상 '측정'의 표현이다.

② 小數는 단위의 위치를 나타내는 소수점을 가진 자연수이다.

③ 小數 계산 알고리즘은 자연수의 계산 알고리즘에 소수점을 처리하는 절차가 덧붙여진 것이다.

그리고 이같은 관념은 결과적으로 다음과 같은 부정적인 결과를 초래할 수 있다.

첫째, 학생들의 小數 작용소 관념 형성이 방해를 받는다. 小數는 구체적인 '측정'의 결과이므로, 특정한 양을 나타내는 기호로 받아들여진다. 그 결과 3.25와 같이 단위가 명시되지

않은 小數는 학생들에게 의미를 지니지 않는 것으로 받아들여질 수 있다. 3.25g이나 3.25cm는 의미를 갖지만 그냥 3.25는 의미가 없다고 생각하는 것이다. 결과적으로 小數는 작용소로서의 의미를 지니지 못하고 단위가 수반된 구체적인 양을 나타내는 수로만 인식되게 된다.

둘째, 학생들이 小數의 곱을 이해하는데 방해로 작용할 수 있다. 예를 들어, 3.25m×4는 3.25m를 4번 더하는 것으로 생각할 수 있지만, 4m×3.25는 그와 같은 방식으로 생각할 수 없다. 작용소로서의 小數 관념을 형성하지 못했기 때문이다. 그러므로 4m×3.25=3.25m×4나 4.38=7.25×(4+0.3+0.08)=7.25×4+7.25×0.3+7.25×0.08과 같은 식도 학생들에게 의미를 지니지 못한다. 그래서 小數의 곱에 의미를 부여하는 거의 유일한 방법은 小數의 곱을 구체적인 두 양의 곱으로 해석하는 것이다. 예를 들어 직사각형의 가로의 길이라는 구체적인 양에 세로의 길이라는 구체적인 양을 곱해서 직사각형의 넓이라는 새로운 구체적인 양이 된다는 식으로 설명하는 것이다. 결과적으로 小數의 곱에 대한 이해가 제한된다.

셋째, 학생들은 예를 들어 10.84와 10.85 사이의 수를 상상하는데 어려움을 겪을 수 있다. 최소단위를 단위로 하여 위의 두 수를 다시 나타내면 두 수는 1084와 1085가 된다. 그런데 이 두 수 사이의 자연수는 없다. 이는 小數를 자연수의 다른 표현으로 해석하는 관념이 작용한 결과이다.

넷째, 小數를 합하거나 비교하는 것도 소수점 뒤의 자리수가 똑같지 않으면 어려워하게 된다. 두 수의 소수점 뒤의 자리수가 똑같지 않으면 그것들을 자연수로 환원해 생각하기 곤란하기 때문이다.

다섯째, 小數를 본질상 자연수의 다른 표현으로 간주하기 때문에 $D_n\,(10^n \times D_n \in N$을 만족하는 小數의 집합)의 포함 관계($D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n$)를 인식하기 어렵다.

여섯째, 측정은 늘 최소 단위까지 하고 끝나게 되므로 '충분히 작은 나머지는 무시할 수 있다는 생각'을 배울 수도 있다. 이는 나중에 극한의 개념 학습에 장애로 작용할 수 있다.

일곱째, 比로서의 小數 개념 형성에 장애로 작용할 수 있다.

이상과 같은 장애는 미터법을 사용한 측정 상황이 표면상 小數 개념을 자연수 개념으로부터 확장하는 상황처럼 보이지만, 실상은 최소 단위를 사용할 수밖에 없기 때문에,[1] 小數 개념을 자연수 개념으로 환원해 버리는 효과를 가져오기 때문이다. 이러한 관점에서 보면, 미터법을 사용한 측정 상황은 자연수로부터 확장에 의한 구성물이라는 小數 개념의 본질이

1) 이론상으로는 무한히 작은 단위가 존재할 수 있지만 실제로는 무한히 많은 단위를 다 도입할 수는 없다.

살아서 기능하는 상황이라고 하기 어렵다.

2. Dienes 블록을 이용한 넓이 측정 상황

자연수 개념으로부터 小數 개념을 확장하여 지도하는 다른 상황으로 Dienes 블록을 이용한 넓이 측정 상황을 생각할 수 있다. 학생들은 표면의 넓이를 Dienes 블록과 같은 타일로 덮어서 측정하는 활동을 수행하게 된다.

예를 들어 이진법 타일을 사용하는 경우를 생각해 보자. 이 때 A는 1개, B는 2개, C는 2^2개, D는 2^3개, E는 2^4개, F는 2^5개, G는 2^6개의 타일을 덮는다고 하자. 타일의 개수가 최소가 되도록 타일들을 사용하여 표면을 덮은 후 결과를 이진법으로 기록하게 한다. 그리고 'A가 단위'일 때 넓이가 110011인 도형을 그리도록 한다. 그리고 'E를 단위로' 하여 이 넓이를 측정하라고 요구한다. 구체물 조작을 행하고 학생은 단위를 바꾸었다는 것을 나타내기 위해, 단위가 된 블록의 이름 위에 ∧ 표시를 한다.

F	$\overset{\wedge}{\text{E}}$	D	C	B	A
1	1	0	0	1	1

∧ 기호를 소수점으로 바꾸면 11.0011과 같은 소수 표현이 된다. 같은 종류의 작업이 3진법과 10진법으로도 행해진다. 이같은 연습을 통해 학생들은 어떤 수에 밑을 곱하면 자리수를 왼쪽으로 하나 옮기게 된다는 것을 알게 된다.

소수점을 가진 수들에 자연수를 곱하거나 더하는 것은 같은 유형의 상황 속에서 학습된다. 10, 100, 1000을 곱하는 것은 표 안에 있는 자리수를 왼쪽으로 한 자리씩 옮기는 것으로 이루어진다. 이는 한 자리의 블록 조각을 위의 자리의 블록 조각으로 교환하는 것으로 정당화된다. 두 소수의 곱은 작용소로 설명된다.

$$\begin{aligned} 123.35 \times 4.3 &= [12335 \div 100] \times [43 \div 10] \\ &= [12335]((\div 100).(\times 43).(\div 10)) \\ &= [12335]((\times 43).(\div 100).(\div 10)) \end{aligned}$$

네모 괄호 안에 있는 수는 측정, 둥근 괄호 안의 수는 작용소이다. ' . '은 합성을 나타낸

다. Dienes 블록을 이용한 넓이 측정 상황은 소수 연산자 개념 지도에 있어서 미터법을 이용한 측정 상황보다 유리한 점이 있다.

이와 같은 소수 지도 방법은 Dienes의 심리역학에 따른 것이라고 할 수 있다(Maudet, 1979). 가르치고자 하는 수학적 구조는 Dienes 블록과 같은 교구 속에 암호화되어 숨겨져 있으며 학생들은 Dienes의 심리역학의 단계를 밟아가며 암호를 해독하는 작업, 곧 교사가 게임 속에 숨겨 놓은 것을 인식하는 작업을 하게 된다.

그러나 이런 상황은 그 개념이 '살아 기능하는' 상황이라고 보기는 어렵다. 그 개념은 발견되기를 또는 해독되기를 기다리면서 교구 속에 조용히 숨어있다. 이것을 발견하고 못하고는 전적으로 학생들의 책임이다. 교사가 할 일은 '다양한 동형 구조 게임'을 제공하는 것까지이다. 심리-역동적 과정에 자신감을 갖고 있는 교사는 학생들에게 활동지와 게임을 제공해주는 것으로 만족하고, 예상한 효과나 일반화 혹은 형식화가 일어날 때까지 기다린다. 교사가 제공한 다양성 속에서 공통된 구조를 추상화하는 것은 학생들의 몫이다. 그러나 이러한 상황은 추상화를 필연적인 것이 되도록 강제하지 못한다. 가게 주인이 거스름돈을 거슬러 주고 받는 다양한 경험을 한다고 해서 거스름돈을 규정하는 법칙의 구조를 추상화해야겠다고 생각하게 되지는 않는다. 그들은 그렇게 하도록 동기를 부여받지 않기 때문이다. 마찬가지로 다양한 동형 구조 게임을 제공한다고 해서 그것이 학생들로 하여금 그 속에 들어있는 구조를 추상화해야겠다는 생각이 들도록 만드는 것은 아니다. 즉 Dienes 식의 상황은 개념이 '살아서 기능하는' 상황은 아닌 것이다.

3. 종이 한 장의 두께 재기 상황

자연수의 동치류라는 小數 개념의 본질이 살아 기능하는 상황으로 Brousseau는 다음과 같은 종이 한 장의 두께를 재는 상황을 제안한다.

아동들의 앞에 있는 책상 위에 같은 크기와 같은 색이면서 두께가 다른 종이 200장 정도의 묶음 5개를 임의의 순서대로 놓는다. 교실 뒤의 다른 탁자 위에 앞과 같은 종이 묶음 5개를 다른 순서로 놓는다. 교사는 아동들을 조로 나누고 다른 유형의 종이를 두께에 의해 구분하여 표시하고 인지하는 방법을 발명할 것을 요청한다. 거의 모든 아동이 요구되는 결과를 즉시 얻기 위해 한 장의 종이 두께를 측정하려고 시도하지만, 종이 한 장은 너무 얇아서 측정할 수 없음을 발견하고 여러장의 종이를 측정하기 시작한다. 그 결과 조별로 종이의 두께를 표시하는 다양한 표기 체계를 만든다. 대다수의 조가 표기 체계나 신호법을 발견하면 각 조가 발견한 두께 신호법을 테스트하기 위한 의사전달 게임으로 넘어간다.

각 조는 송신자와 수신자 두 그룹으로 나뉜다. 교실에 막을 치고 송신자 그룹이 막의 한 쪽 편에 있고 막의 다른 쪽 편에는 수신자 그룹이 있게 한다. 송신자들은 첫 번째 탁자에 있는 다섯 묶음의 종이 유형 중에서 하나를 선택한다. 송신자들은 수신자들에게 자신들이 선택한 종이 유형에 대한 메시지를 보낸다. 수신자들은 이 메시지를 받아 송신자들이 선택한 종이 유형이 어떤 것인지 찾는데 사용한다. 수신자들은 교실 뒤에 있는 두 번째 탁자 위에 있는 종이 묶음을 이용한다. 교사는 송신자로부터 수신자에게 메시지를 전달하고, 수신자의 대답을 받고, 그 대답이 송신자의 선택과 일치하는지 확인한 후 모든 조의 결과를 하나의 표로 작성하여 칠판에 적어 놓는다.

그 다음 각 조는 차례로 대표자를 선출하여 메시지를 크게 읽고 선택된 신호법을 설명하고 게임의 결과를 나타낸다. 아동들은 다른 메시지들을 비교하고 논의한다. 각 조마다 만든 표기 체계가 다를 때, 교사는 공통된 신호법을 선택하도록 요구하고 토론 후에 전체 학급은 '10장 1㎜'와 같은 공통된 신호법을 쓰기로 결정한다.

아동들은 각 조가 행한 결과를 보면서 다음과 같은 사실을 발견한다.

① 종이가 다른 유형의 것이면 같은 수의 종이의 두께는 달라야 한다.

② 종이가 같은 유형의 것이면, 같은 두께는 같은 수의 종이에 대응된다.

③ 종이 수가 두 배로 되면, 그 두께도 2배만큼 커진다.

④ 종이 수의 차이가 측정에서 같은 차이에 대응되지는 않는다.

아동들은 종이의 두께를 측정하는 법과 대응되는 쌍을 적는 방법을 알게 된다. 그리고 그들에게 주어진 쌍에 대응되지 않는 유형의 종이를 거부할 줄도 알게 된다. 아동 대다수는 비교 전략을 세울 수 있고 그것을 측정에 대응되는 종이 유형을 받아들이는 데 사용할 수 있다. 몇몇 학생들은 이 전략을 공식화한다. 대부분의 아동들은 측정표를 분석할 수 있고, 선형 모델을 암묵적으로 사용하여 양립불가능한 측정을 지적할 수 있게 된다.

교사는 아동들에게 앞에서 작성된 표를 조사하도록 한다. 아동들은 측정 결과 가운데 양립불가능한 것들을 발견한다. 그 다음 교사는 학생들이 찾은 오류를 교정할 것을 제안한다. 아동들은 그들에게 틀린 것으로 보이는 메시지를 지적하고 그것을 수정하기 위해 노력한다. 이런 수정은 전체 아동에 의해 토론된다. 만일 그들 모두가 동의하면 수정이 이루어지고, 그렇지 않으면 조작에 의해 맞는지를 확인하게 된다. 아동들은 메시지에 나와 있는 종이 수를 세고 측정한다. 공동의 확인 뒤에 새로운 메시지가 채택되고 표에 기록된다.

교사는 아동들에게 빠진 유형의 종이를 측정하여 표를 완성할 것을 제안한다. 이 단계에서 표는 완전히 수정되고 완성된다. 각 유형의 종이에 대한 양립가능한 많은 측정이 있다. 예를 들어 A 유형의 종이를 나타내는 측정 결과로 10장 1㎜, 30장 3㎜, 51장 5㎜ 등과

같은 것들이 모두 유효할 수 있다. 아동들은 같은 유형의 종이에 대응되는 쌍을 계산하는 방법을 알게 되고, 표를 분석하는데 선형 모델을 사용할 수 있게 된다. 몇몇 아동은 각 쌍들 사이의 근사 관계를 사용할 수 있다.

교사는 아동들에게 가장 얇은 것에서 가장 두꺼운 순서로 종이를 배열하라고 요구한다. 그리고 '25장 7mm'와 같은 자료를 주고 다른 것들과 함께 순서대로 배열하도록 한다.

수업의 끝부분에 교사는 아동들에게 종이 한 장의 두께를 적는 방법을 말해 준다. 10장 1mm, 20장 2mm, 30장 3mm는 각각 10장에 1mm 두께가 되는 종이 뭉치, 20장에 2mm 두께가 되는 종이 뭉치, 30장에 3mm 두께가 되는 종이 뭉치를 나타낸다. 동시에 이것들은 모두 같은 유형의 종이를 나타낸다. 이런 종이 한 장의 두께는 $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{3}{30}$ 으로 쓰며, 이는 10분의 1 밀리미터, 20분의 2 밀리미터, 30분의 3 밀리미터라고 읽는다. 이것은 모두 같은 유형의 종이 한 장의 두께를 나타내므로 같은 것이다. 이것은 곧 제도화 단계이다.

결국 종이 한 장의 두께를 측정하는 상황을 해결하는 가운데, 자연수의 순서쌍의 동치류라는 소수 개념이 처음에는 의식되지 않은 채 행동 속에 암묵적으로 사용되다가, 상황이 진행되면서 점차 의식되어 공식화되고 타당화되고, 최종적으로 교사에 의해 하나의 관습으로 제도화되는 과정을 거쳐 자연스럽게 원시수학적인 개념으로부터 수학적인 개념으로 발전되어 학습되는 것이다.

4. 현행 우리나라 小數 지도 상황

다음은 우리 나라 초등학교 교과서에서 小數 개념과 연산이 지도되는 방식의 예이다.

[예 1] 수학 3-2, pp.90~91.

우유 한 봉지에 들어있는 우유의 양은 2dL입니다. 이것은 1L들이로는 얼마가 되는지 알아보시오. 1L는 10dL이므로, 1dL는 $\frac{1}{10}$L입니다. $\frac{1}{10}$L를 0.1L라 쓰고, 영 점 일 리터라고 읽습니다. 0.1에서 '.'을 소수점이라고 합니다. ... 0.1, 0.2, 0.3, 0.4,...와 같은 수를 소수라고 합니다. ... $\frac{5}{10}$는 $\frac{1}{10}$이 5이므로, 0.5는 0.1이 5입니다. 0.7은 0.1이 □입니다. 0.1이 6이면 □입니다.

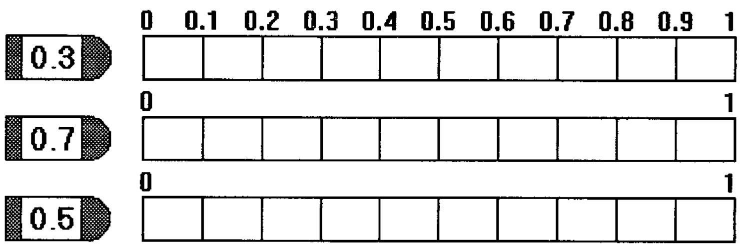
[예 2] 수학 4-2, pp.64~65.

$\frac{1}{100}$을 소수 0.01로 나타내고, 영점 영일이라고 읽는다. ... $\frac{45}{100}$는 $\frac{1}{100}$이 45인 수이고,

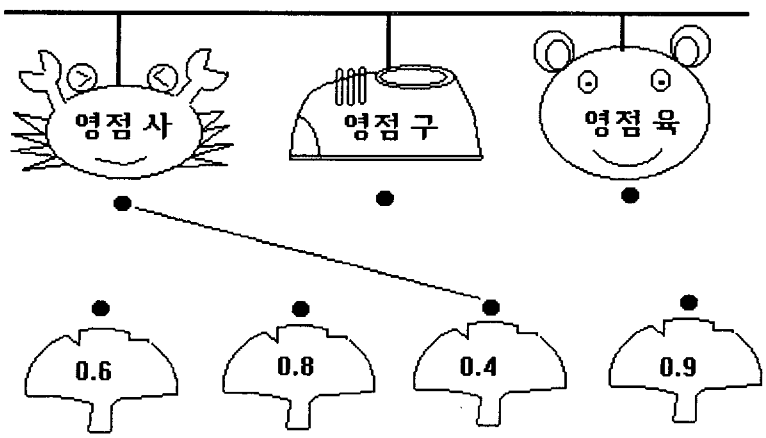
이것은 0.01이 45인 수와 같다. 이것을 소수로 0.45라 나타내고, 영점 사오라고 읽는다.

小數 개념의 도입은 [예 1], [예 2]와 같은 방식으로 이루어진다. 그런데 이와 같이 제공되는 상황은, 앞서 1절에서 언급한 '미터법을 이용한 측정 상황'과 본질적으로 다르지 않은 것으로 보인다. 특히, $\frac{1}{10}$ 이나 $\frac{1}{100}$ 이 각각의 상황에서 '최소 단위'로 작용하고 있기 때문에, 小數 개념을 자연수 개념으로 환원하는 효과가 일어날 수 있음은 고려될 필요가 있다. 보조 교재로 사용되는 '수학 익힘책'의 다음 문제들을 보자.

[예 3] 수학 익힘책 3-2, p.88.
다음 소수만큼 색칠하시오.



[예 4] 수학 익힘책 3-2, p.89.
서로 같은 것끼리 선으로 이으시오.



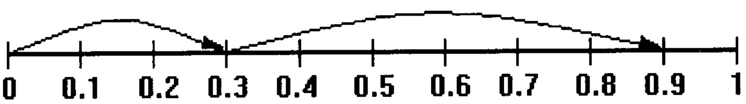
[예 5] 수학 익힘책 3-2, p.88.
□ 안에 알맞은 수를 넣으시오.
0.3은 0.1이 □ 0.5는 0.1이 □ 0.7은 0.1이 □ 0.8은 0.1이 □

[예 3]이나 [예 4]와 같은 문제들은, 교재나 교사의 의도와는 달리, 학습자에게는 다음과 같은 아주 단순한 활동을 요구하는 것으로 받아들여질 수 있다.

[예 3]의 처음 문제는 0.3이 있는 데까지 세 칸을 칠하면 해결할 수 있다. 그런데 이는, 왼쪽의 크레파스 그림에 있는 '0.3'이라는 표현을 오른쪽에서 찾기만 하면 해결할 수 있는 것이기도 하다. 즉, 학습자는 이 활동을 하면서 단순히 왼쪽에 있는 것과 똑같은 숫자를 오른쪽에서 찾는 활동을 한 것일 수 있으며, 이러한 학습자의 활동 결과를 보고 학습자가 小數 개념을 이해했다고 판단하는 것은 일종의 조르단 효과[2)]이다. [예 4]의 경우도 마찬가지이다. [예 4]의 문제를 해결하는 데에는 단순히 '영점 사'의 '영'을 '0'으로, '점'을 '.'으로, '사'를 '4'로 바꾸어 놓기만 하면 된다. 더 간단하게는 양쪽에서 '사와 4', '구와 9', '육과 6'을 찾아 연결하기만 하면 이 문제를 해결할 수 있다.

[예 5]의 경우에도 유사한 일이 일어날 수 있다. 학습자는 0.1이 세 번 모여서 0.3이 된다고 생각하지 않고, 앞의 '0.'을 떼어버린 상태에서 1이 세 번 모인 결과인 3을 생각함으로써 이 문제를 해결할 수 있다. 만일 학습자가 이 문제를 이렇게 해결한다면, 이는 小數 개념의 학습이라기보다 오히려 자연수 개념의 단순 복습에 더 가까운 것이라 할 수 있다.

[예 6] 수학 익힘책 3-2, p.94.
다음 그림을 보고, □ 안에 알맞은 수를 넣으시오.



$$0.3 + 0.6 = \boxed{}$$

[예 7] 수학 5-2, p.5.
0.3×8 의 계산 방법을 알아보자.
... 이와 같이 소수의 곱은 자연수의 곱을 곱한 다음, 소수점을 맞추어 찍는다.

2) '조르단 효과(Jourdain effect)'란 학생들이 보이는 사소한 반응을 마치 학문적인 지식을 알고 있는 증거인 것처럼 해석하는 것을 말하며, 이러한 현상은 교수학적 변환론의 관점에서는 '탈배경화/탈개인화' 과정을 간과한 결과로 해석될 수 있다(이경화, 1996b, p.115).

[예 8] 수학 6-1, pp.14~15.
1.8L의 우유는 0.2L들이의 컵으로 몇 컵이 되는지 알아보자.
$1.8L \div 0.2L \Rightarrow 18dL \div 2dL = \square$(컵)
1.8÷0.2 의 계산을 어떻게 하는지 알아보자.
$$1.8 \div 0.2 = \frac{18}{10} \div \frac{2}{10} = \frac{18}{10} \times \frac{10}{2} = \frac{18}{2} = 18 \div 2$$
$1.8 \div 0.2 = 18 \div 2 = \boxed{9}$

小數의 연산은 위의 [예 6]~[예 8]과 같이 기본적으로 자연수의 연산으로 환원하여 해결하게 지도하고 있다. [예 6]은 '3+6'과 다르지 않은 상황이며, [예 7]이나 [예 8]에서 보듯이 소수의 곱셈, 나눗셈의 경우에도 자연수의 곱셈, 나눗셈으로 고쳐서 계산하게 하고 있다. 결국 소수의 계산 알고리즘은 본질상 자연수의 계산 알고리즘에 단지 소수점을 처리하는 절차가 덧붙여진 것으로 나타나고 있는 것이다.

이러한 활동을 통한 小數 학습은, 비판적으로 말하여, 小數 개념의 학습이 아니라 소수점이라는 기호가 첨가된 자연수 개념 및 연산의 반복 학습이라고 할 수 있다. 이러한 학습 활동 속에서 학생들은, 교과서 및 교사의 본래 의도와는 달리, 小數는 본질상 자연수와 같은 것이라는, 즉 소수는 '점이 붙은 자연수'라는 생각을 갖게 될 수 있다.

교수학적 상황론의 관점에서 볼 때, 우리나라의 소수 학습 지도 방식은 '활동－공식화－타당화－제도화'의 4 단계 중 앞의 3 단계가 거의 생략된 채 바로 제도화를 시도하는 것이라고도 할 수 있다. 이는 비단 소수뿐이 아닌 우리나라의 전반적인 수학 학습 지도와 관련된 일반적인 현상이다.

근래 Piaget 등의 수학 학습 이론과 열린 교육의 영향 등으로 초등학교 수학 수업에서 학생들의 구체적 조작 활동이 강조되고 있다. 이는 '활동－공식화－타당화－제도화'의 4 단계 중 첫째 단계를 강조하는 것으로 볼 수 있다. 이렇게 볼 때, 문제가 되는 것은 '공식화－타당화' 단계이다. 상황론의 관점에서 볼 때, 우리나라 초등 수학교육에서는 '공식화와 타당화' 단계가 좀 더 강조되어 '활동'과 '제도화' 사이의 연결이 자연스럽게 이루어지도록 할 필요가 있다.

Ⅳ. 맺음말

Brousseau가 제시한 교수학적 상황론은 수학적 개념이 실제로 기능하게 하는 상황을 어

떻게 정교화할 수 있을까의 문제를 다루고 있다. 교수학적 상황을 구성하기 위해서는 먼저 가르치고자 하는 수학적 개념의 본질에 관한 수학적, 인식론적, 교수학적 분석이 선행되어야 한다. 가르치고자 하는 개념의 본질이 파악되면 그 개념의 본질이 살아서 기능하는 게임 상황을 '행동－공식화－타당화－제도화'의 단계로 발전되어 가도록 구성한다. '행동－공식화－타당화－제도화'의 상황 발전 단계는 '원시수학적 개념－범수학적 개념－수학적 개념'이라는 역사적인 개념 발달 메커니즘과 평행성을 지니고 있다.

상황론의 관점에서 볼 때, 현재 우리나라의 수학 학습 지도는 '제도화'가 주를 이루고 있고 '공식화'와 '타당화' 단계가 미흡한 실정인 것으로 보인다. 이전 단계가 생략된 상태에서의 제도화는 학생들이 수학적 지식을 제대로 내면화하게 만들지 못하며 형식적 고착으로 퇴행할 가능성이 높다. 한편 근래 제도화 중심의 수학 학습 지도의 보완책 또는 대안으로 수학 학습 지도에서 학생들의 활동이 많이 강조되고 있다. 그러나 아직 이 활동과 제도화 양자는 자연스럽게 연결되고 있지는 못한 것으로 보인다. Brousseau의 상황론, 그 중에서도 '활동－공식화－타당화－제도화'라는 상황 발전 이론은 활동과 제도화를 자연스럽게 연결짓는 한 가지 방법을 보여주고 있다는 점에서, 우리나라 수학교육에도 시사하는 바를 지니고 있다. 교수학적 상황론에 기초하여, 수학적 개념이 살아서 기능하는 많은 교수학적 상황이 개발되어가야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1996). 수학 3-2. 국정교과서 주식회사.

교육부 (1996). 수학 익힘책 3-2.. 국정교과서 주식회사.

교육부 (1996). 수학 4-2. 국정교과서 주식회사.

교육부 (1997). 수학 5-2. 국정교과서 주식회사.

교육부 (1997). 수학 6-1. 국정교과서 주식회사.

김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

박교식 (1992). 함수 개념의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

유현주 (1995). 유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이경화 (1996a). 교수학적 변환론의 이해. 대한수학교육학회 논문집, 6(1), 203-214.

이경화 (1996b). 확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques 2(1)*, 37-127.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht: Kruwer Academic Publishers.

Kang, W. (1990). *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbook*, Doctoral Dissertation, Athens: University of Georgia.

Maudet, C. (1979). *Etude et critique du processus psycho-dynamique selon Diénès*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux.

On the Instruction of Decimal Concept based on the Theory of Didactical Situations

Jin-Kon Hong(Kyeongki Girls' high school)

In this study, I consider Brousseau's theory of didactical situation focused on 'the development process of situations', and analyze some examples of didactical situation related to instruction of 'decimal' concept.

To elaborate situations which really make a mathematical notion function, we have to analyze the essence of the notion, and to construct the situation which can be developed to situations of 'action－formulation－validation－institutionalization'.

From this view, it can be said that the instruction of decimal concept in our country mainly lies in the situations of 'action' and 'institutionalization'. we have to provide more situations of 'formulation' and 'institutionalization' which can connect 'action' and 'institutionalization'.